图论及其应用

Yingyong

图论及其应用

卜月华　吴建专
顾国华　殷　翔

东南大学出版社

内 容 简 介

本书共九章。主要包括图的基本概念、图的连通性、树、Euler 环游和 Hamilton 回路、图的匹配与独立集、图的染色、网络选址问题，网络流及网络模型应用实例等内容。本书不仅介绍了图论的基本原理，也介绍了如何应用图论方法解决实际问题。

本书论证严密，深入浅出，清晰易懂，并配有适当的例题和习题，可作为高等院校本科生图论课的教材或参考书，也可作为数模集训的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/卜月华.—南京:东南大学出版社，2000.3

ISBN 7-81050-601-3

Ⅰ.图…　Ⅱ.卜…　Ⅲ.图论　Ⅳ.O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 14228 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)

出版人　宋增民

江苏省新华书店经销　华东有色地研所印刷厂印刷

开本:850mm×1168mm　1/32　印张:10.25　字数:266 千字

2002 年 7 月第 1 版第 2 次印刷

定价:15.00 元

修订说明

图论是组合数学的一个分支，与其他的数学分支，如群论、矩阵论、概率论、拓扑学、数值分析等有着密切的联系。凡有二元关系的系统，图论均可提供一种数学模型，因而它在许多科学领域中具有越来越重要的地位。图论在计算机科学、运筹学、电网络分析、化学、物理以及社会科学等方面都已取得丰硕的成果。同时，图论的理论与方法又能对数学竞赛、数学建模等起指导作用，因此在本书大部分章节后面介绍了许多应用实例，读者可以从中掌握利用图论解决实际问题的基本方法和技巧。目前，图论已成为计算机科学、运筹学、组合优化、机电等学科的基本课程之一。国内许多高校不仅在数学系的本科生中开设了图论课程，也开设了面向其他专业的图论选修课程。

本书是在宋增民编著的《图论与网络最优化》和卜月华编写的《图论及其应用》的基础上，结合本科生的特点和几年来的教学实践，由卜月华、顾国华、吴建专和殷翔重新编写而成。全书共分九章，不仅涉及图论的基本理论，还力求突出图论方法的应用，尤其是在数学竞赛和数学建模中的应用。本书适合于作为高等院校各专业图论课程的教材或参考书，也可作为大学数学建模集训的参考读物。

在本书的编写过程中，作者参阅了国内外许多优秀的图论专

著及教材。本书的出版也得到许多人的支持和帮助。在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,在编写过程中对内容虽经反复推敲与修改,但不可避免存在一些错误与疏漏,欢迎读者不吝赐玉提出宝贵意见。

编　者

2002 年 6 月

目　　录

1 图的基本概念

1.1 图论发展史

图论是一门应用十分广泛其内容非常丰富的数学分支，是近年来较为活跃的数学分支之一。它起源很早，瑞士数学家欧拉(L.Euler)在1736年解决了当时颇为有名的一个数学难题，即哥尼斯城堡七桥问题，从而使他成了图论和拓扑学的创始人。哥尼斯城堡位于前苏联的加里宁格勒，历史上曾是德国东普鲁士省的省会，普雷格尔河横穿城堡，河中有两个小岛 A 与 D，并有七座桥连接岛与河岸及岛与岛(见图1.1)。当地居民提出是否存在一种走法，要从这四块陆地中的任意一块开始，通过每一座桥恰好一次再回到起点。

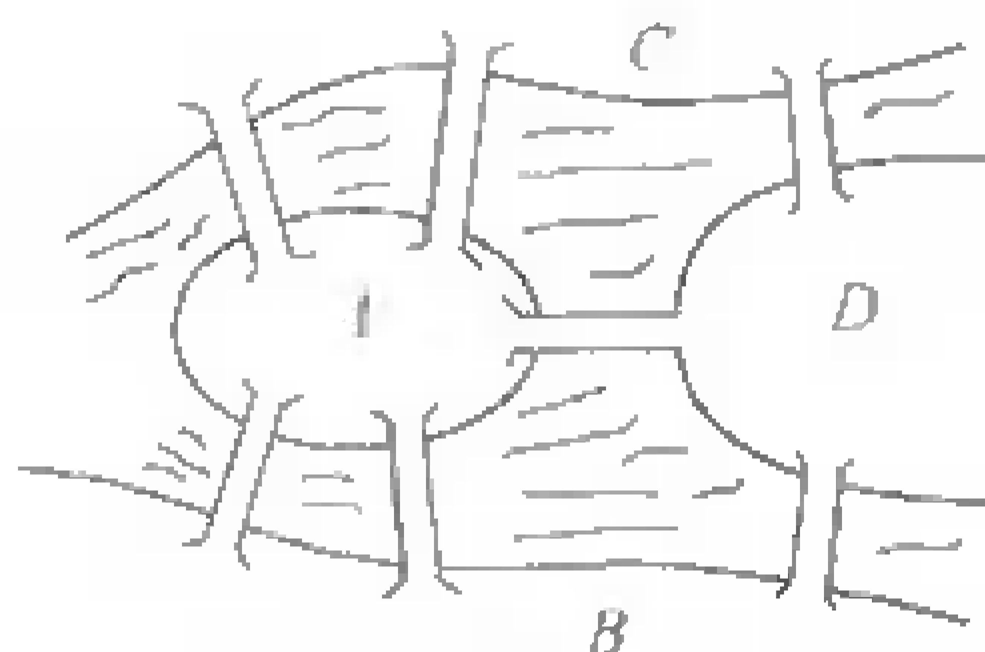


图 1.1

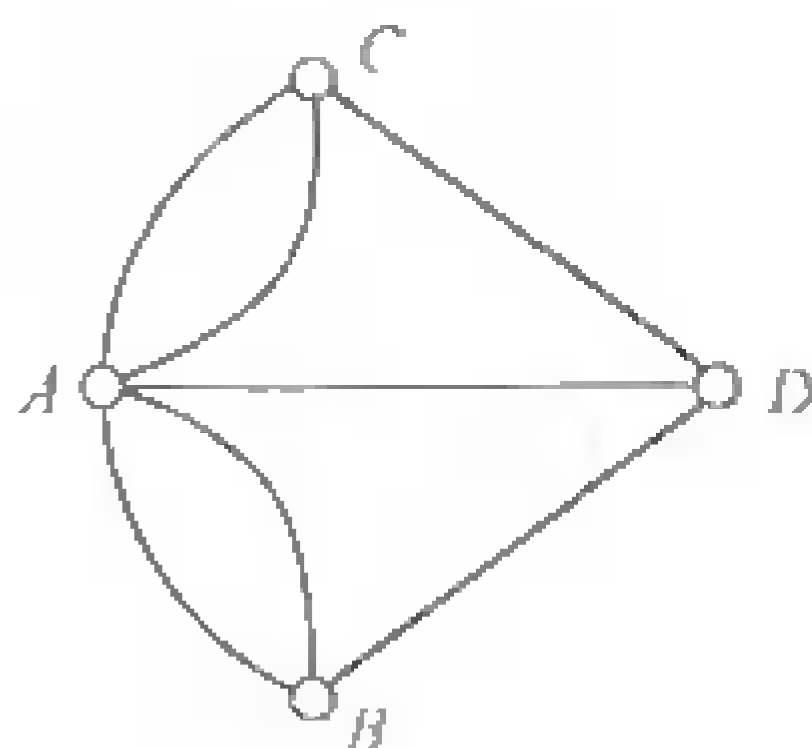


图 1.2

欧拉为了解决这七桥问题，他把这问题转化为一个数学问题来解决。他认为这种走法是否存在与两岸和两个岛的大小形状及桥的长短、曲直都没有关系，重要的是两块陆地之间有几座桥连

接。所以他用一个点表示一块陆地的区域，用连接相应顶点的线段表示各座桥，这样就得出图 1.2 所示的图。问题就转化为：在这个图中，是否能从某一点出发经过每条线段恰好一次再回到出发点。欧拉在 1736 年论证了在这个图中，如此走法是不存在的，并且推广了这个问题，对于一个给定的图可以如此走遍给出了一个判别法则。

基尔霍夫(Kirchhoff)在 1847 年运用图论解决了电路理论中求解联立方程的问题，他引进了"树"的概念。可惜的是他的发展超越了时代而长期未被重视。1857 年凯莱(Cayley)非常自然地在有机化学的领域里发现了一族重要的图，称为树，他应用树来计算饱和氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构体的数目。

早期的图论与数学游戏发生密切联系。如哈密尔顿(W. R. Hamilton)的周游世界问题。他用一个正十二面体(具有十二个五边形的面和二十个顶点)的二十个顶点表示世界上的二十座大城市(见图 1.3)，提出的问题是要求游戏者找一条沿十二面体的棱通过每个顶点恰好一次的闭路。图 1.3 所示的 $a, b, \cdots, s, t, a$ 表示出了这样的一条闭路。

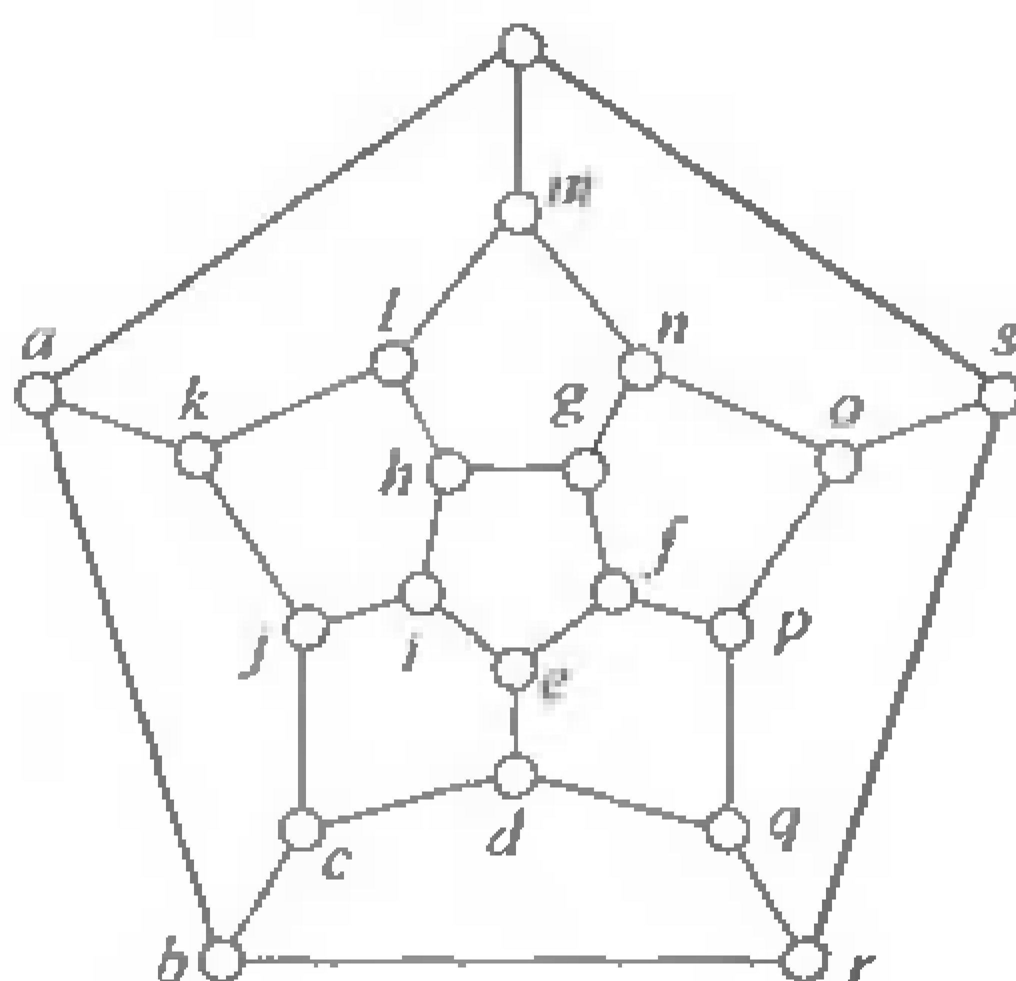


图 1.3

20 世纪后，图论的应用渗透到许多其他学科领域，如物理、化学、信息学、运筹学、博奕论、计算机网络、社会学、语言学，以及集合论、矩阵论等。从 20 世纪 50 年代以后，由于计算机的迅速发展，有力地推动了图论的发展，使图论成为数学领域中发展最快的分支之一。

图论是组合数学的一分支，与其他的数学分支，如群论、矩阵论、概率论、拓扑学、数值分析有着密切的联系。对于基础图论来说，它不要求有高深的数学工具。读者只要学过集合论和线性代数的基本概念，便可学习本书的内容。因此对年轻的数学爱好者来说，图论是他们极好的研究园地。

1.2 图的定义

我们这里所讨论的图并不是几何学中的图形，而是客观世界中某些具体事物间联系的一个数学抽象(如在 1.1 中所提到的欧拉把七桥问题转化为有四个点、七条线段的这种图)，用顶点(小圆点)代表事物，用边表示各事物间的二元关系，如果所讨论的事物之间有某种二元关系，我们就把相应的顶点连成一条边。这种由顶点及连接这些顶点的边所组成的图就是我们图论中所研究的图。

例 1 在一次集会中有五位代表 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，其中 x_2 与 x_1，x_1 与 x_5，x_2 与 x_5，x_3 与 x_4，x_4 与 x_5 是朋友，则我们可以用一个带有五个顶点、五条边的图形来表示这五位代表间的朋友关系(见图 1.4)。

值得注意的是图 1.4 中，两条边 e_3 与 e_5 有一个交叉点，但这个点并不是我们所研究的顶点，只是两条边的交叉点。下面我们给图下一个明确的数学定义。

定义 1.2.1 设 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ 是一个非空有限集合，$E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$ 是与 $V(G)$ 不相交的有限集合。一个

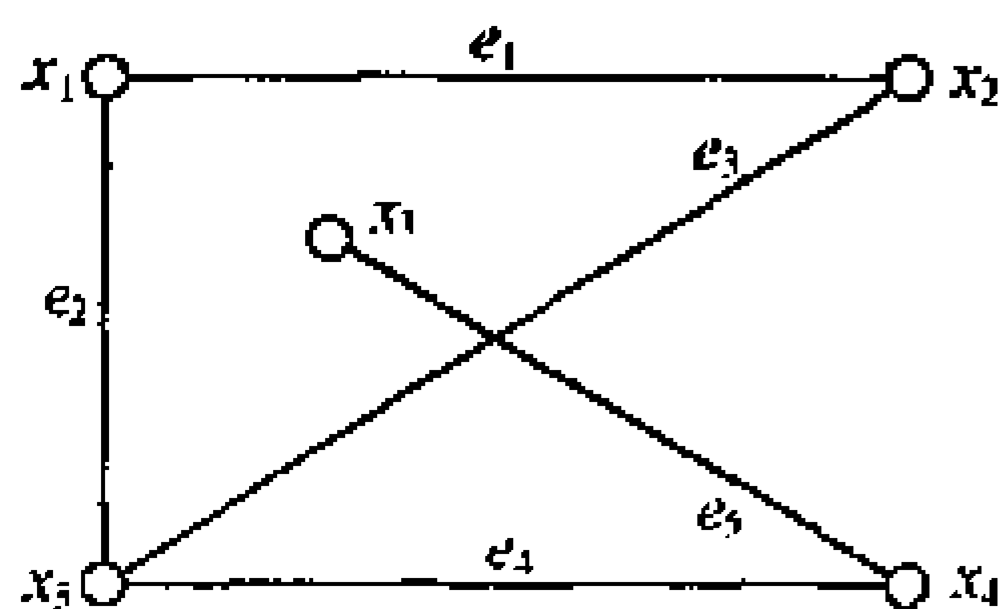


图 1.4

图 G 是指一个有序三元组$(V(G),E(G),\psi_G)$,其中 ψ_G 是关联函数,它使 $E(G)$ 中每一元素对应于 $V(G)$ 中的无序元素对(可以相同)。

如例 1 中五位代表之间的朋友关系所对应的图为:$G=(V(G),E(G),\psi_G)$,其中 $V(G)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$,$\psi_G(e_1)=x_1x_2$,$\psi_G(e_2)=x_1x_5$,$\psi_G(e_3)=x_2x_5$,$\psi_G(e_4)=x_4x_5$,$\psi_G(e_5)=x_3x_4$。

图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 中,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别称为 G 的顶点集合和边集合。$V(G)$ 中的元素称为 G 的顶点(或点),$E(G)$ 中的元素称为 G 的边。$p(G)=|V(G)|$ 和 $q(G)=|E(G)|$ 分别称为图 G 的点数(或阶)和边数。

一个图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 可以用平面上一个图形表示;用平面上的小圆圈表示图 G 的顶点,用点与点之间的连线表示 G 中的边。图的图形表示使得抽象定义的图具有直观性,有助于我们进行思考和理解图的性质。明显地,同一个图可以有许多形状不同的图形表示。

例 2 图$G=(V(G),E(G),\psi_G)$,其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$,$\psi_G(e_1)=v_1v_1$,$\psi_G(e_2)=v_1v_2$,$\psi_G(e_3)=v_2v_3$,$\psi_G(e_4)=v_2v_3$,$\psi_G(e_5)=v_3v_4$,$\psi_G(e_6)=v_4v_1$。这个图 G 是具有 4 个顶点,6 条边的图。其图形如图 1.5 所示。

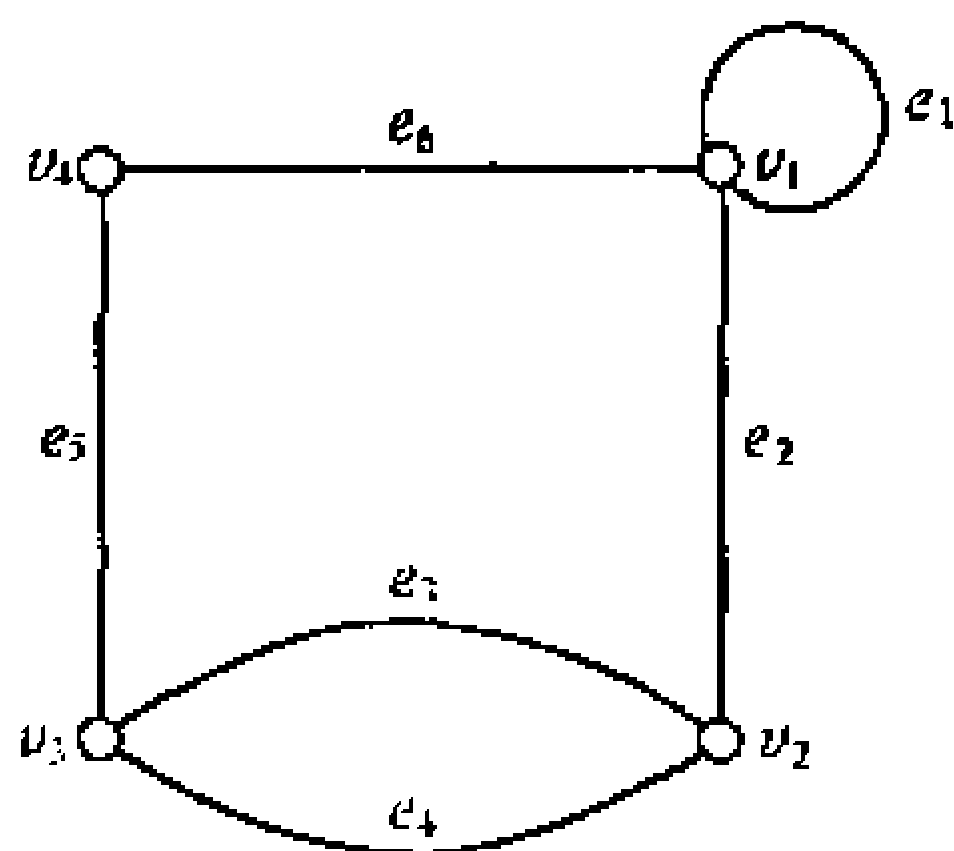


图 1.5

在一个图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 中,如果 $\psi_G(e)=uv$,我们就说边 e 连接顶点 u 和 v,称 u 和 v 是 e 的**端点**,也称 u 和 v **相邻**;同时也称 u(或 v) 与 e **关联**。与同一个顶点关联的若干条边称为是**相邻的**。两个端点重合为一个顶点的边称为**环**。如图 1.5 的边 $\psi_G(e_1)=v_1v_1$ 是 G 的一个环。关联于同一对顶点的二条或二条以上的边称为**多重边**。如图 1.5 中的两条边 $e_3(\psi_G(e_3)=v_2v_3)$ 和 $e_4(\psi_G(e_4)=v_2v_3)$ 是 G 的多重边。一个图 G 如果没有环和多重边,则称该图为**简单图**。如图 1.4 所示的图是一个简单图。

如果一个图 G 的顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 都是有限集,则称该图为**有限图**,否则称为**无限图**。本书仅讨论有限图。只有一个顶点所构成的图称为**平凡图**,其它所有图称为**非平凡图**。显然,至少有一个顶点才能称为图。所以我们总要求一个图的顶点集合是非空的。

通常我们将图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$,简记为 $G=(V(G),E(G))$ 或 $G=(V,E)$ 或 G。

从图的定义不难发现。我们所讨论的图与图的几何形状没有关系,即与顶点的位置(但两个不同的顶点不能重合)及连接它们的边的曲、直、长、短都没有关系(但一条边除了两个端点外,不再通过其它顶点)。我们所关注的只是各顶点之间是否有边或有几条

边连接。例如，图 1.4 也可以画成图 1.6 的形状。显然，这两个图都同样表明了这五位代表间的朋友关系。我们把这种不存在本质差别的两个图称为是同构的。

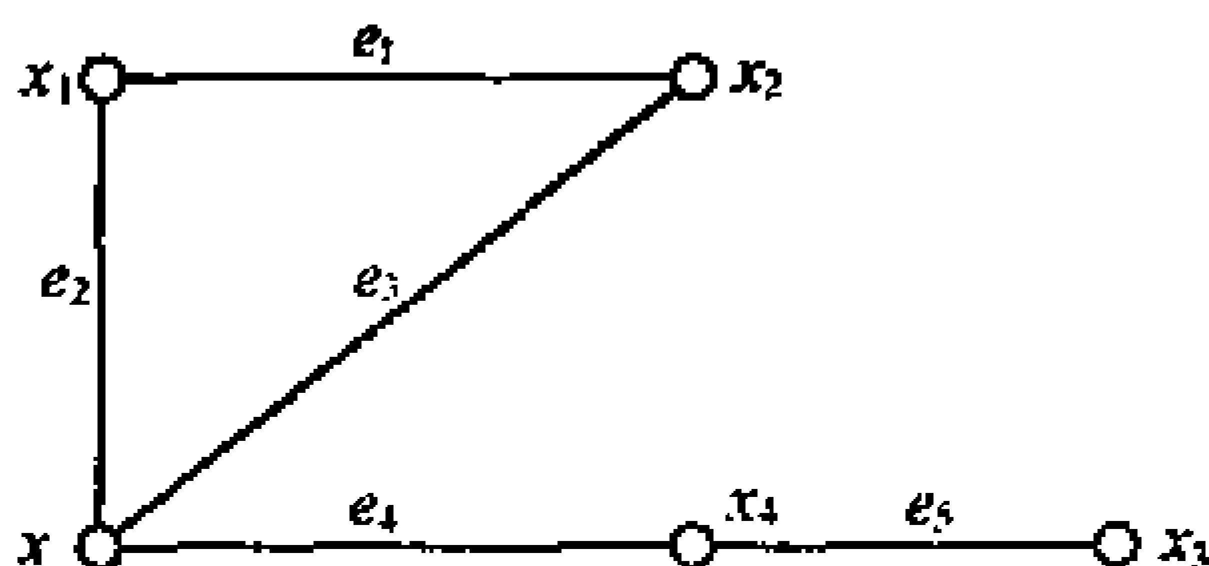


图 1.6

定义 1.2.2 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 与 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个图，若存在一一对应 $\varphi_1:V_1\to V_2$ 及一一对应 $\varphi_2:E_1\to E_2$，使对每条边 e，$e=uv\in E_1$ 当且仅当 $\varphi_2(e)=\varphi_1(u)\varphi_1(v)\in E_2$。则称 G_1 和 G_2 是同构的，记为 $G_1\cong G_2$。

对于两个简单图，其同构定义可简化为：

定义 1.2.3 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 与 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个简单图，若存在一一对应 $\varphi:V_1\to V_2$，使得对 G_1 中任意两个顶点 u 和 v，$uv\in E_1$ 当且仅当 $\varphi(u)\varphi(v)\in E_2$，则称 G_1 和 G_2 是同构的。记为 $G_1\overset{\varphi}{\cong}G_2$ 或 $G_1\cong G_2$。

到目前为止，判断两个图是否同构，还只能根据定义。也就是说，两个图是否同构还没有很简便的判别法。

例如，在图 1.7 所示的两个图 G_1 和 G_2 中，建立顶点之间的对应关系如下：

$\varphi: x_1\leftrightarrow v_1, x_2\leftrightarrow v_2, x_3\leftrightarrow v_3, y_1\leftrightarrow u_1, y_2\leftrightarrow u_2, y_3\leftrightarrow u_3$。

容易看出，G_1 中的三个顶点 x_1、x_2、x_3 互不相邻，y_1、y_2、y_3 互不相邻，而 $x_iy_j\in E(G_1)$，$i=1,2,3$，$j=1,2,3$。在 φ 对应下，G_2 中的三个顶点 v_1、v_2、v_3 互不相邻，u_1、u_2、u_3 互不相邻。而 $v_iu_j=\varphi(x_i)\varphi(y_j)\in E(G_2)$，$i=1,2,3$，$j=1,2,3$。由图的同构

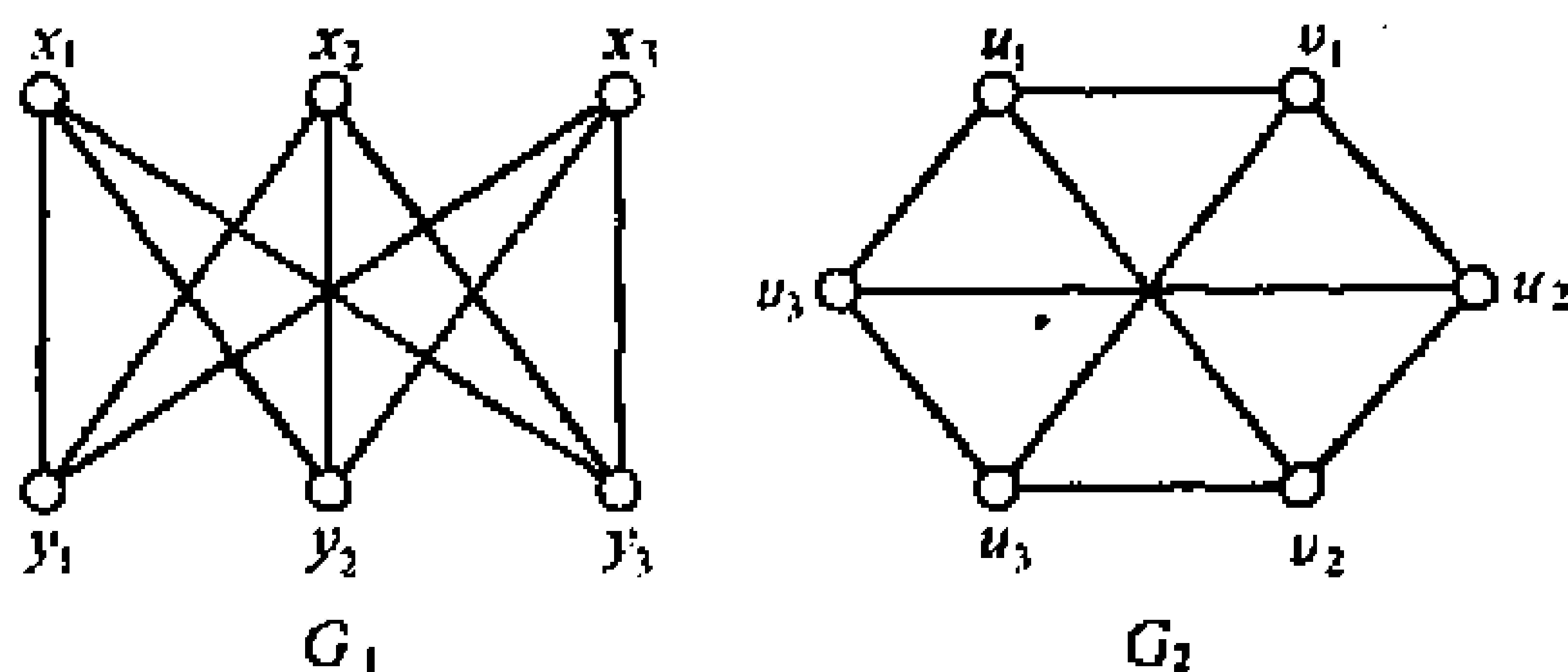


图 1.7

定义，$G_1 \cong G_2$。

对于两个同构的图，易见它们有相同的结构，差异只是顶点和边的名称不同，或两个图的形状不同，由于我们主要关注的是图的结构性质，所以在画图时常常省略顶点和边的标号；一个无标号图就认为是同构图的等价类的代表。

通过前面的讨论可发现一个图实质上给出了顶点之间的一种二元关系。因而在客观世界中，一些事物间若带有某种二元关系，就可以用一个图来描述这些事物之间的相互关系。像人与人之间的朋友关系、同学关系、相互认识关系等均可用一个图来描述。一般情况下，用图的顶点表示某个问题中所讨论的主要的对象，而边表示这些对象之间主要的二元关系，所构成的图就表述了这些对象之间的二元关系，我们就可以通过对该图的讨论去解决相应的问题。但上面所能描述的关系只能是具有对称性的二元关系。而在现实生活中，有许多关系是非对称性的。如认识关系，甲认识乙并不意味着乙认识甲。在处理交通流问题时，会碰到单行道路。像这些就不能简单地用前面所讨论的图来表示。为此引进有向图的概念。

定义 1.2.4 设 $V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_q\}$ 是一个非空有限集合，$A(D) = \{a_1, a_2, \cdots, a_q\}$ 是与 $V(D)$ 不相交的有限集合。一个**有向图** D 是指一个有序三元组 $(V(D), A(D), \psi_D)$，其中 ψ_D 是关联函数，它使 $A(D)$ 中的每一元素（称为边或弧）对应于 $V(D)$ 中

的有序元素(称为顶点或点)对(可以相同)。若 a 是一条弧,而 u 和 v 是使得 $\psi_D(a) = (u,v)(\neq (v,u))$ 的顶点,则称 a 从 u 指向 v;称 u 是 a 的起点,v 是 a 的终点。简记为 $a = (u,v)$。在不引起混淆时,有时也可用 $uv(\neq vu)$ 表示 (u,v)。

对应于每个有向图 D,可以在有相同顶点集上作一个图 G_D,使得对应于 D 的每条弧,G_D 有一条与该弧有相同端点的边与之对应,这个图称为 D 的**基础图**。反之,给定任意图 G,对于它的每条边,给其端点指定一个顺序,从而确定一条弧,由此得到一个有向图,这样的有向图称为 G 的一个**定向图**,记为 $\vec{G}$。一般情况下,$\vec{G}$ 是不惟一的。

给定一个图 $G = (V,E)$,可以在有相同顶点集上作一个有向图 $D(G)$:使对应于 G 中每一条边 uv,$D(G)$ 中有两条方向相反的弧 (u,v) 及 (v,u) 与之对应。$D(G)$ 称为 G 的**对称有向图**。$D(G)$ 中的一些性质、结论可自动地转化为 G 中相应的性质、结论。

和图一样,有向图也有简单的图形表示。一个有向图可以用它的基础图连同它的边上的箭头所组成的图形来表示。图 1.8 表示一个有向图 D 和它的基础图。

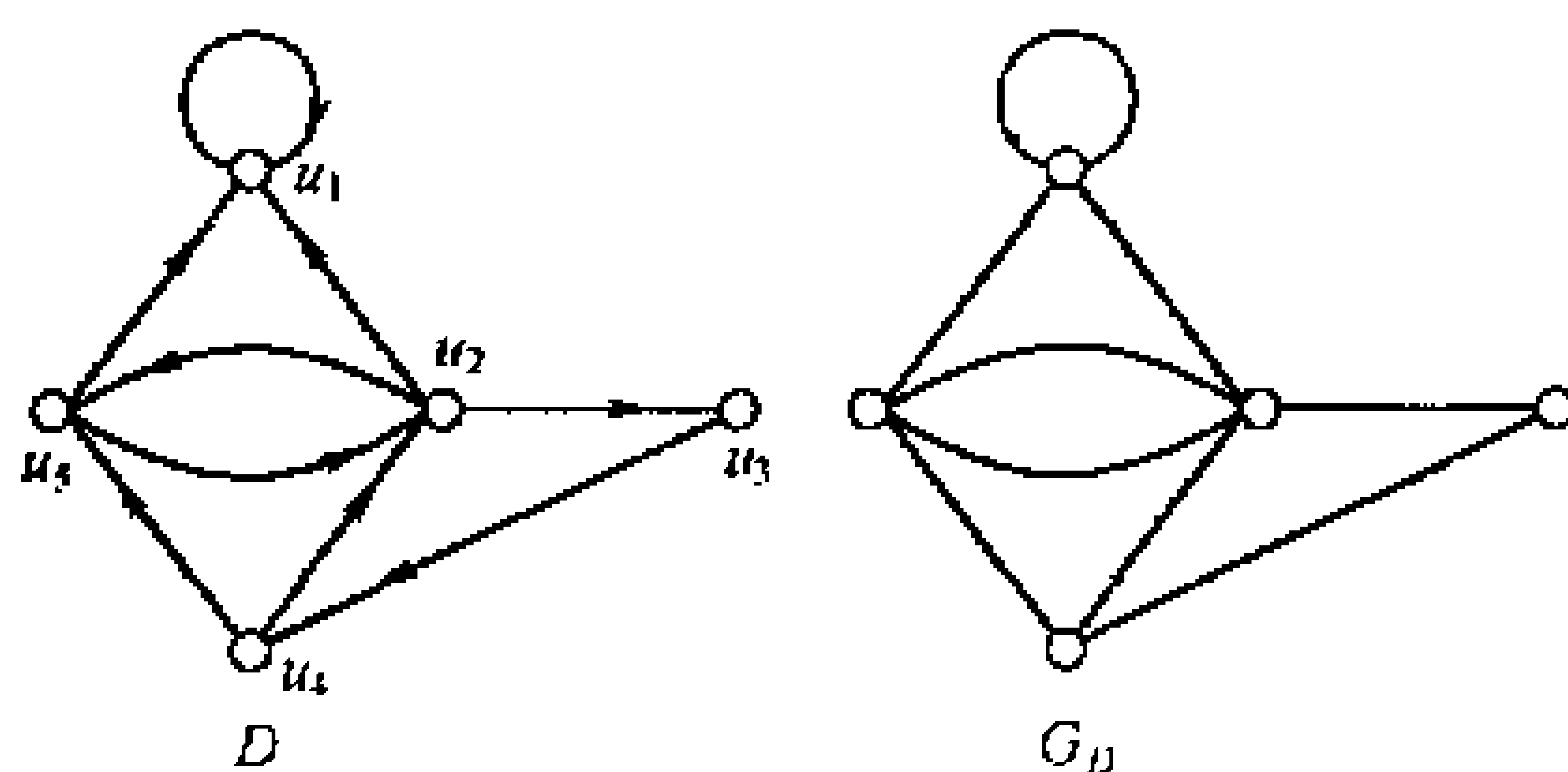


图 1.8

前面一些关于图的概念(点与边等关系)可以自动地应用于

有向图。和简单图相应的，称一个有向图是**严格**的，如果它没有环，且任意两条弧都不同时具有相同的起点和终点。

本书后面的讨论中，在没有特殊说明的情况下，所指的图一般为无向图。我们很容易地能把无向图中某些概念推广到有向图中。

1.3 顶点的度

定义 1.3.1 图 $G=(V,E)$ 中，与顶点 v 相关联的边数(每个环计算二次)，称为顶点 v 的**度**，记为 $d_G(v)$(或 $d(v)$)。分别用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 表示 G 中顶点的最小度和最大度。度为零的顶点称为**弧立顶点**。

例如，图 1.8 中 $d_G(u_1)=4, d_G(u_2)=5, d_G(u_3)=2, d_G(u_4)=3, d_G(u_5)=4, \delta_G=2, \Delta(G)=5$。

如果 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，称非负整数序列 $(d(v_1), d(v_2),\cdots,d(v_p))$ 为图 G 的**度序列**。

例如，图 1.8 所示的图 G 的度序列为(4,5,2,3,4)。

设 S 是 $V(G)$ 的一个非空子集，v 是 G 的任一顶点，称

$$N_S(v)=\{u \mid u\in S, uv\in E(G)\}$$

为 v 在 S 中的**邻域**。特别若 $S=V(G)$，则常常简记 $N_G(v)$ 为 $N(v)$。明显地，当 G 是简单图时，$d_G(v)=|N(v)|$。

定义 1.3.2 如果一个图中每个顶点的度是某一固定整数 k，则称该图是 **k 正则图**。

例如，图 1.9 所示的 H_1 与 H_2 分别是 3 正则图和 1 正则图。

从顶点度的定义不难发现，由于每条边有两个端点，从而每条边对 $\sum\limits_{v\in V(G)} d_G(v)$ 的贡献是 2。因而可得以下结论：

定理 1.3.1 对每一个图 $G=(V,E)$，均有

$$\sum_{v\in V} d_G(v)=2q(G)$$

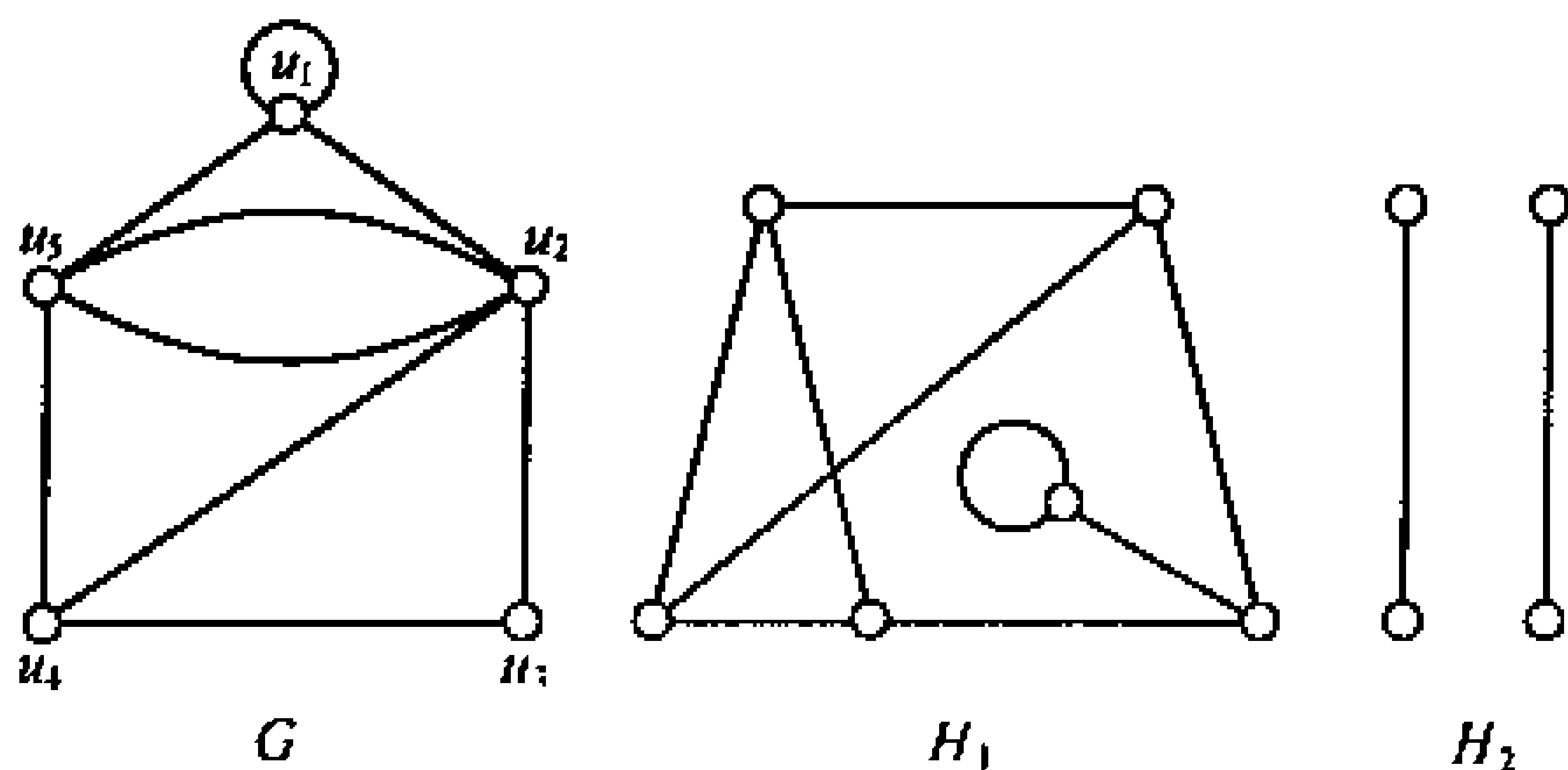


图 1.9

为了方便起见,我们把度为奇数的顶点称为奇点,度为偶数的顶点称为偶点。

推论 1.3.2 在任何图 $G=(V,E)$ 中,奇点的个数为偶数。

证明 我们把图 G 的顶点集 V 划分为两部分 V_1 和 V_2,其中 V_1 是 G 中所有的奇点,V_2 是 G 中所有偶点。则 $V=V_1\cup V_2$,$V_1\cap V_2=\varnothing$,由定理 1.3.1 得

$$2q(G)=\sum_{v\in V}d_G(v)=\sum_{v\in V_1}d_G(v)+\sum_{v\in V_2}d_G(v)$$

而 $\sum\limits_{v\in V_2}d_G(v)$ 是偶数,所以 $\sum\limits_{v\in V_1}d_G(v)$ 也是一个偶数,即推得 $|V_1|$ 是偶数。 证毕。

推论 1.3.3 非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$是某个图的度序列当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{p}d_i$ 是偶数。

证明 由定理1.3.1可知必要性成立。对于充分性,取 p 个相异顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$,若 d_i 是偶数,就在 v_i 处作$d_i/2$个环;若 d_i 是奇数,在 v_i 处作$(d_i-1)/2$个环。由于$\sum\limits_{i=1}^{p}d_i$ 为偶数,故 $d_1,d_2,\cdots,d_p$ 中有偶数个奇数项,从而将所有与奇数 d_i 相对应的这些顶点 v_i

两两配对并连上一条边。最后所得图的度序列就是$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$。 证毕。

需要注意的是，以非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$（$\sum_{i=1}^{p}d_i$是偶数）为度序列的图一般有很多。

例如，图1.10所示的G_1与G_2的度序列均是(7,3,1,4,6,5)。

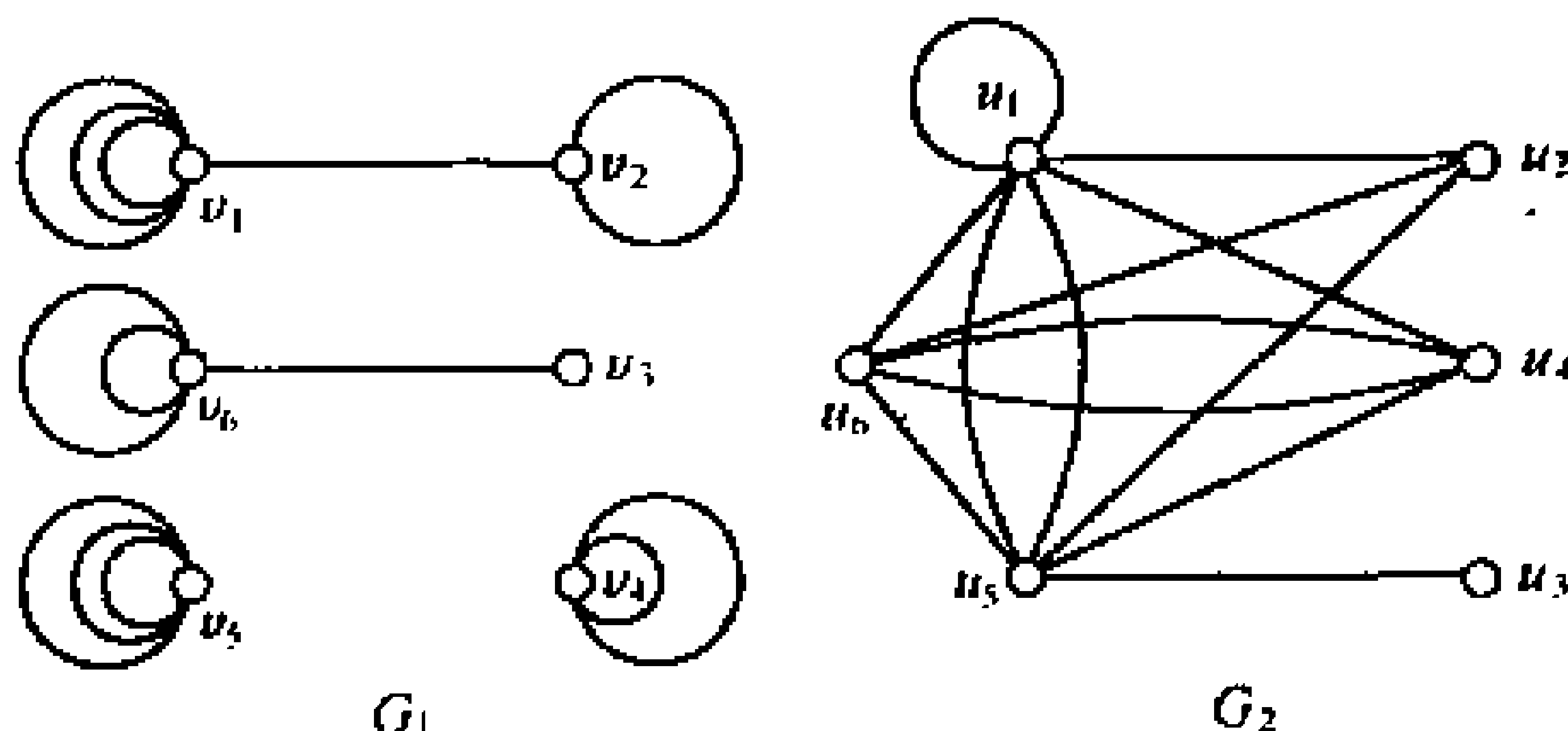


图1.10

简单图的度序列称为图序列，图序列的讨论或判断要比度序列的讨论困难得多。即使知道非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$是图序列，要构造相应的简单图仍是相当困难的。

Erdös和Callai在1960年给出了图序列的一个判别方法。

定理1.3.4 非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)(d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p)$是图序列当且仅当$\sum_{i=1}^{p}d_i$是偶数，并且对一切整数$k$，$1\leqslant k\leqslant p-1$，有

$$\sum_{i=1}^{k}d_i\leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{p}\min\{k,d_i\}$$

证明略。

对于有向图$D=(V,A)$，也有类似的一些概念及性质。

定义1.3.3 有向图D中，一个顶点u的出度$d_D^+(u)$是指以

u 为起点的弧的数目。u 的入度 $d_D^-(u)$ 是指以 u 为终点的弧的数目。$d_D^+(u)+d_D^-(u)=d_D(u)$ 表示 u 的度数。

$$\delta^+(D)=\min\{d_D^+(u)\mid u\in V(D)\}$$

$$\delta^-(D)=\min\{d_D^-(u)\mid u\in V(D)\}$$

$$\Delta^+(D)=\max\{d_D^+(u)\mid u\in V(D)\}$$

$$\Delta^-(D)=\max\{d_D^-(u)\mid u\in V(D)\}$$

分别称为 D 的最小出度、最小入度、最大出度和最大入度。

由于每一条弧恰有一个起点和一个终点。故有：

定理 1.3.5 对每一个有向图 $D=(V,A)$，有

$$\sum_{u\in V(D)}d_D^+(u)=\sum_{u\in V(D)}d_D^-(u)=|A|$$

下面我们给出几个例子，作为上述定理或推论的应用。

例 1 在平面上有 n 个点 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中任两个点之间的距离至少是 1。证明在这 n 个点中，距离为 1 的点对数不超过 $3n$。

证明 首先建立一个图 $G=(V,E)$，其中 V 就取 S 中的 n 个点，V 中的两个顶点有边连接且当仅当这两点之间的距离恰好为 1。则所得图 G 是一个简单图，S 中距离为 1 的点对数就是 G 的边数。因此我们只需证明 $q(G)\leqslant 3n$。

我们考虑 G 中每个顶点的度，可以证明：$d_G(x_i)\leqslant 6$，$i=1,2,\cdots,n$。

假设 $x_i\in V$，G 中与 x_i 相邻的顶点为 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$（$k=d_G(x_i)$）。则 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$ 分布在以 x_i 为圆心的单位圆周上。所以 $k\leqslant 6$，即 $d_G(x_i)\leqslant 6$，$i=1,2,\cdots,n$。现由定理 1.3.1 得

$$2q(G)=\sum_{i=1}^{n}d_G(x_i)\leqslant 6n$$

故

$$q(G)\leqslant 3n$$

例 2 在某次会议中有 n 人参加，其中有些人互相认识，但每两个互相认识的人，都没有共同的熟人，每两个互不认识的人都恰好有两个共同的熟人。证明每一个参加者都有同样数目的熟人。

证明 作图 $G=(V,E)$，V 中有 n 个顶点，分别代表参加会议的 n 名代表。V 中两个顶点相邻当且仅当这两个顶点所对应的代表互相认识。则只要证明 G 是一个正则图。

根据题意，如此构造的图 G 满足以下两条：

(1) 若 x 与 y 在 G 中相邻，则不存在 $u\in V$，使 ux 与 uy 均是 G 中的边；

(2) 若 x 与 y 在 G 中不相邻，则恰好存在两个不同于 x 和 y 的顶点 u 与 v，使 $\{ux,uy,vx,vy\}\subseteq E(G)$，并根据 (1)，$uv\overline{\in}E(G)$。

现对 G 的任意一个顶点 x，记 $d_G(x)=k$，并设 G 中 x 的领域为

$$N_G(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$$

由 (1)，对 $1\leqslant i\neq j\leqslant k$，$x_i$ 与 x_j 不相邻，再由 (2)，G 中存在不同于 x 的一个顶点 y_{ij}，使 y_{ij} 分别与 x_i 和 x_j 相邻，而 x 与 y_{ij} 不相邻。明显地，当 $\{i,j\}\neq\{s,t\}$ 时，$y_{ij}\neq y_{st}$。（参见图 1.11）。这类顶点 $y_{ij}(1\leqslant i\neq j\leqslant k)$ 共有 $C_k^2=\dfrac{k(k-1)}{2}$ 个，即 G 中至少有 C_k^2 个顶点与 x 不相邻。

另一方面，若还有不同于 $y_{ij}(1\leqslant i\neq j\leqslant k)$ 的顶点 y 与 x 不相邻，则由 (2)，存在两个顶点 u 与 v，它们都与 x 和 y 相邻，因而 u、$v\in N_G(x)$，也即存在 $1\leqslant i_0\neq j_0\leqslant k$，使 $u=x_{i_0}$，$y=x_{j_0}$，由上可知 $y=y_{i_0j_0}$，矛盾。

因此 G 中与 x 不相邻的顶点只能是 $\{y_{ij}\mid 1\leqslant i\neq j\leqslant k\}$。所以

$$V=\{x\}\cup N_G(x)\cup\{y_{ij}\mid 1\leqslant i\neq j\leqslant k\}$$

即得

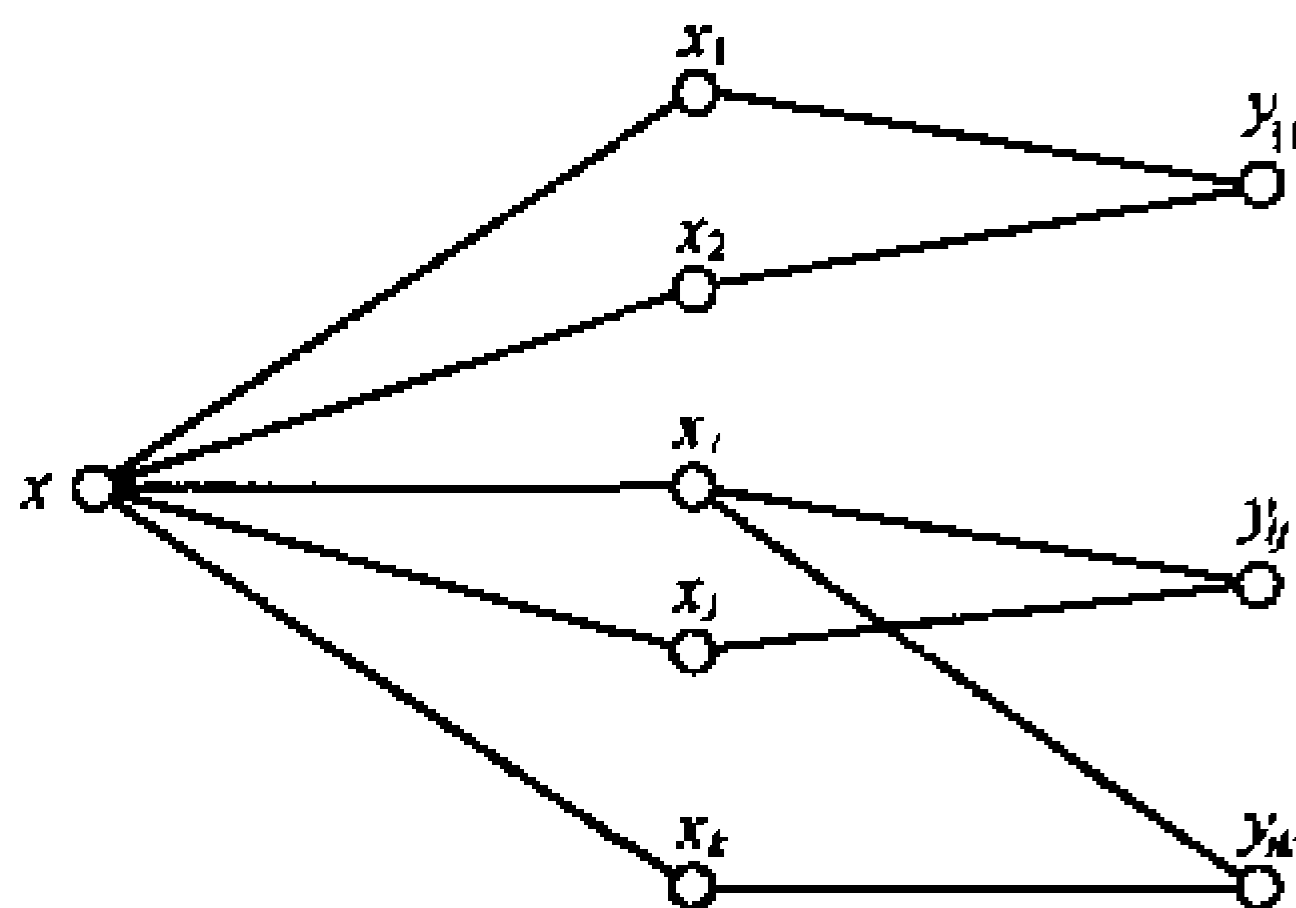


图 1.11

$$n = 1 + k + \frac{k(k-1)}{2}$$

或

$$\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k - (n-1) = 0$$

因此 k 是方程

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - (n-1) = 0 \tag{1}$$

的一个正根。由顶点 x 的任意性，即得 G 中每一个顶点的度都是方程(1) 的正根。

但此方程只有一个正根 $\frac{\sqrt{1+8(n-1)}-1}{2}$，所以 G 中每个顶点的度是

$$k = \frac{\sqrt{1+8(n-1)}-1}{2}$$

所以 G 是正则图。

注：从证明过程可知，并不是对所有的自然数 n 都存在满足上述条件的图。

例 3　证明每个碳氢化合物的分子所含的氢原子数是偶数。

证明　因为每个碳氢化合物的分子由氢与碳原子组成，其原

子价分别为 1 价与 4 价。让每个原子对应于图的一个顶点，如果两个原子是连接着的，那么对应的两个顶点就相邻。如图 1.12 所示的丙烷 C_3H_8 对应于图 G，在这个图中，对应于碳与氢原子的顶点的度分别是 4 与 1，所以氢原子的个数是偶数。

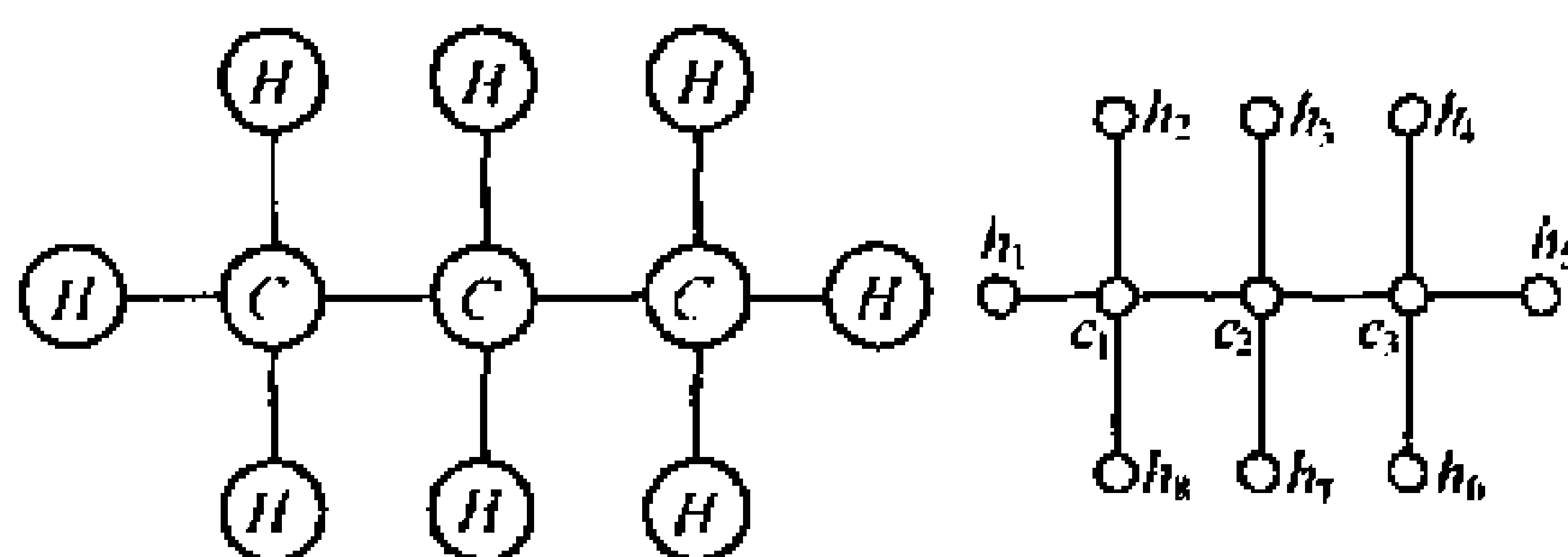


图 1.12

例 4 在一次围棋擂台赛中，双方各出 n 名选手。比赛的规则是双方先各自排定一个次序，设甲方排定的次序为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，乙方排定的次序为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。x_1 与 y_1 先比赛，胜的一位与对方输的下一位选手比赛。按这种方法进行比赛，直到有一方的最后一位选手出场比赛并且输给对方，比赛就结束。问最多进行几场比赛可定其胜负（假定比赛不出现平局）。

解 选建立一个有向图 $D = (V, A)$，$V = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，如果 x_i 与 y_j 进行过一场比赛，就在 x_i 与 y_j 之间连一条弧，其方向从胜者指向负者。则 D 的每一条弧对应一场比赛，D 中弧的数目就是这次比赛的次数。根据比赛规则，每一名选手至多输一场，所以 D 中每个顶点的入度至多为 1，但 x_n 与 y_n 必有一个入度为 1，另一个为 0。由定理 1.3.5，得

$$|A| = \sum_{i=1}^{n}(d_{\bar{D}}(x_i) + d_{\bar{D}}(y_i)) \leqslant 2n - 1$$

即至多进行 $2n - 1$ 场比赛就可以确定胜负。

1.4 子图与图的运算

在研究和描述图的性质以及图的局部结构中，子图的概念是必不可少的。

定义 1.4.1 $G=(V,E)$ 和 $H=(V',E')$ 是两个图，如果 $V'\subseteq V$ 和 $E'\subseteq E$，则称 H 是 G 的子图，记为 $H\subseteq G$。

例如，图 1.13 中，H_1、H_2 和 H_3 都是 G 的子图，H_1 称为是 G 的三角形子图。

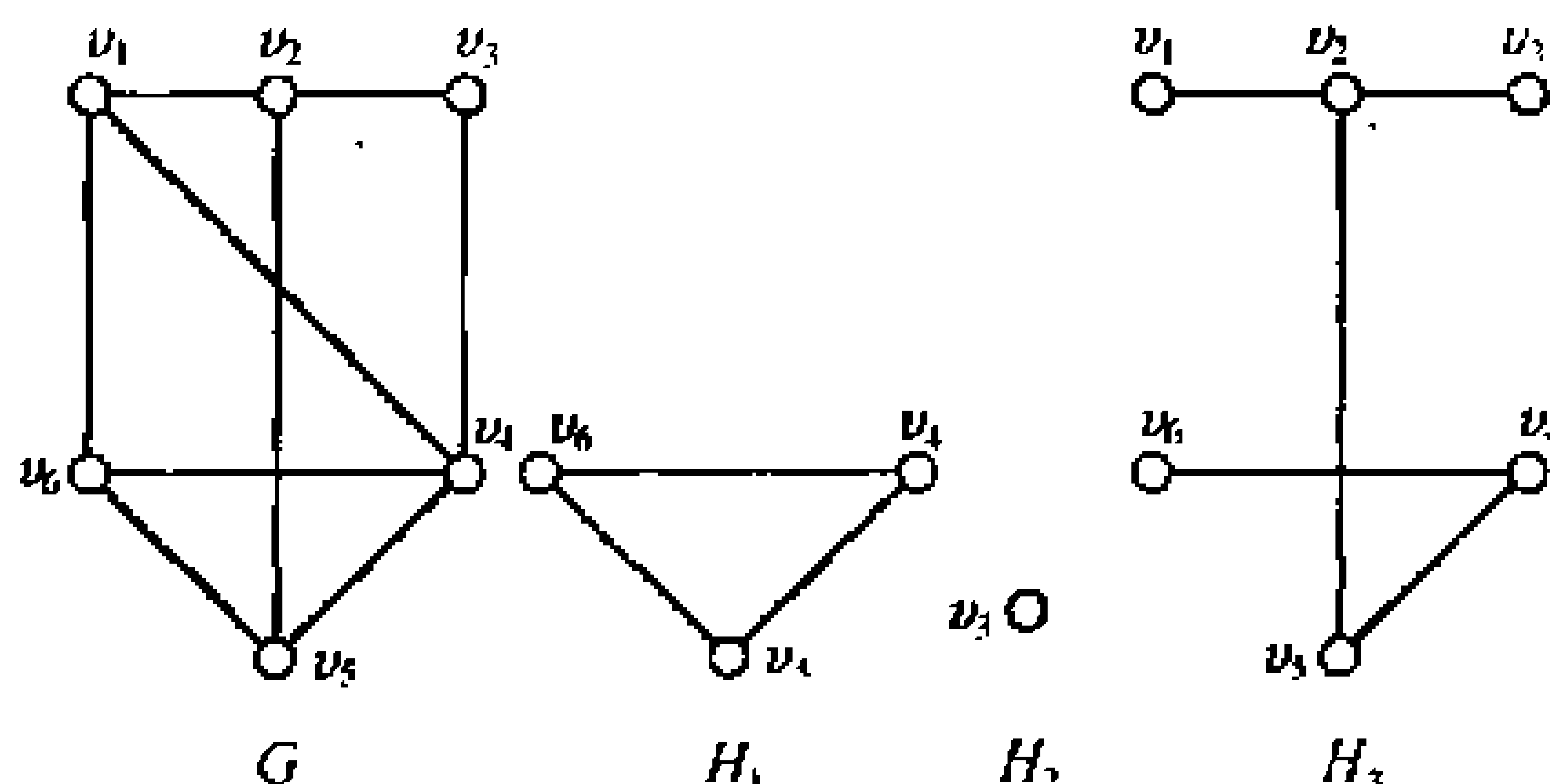


图 1.13

如果 H 是 G 的子图，并且 $V(H)=V(G)$，则称 H 是 G 的生成子图。图 1.13 中的 H_3 就是 G 的一个**生成子图**。

如果 H 是 G 的子图，其中 $V(H)=V(G)$ 和 $E(G)=E(H)$ 至少有一个不成立，就称 H 是 G 的**真子图**。

假设 V' 是 $V(G)$ 的一个非空真子集，则以 $G-V'$ 表示从 G 中删去 V' 内的所有顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图。若 $V'=\{v\}$，常把 $G-\{v\}$ 简记为 $G-v$。用 $G[V']$ 表示 $G-(V-V')$ 称为 G 的由 V' **导出的子图**。图 1.13 中，H_1 就是由 $\{v_4,v_5,v_6\}$ 导出的子图，即 $H_1=G[\{v_4,v_5,v_6\}]$。

关于边子集也有类似的定义。设 E' 是 $E(G)$ 的子集，以 $G-$

E' 表示在 G 中删去 E' 中所有的边所得到的子图。而在 G 中加上边集 $E''(E'' \cap E(G) = \varnothing)$ 内的所有边所得的图记为 $G + E''$。同样用 $G - e$(或 $G + f, f \notin E(G)$) 表示 $G - \{e\}$(或 $G + \{f\}$)。用 $G[E']$ 表示以 E' 为边集,以 E' 内的边的端点为顶点集合所构成的图,称为 G 的由 E' 导出的子图。

图 1.14 画出了各种不同类型的边子图。

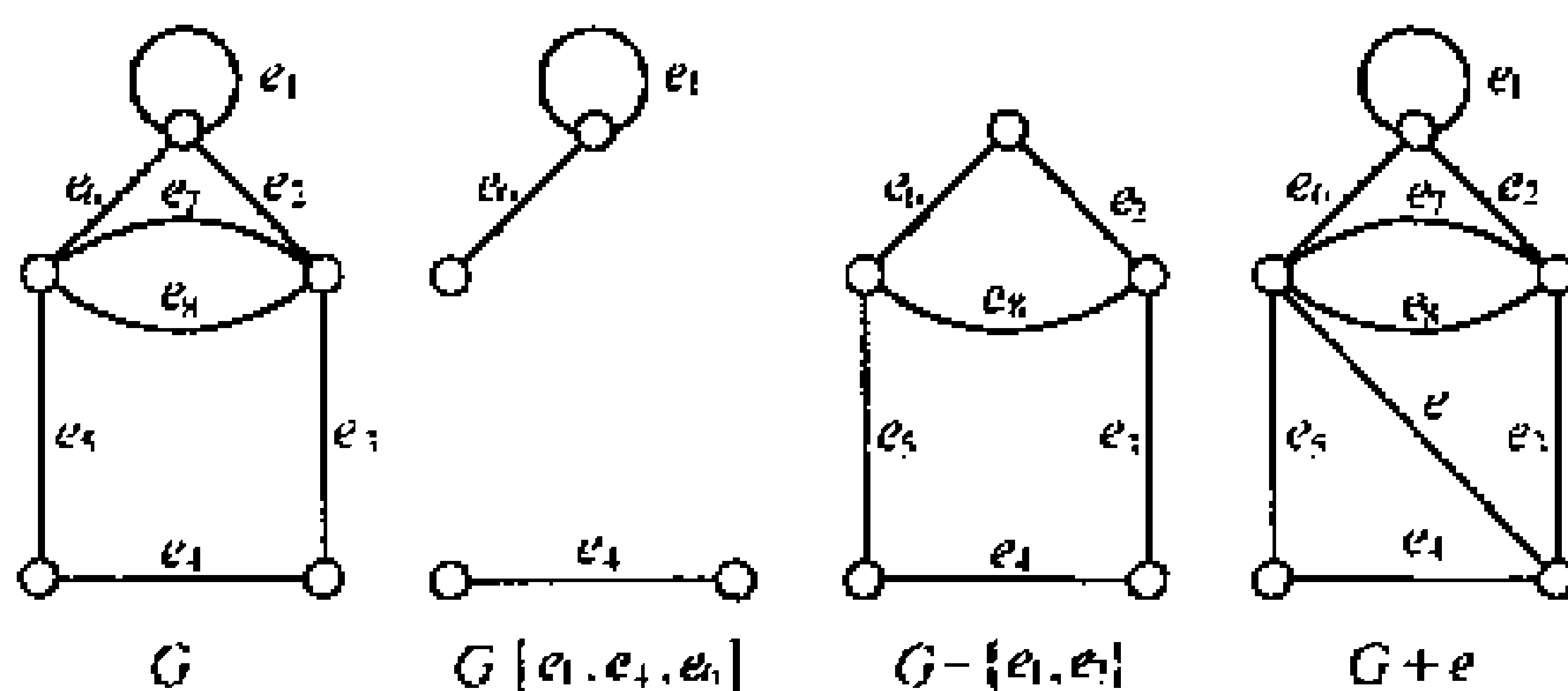


图 1.14

从图 G 中删去所有的环,并使每一对相邻的顶点只留下一条边,即可得 G 的一个生成子图,称为 G 的**基础简单图**。图 1.14 中的 $G - \{e_1, e_7\}$ 就是 G 的一个基础简单图。

简单图 G 的补图 G^c 是指和 G 有相同顶点集 V 的一个简单图,G^c 中的两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻。图 1.15 中,G^c 是 G 的补图。

设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图,若 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$,则称 G_1 与 G_2 是不相交的;若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$,则称 G_1 与 G_2 **边不重的**。

$G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个不相交的图,定义 $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$,这里 $E_3 = \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}$,称 $G_1 + G_2$ 为 G_1 和 G_2 的和。

对于两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$,定义 $G_1 \cup G_2$

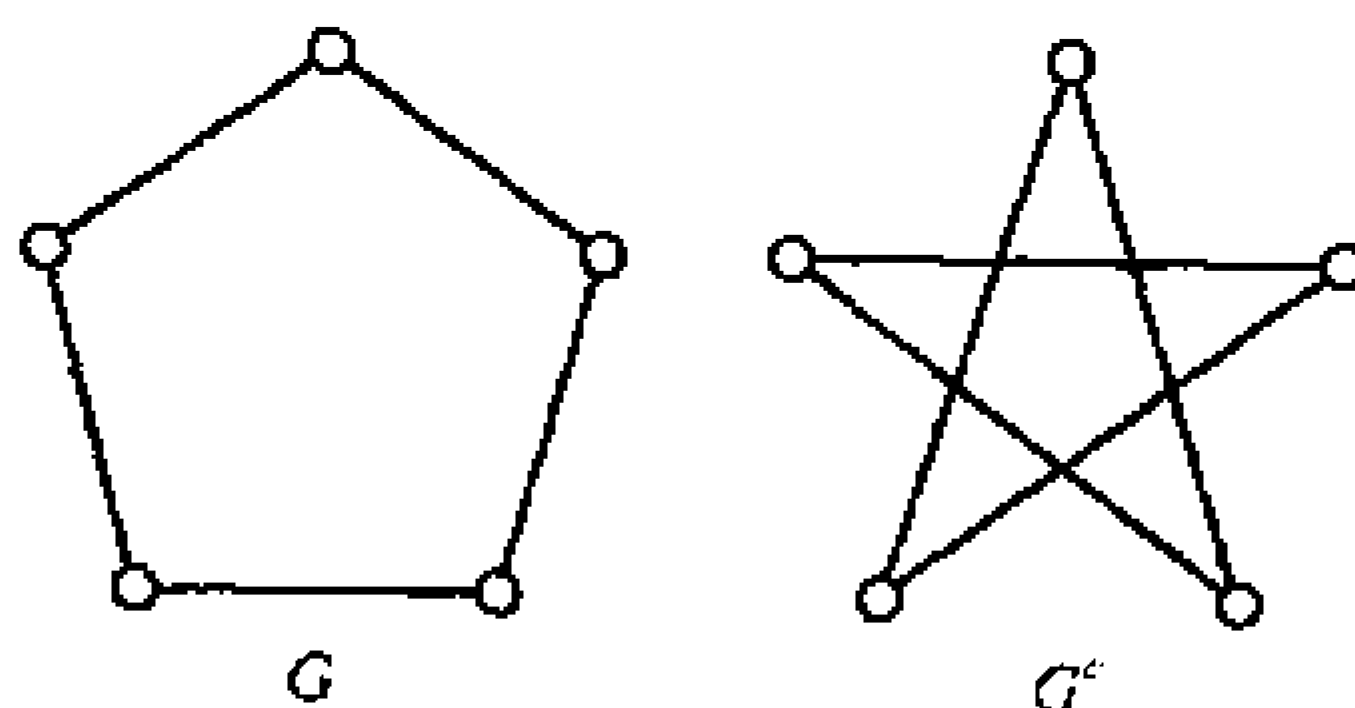


图 1.15

$= (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$,称为 G_1 和 G_2 的并。

例如,G_1、G_2 和 G_3 如图 1.16 所示,$G_1 + G_2$ 和 $G_1 \cup G_2$ 如图 1.17 所示。

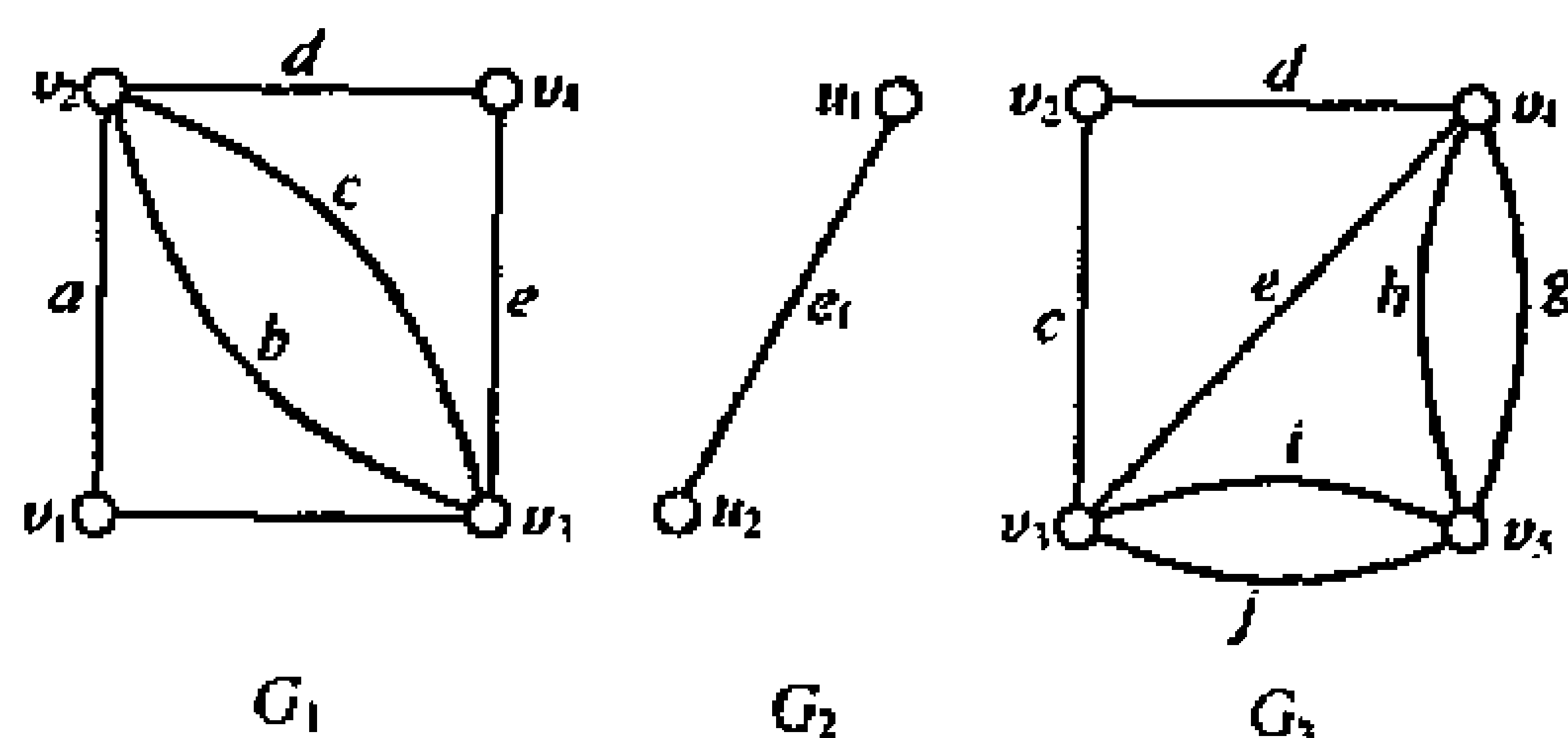


图 1.16

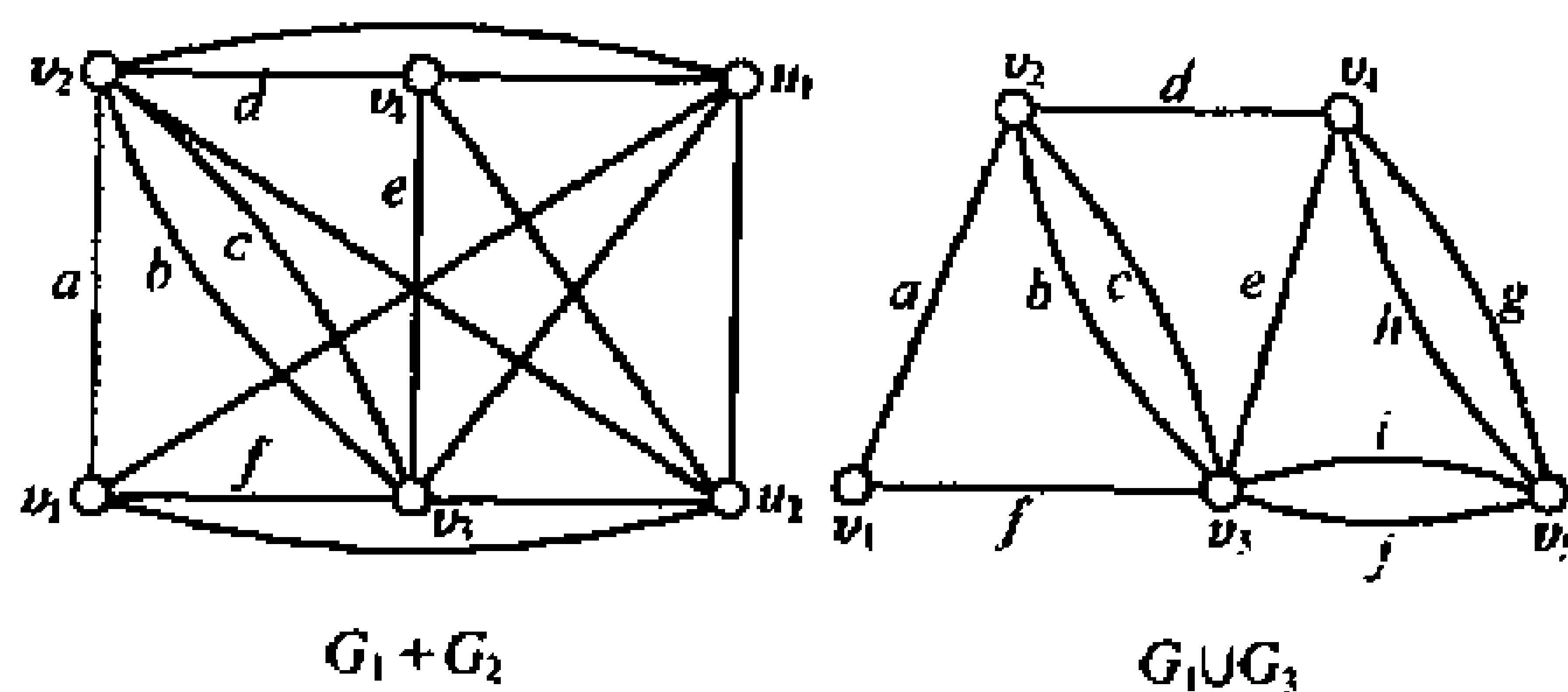


图 1.17

1.5 一些特殊的图

在本节，我们介绍一些常见的特殊图类。

定义 1.5.1 如图 G 中的每一对不同顶点恰有一条边连接，则称此图为**完全图**。

具有 p 个顶点的完全图在同构意义之下只有一个，记为 K_p。图 1.18 给出了点数不超过 5 的所有完全图。

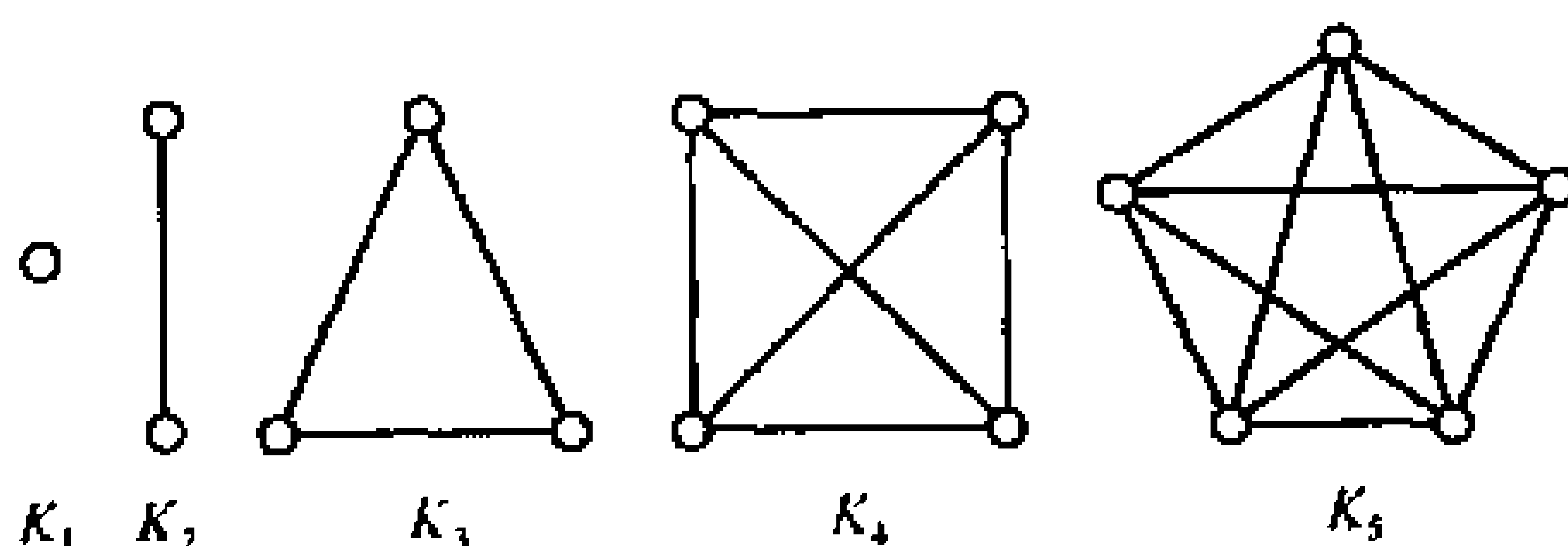


图 1.18

对于一个 p 阶完全图 K_p，容易计算出 K_p 的边数是 $C_p^2 = \frac{p(p-1)}{2}$。并且在所有含 p 个顶点的简单图中，K_p 的边数是最多的，因而以下结论成立。

定理 1.5.1 设 G 是 p 阶简单图，则

$$q(G) \leqslant \frac{p(p-1)}{2}$$

等号成立当且仅当 G 是完全图。

完全图 K_p 的补图 K_p^c 是一个仅含 p 个顶点不含边的图，称为**空图**。

例 1 在一个化学实验室里，有 n 个药箱，其中每两个不同的药箱恰有一种相同的化学品，而且每种化学品恰好在两个药箱中出现。问：

(1) 每个药箱有几种化学品？

(2) 这 n 个药箱中共有几种不同的化学品？

解 我们用 n 个顶点来代表 n 个药箱，两个顶点之间连接的边数等于这两个顶点所对应的两个药箱所含有相同化学品的种数。按题意，所得图 G 是一个 n 阶完全图，G 中每一条边代表一种化学品，由于 G 中每个顶点有 $n-1$ 条边与之关联，共有 $q(G)=C_n^2$ 条边。所以在这个化学实验室中，每个药箱装有 $n-1$ 种化学品。整个实验室共有 C_n^2 种不同的化学品。

定义 1.5.2 设 $G=(V,E)$ 是 p 阶图。若 V 可划分为 m 个非空子集 $V_1,V_2,\cdots,V_m$，使得对每一个 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，$G[V_i]$ 是空图，则称 G 为 **m 部图**，记为 $G=(V_1,V_2,\cdots,V_m;E)$。若 $|V_1|=|V_2|=\cdots=|V_m|$，则称 G 是**等 m 部图**。

定义 1.5.3 设 $G=(V_1,V_2,\cdots,V_m)$ 是 m 部图。并且对任意 $u\in V_i$ 和 $v\in V_j(1\leqslant i\neq j\leqslant m)$，均有 $uv\in E$，则称 $(V_1,V_2,\cdots,V_m;E)$ 是**完全 m 部图**。记为 $K_{p_1,p_2,\cdots,p_m}$，这里 $p_i=|V_i|,i=1,2,\cdots,m$。

与定理 1.5.1 类似，对于 m 部图有以下结论：

定理 1.5.2 设 $G=(V_1,V_2,\cdots,V_m;E)$ 是 m 部图，$p_i=|V_i|,i=1,2,\cdots,m,p=\sum_{i=1}^{m}p_i$。则

$$q(G)\leqslant(p^2-\sum_{i=1}^{m}p_i^2)/2$$

等号成立当且仅当 G 是完全 m 部图 $K_{p_1,p_2,\cdots,p_m}$。

不难看出，每个 p_i 取到 $\frac{p}{m}$ 时 $(1\leqslant i\leqslant m)$，$\sum_{i=1}^{m}p_i^2$ 达到最小，但 $p=\sum_{i=1}^{m}p_i$，每个 p_i 均是正整数。若令 $p=mk+r(0\leqslant r<$

m),则取 $p_1 = \cdots = p_r = k+1, p_{r+1} = \cdots = p_m = k$ 时,$\sum_{i=1}^{m} p_i^2$ 在上述条件下取到最小。故又有

$$q(G) \leqslant \frac{1}{2}\left(p^2 - \sum_{i=1}^{m} p_i^2\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left[p^2 - \left(\sum_{i=1}^{r}(k+1)^2 + \sum_{i=r+1}^{m} k^2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(p^2 - mk^2 - 2kr - r)$$

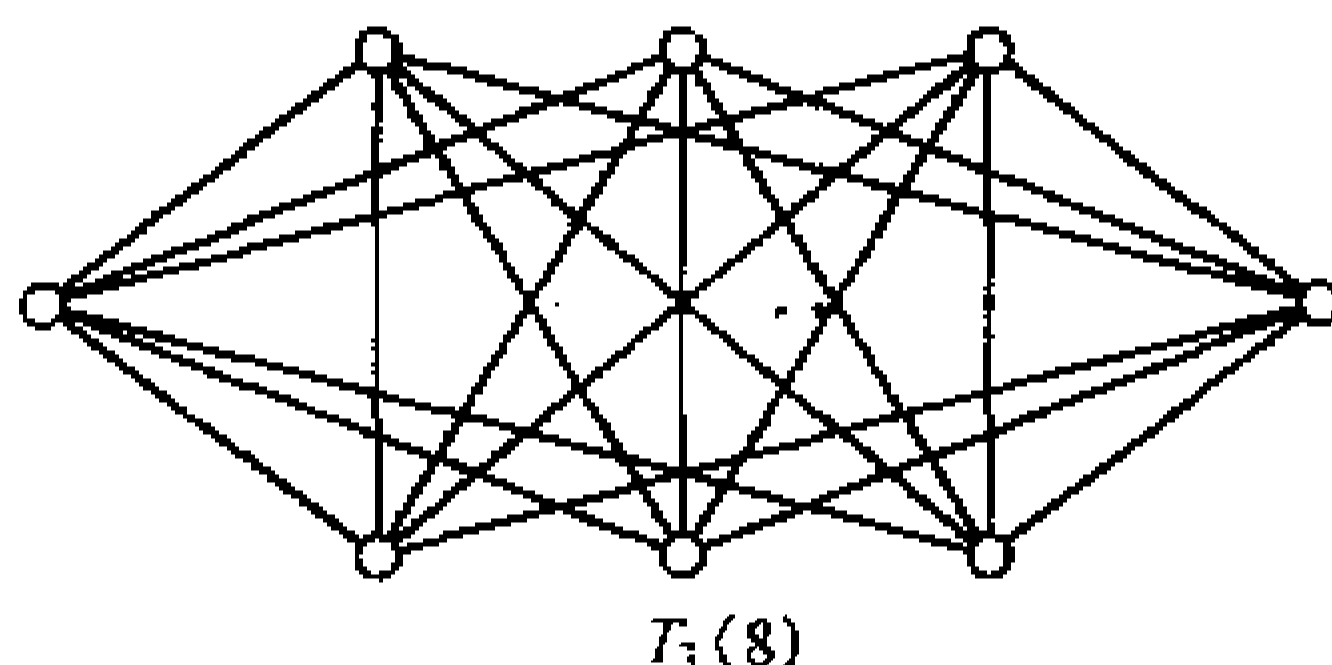
这就证明了以下推论。

推论 1.5.3 设 $G = (V_1, V_2, \cdots, V_m; E)$ 是 p 阶 m 部图,$p = mk + r (0 \leqslant r < m)$,则

$$q(G) \leqslant \frac{1}{2}(p^2 - mk^2 - 2kr - r)$$

等号成立当且仅当 G 是完全 m 部图 $K_{\underbrace{k+1,\cdots,k+1}_{r个},k,\cdots,k}$。

由于完全 m 部图 $K_{\underbrace{k+1,\cdots,k+1}_{r个},k,\cdots,k}$ 完全由 p 与 m 惟一确定,可记为 $T_m(p)$。例如 $T_3(8)$ 如图 1.19 所示。$T_3(8) = K_{3,3,2}$,$q(T_3(8)) = 21$。



$T_3(8)$

图 1.19

我们通常用 $G = (X, Y; E)$ 表示二部图,有时也称为二分图。在实际问题中,碰到二分图的例子很多。

例 2 人员分配问题。某公司分配 n 个工人做 m 件工作，就可以用一个二分图来表示。代表人的一组顶点用 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示，代表工作的一组用顶点 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 表示。$x_i \in X$ 与 $y_j \in Y$ 相邻当且仅当工人 x_i 能做工作 y_j，所得图是一个二分图。

例 3 公用设施问题。代表住户的顶点作为一组，代表公共设施（如水厂、电厂、煤气公司、电话公司等）的顶点又是一组，两组的顶点之间有边相连当且仅当对应的用户与公共设施之间存在隶属关系，所得图也是二分图，如图 1.20 所示。

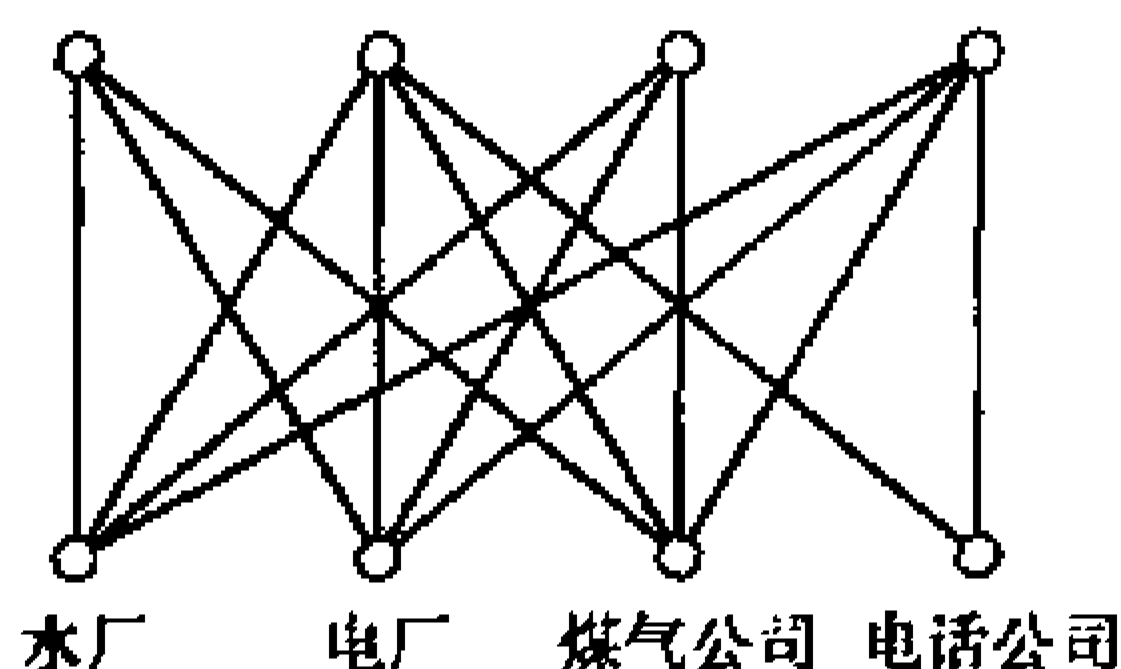


图 1.20

例 4 在一次舞会中，X、Y 两国留学生各 $n(n > 2)$ 人，X 国每个学生都与 Y 国一些（不是所有）学生跳过舞。Y 国每个学生至少与 X 国一个学生跳过舞。证明一定可以找到 X 国两个学生 x、x' 及 Y 国两个学生 y、y'，使得 x 与 y、x' 与 y' 跳过舞，而 x 与 y'、x' 与 y 没有跳过舞。

证明 作一个二分图 $G = (X, Y; E)$，X 中的 n 个点代表 X 国的 n 个留学生，Y 中的 n 个点代表 Y 国的 n 个留学生。如果一个 X 国的学生与一个 Y 国的学生一起跳过舞，就在相应的两个点之间连一条边。所得二分图 G 是一个简单图，并且 $|X| = |Y| = n > 2$，对 X 中每个点 x，$1 \leqslant d_G(x) < n$，对 Y 中的每一个点 y，$d_G(y) \geqslant 1$。

在 X 中取一个度数最大的点 x，在 Y 中取一个与 x 不相邻的

点 y'，由于 $d_G(y') \geqslant 1$，令 x' 是 X 中与 y' 相邻的顶点，则 $d_G(x') \leqslant d_G(x)$，$x' \neq x$，即有 $|N_G(x')| \leqslant |N_G(x)|$，又 $y' \in N_G(x') - N_G(x)$，所以 $N_G(x) - N_G(x') \neq \varnothing$。取 $y \in N_G(x) - N_G(x')$，则 y 与 x 相邻而与 x' 不相邻(如图1.21所示)。这四个点 x、x'、y、y' 所对应的四个留学生即为所求的四个留学生。

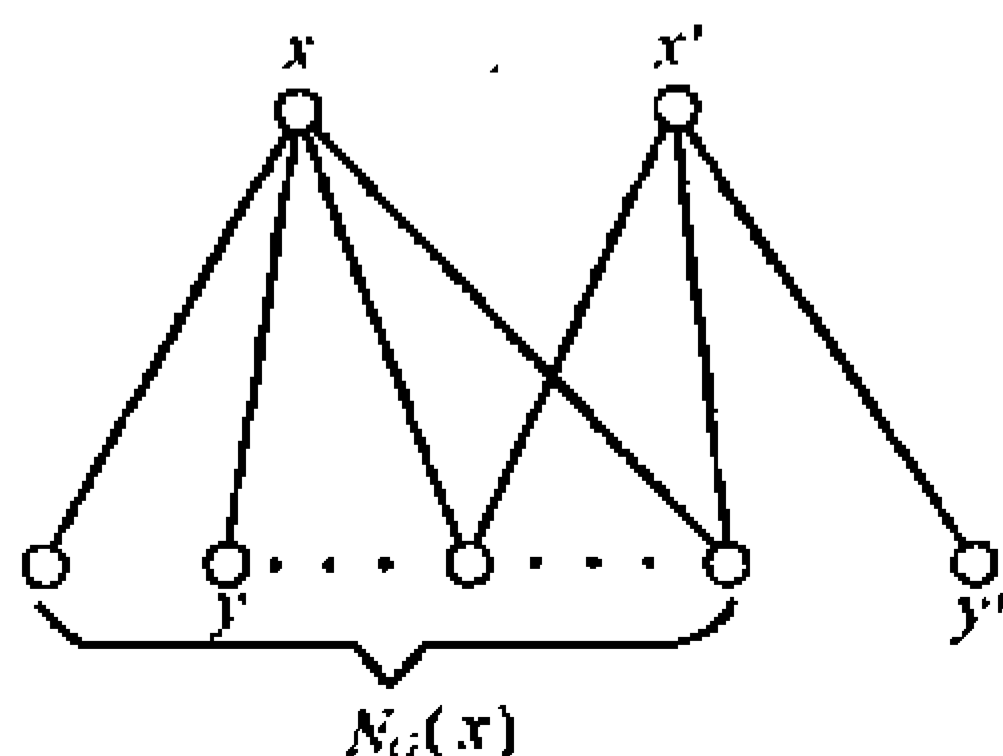


图 1.21

给定有向图 $D=(V,A)$ 后，有时需要对 D 中的每条弧 a 赋予一个实数 $w(a)$。通常 $w(a)$ 称为赋予弧 a 的权。赋权的有向图称为有向网络，记为 $N=(V,A,W)$。在有向网络中，弧的权可以用来表示各种不同含义的量。例如在运输网络中，弧可以表示道路，弧上的权可以用来表示道路的实际长度，可以表示通过该段道路所需的时间或运费，也可以用来表示建造这段道路的费用。权的实际意义可以根据具体问题的需要决定，当然在必要时还可以给每条弧赋两个以上的不同含义的权。

有时也可以考虑赋权的无向图。赋权的无向图称为无向网络或赋权图，记为 $N=(V,E,W)$ 或 $G=(V,E,W)$。我们可以把一个无向网络 $N=(V,E,W)$ 转化为有向网络。其方法是：把 $N=(V,E,W)$ 中的每条边 $e=uv$ 代之以一对有向弧：

$$a'=(u,v)\in A$$
$$a''=(v,u)\in A$$

相应的权为：$w(a')=w(a'')=w(e)$。这样就得到一个相应的有向网络 $N=(V,A,W)$。这是一种常用的把无向网络化为有向网络的方法，这种变换方法的直观意义是很明显的。如果我们把边看作道路，无向边表示两个方向都能通行的路。有向弧表示只允许单向通行的路，那么一条双向路显然可以看作两条平行的单向路。

需要指出的是，一个图（有向图）可以看成是所有边（弧）的权都为 1 的无向网络（有向网络）。

1.6 图的矩阵表示

一个图 $G=(V,E)$ 由它的顶点与边之间的关联关系惟一确定；也由它的顶点对之间的邻接关系惟一确定。图的这种关系均可以用矩阵来刻划，分别称为 G 的关联矩阵与邻接矩阵。一个图的矩阵表示不仅仅是给出了图的一种表示方法，重要的是可通过对这些矩阵的讨论，可以得到有关图的若干性质。此外，在图论的应用中，图的矩阵表示也具有重要的作用。

定义 1.6.1 设 $G=(V,E)$ 的顶点集和边集分别为

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$$
$$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$$

用 b_{ij} 表示顶点 v_i 与边 e_j 关联的次数（0，1 或 2），称矩阵 $B(G)=(b_{ij})_{p\times q}$ 为 G 的**关联矩阵**。

例 1 图 1.22 所示的图 G 的关联矩阵为

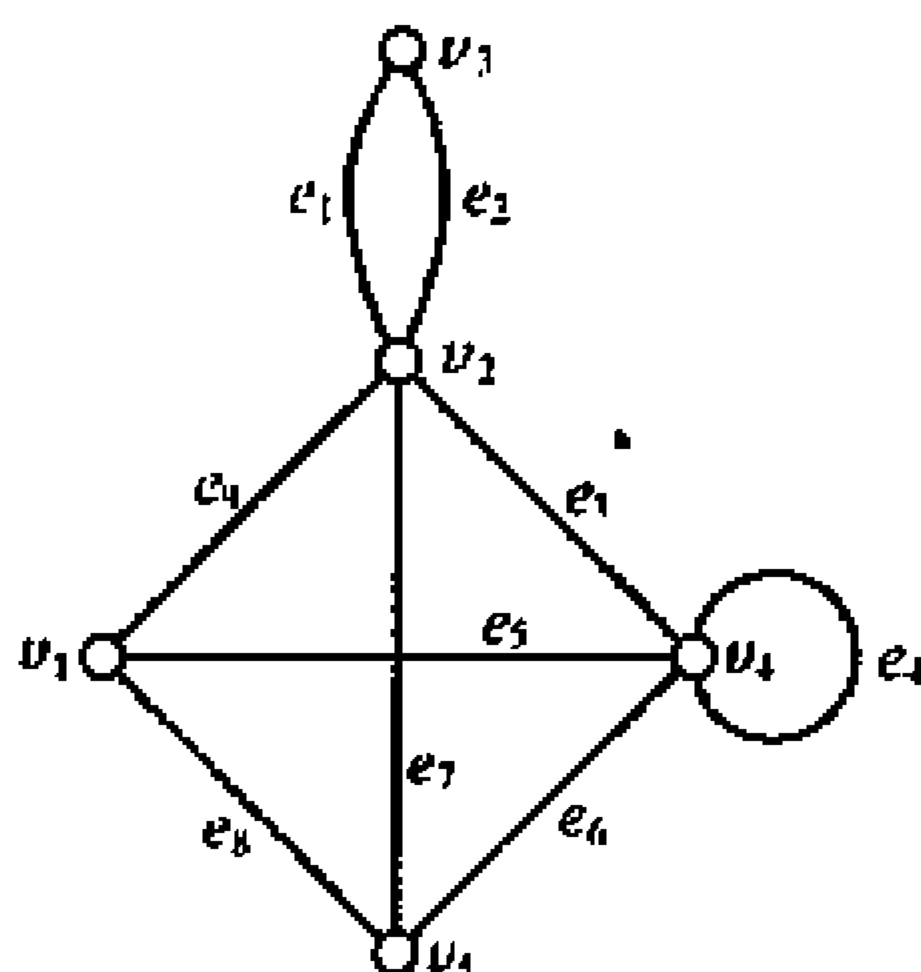


图 1.22

$$B(G)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

从图的关联矩阵的定义容易获得以下性质：

(1) $B(G)$ 的每一列元素之和均为 2；

(2) $B(G)$ 的每一行元素之和等于对应顶点的度数。

定义 1.6.2 设图 $G=(V,E)$ 的顶点集为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，用 a_{ij} 表示 G 中 v_i 与 v_j 之间的边数。称矩阵 $M(G)=(a_{ij})_{p\times p}$ 为 G 的邻接矩阵。

例 2 图 1.22 所示的图 G 的邻接矩阵为

$$M(G)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

图的邻接矩阵有以下明显的性质：

(1) $M(G)$ 是一个对称矩阵；

(2) 若 G 为无环图。则 $M(G)$ 中第 i 行(列)的元素之和等于顶点 v_i 的度数；

(3) 两个图 G 与 H 同构的充要条件是存在一个置换矩阵 P，使

$$M(G)=P^TM(H)P$$

定义 1.6.3 设图 $G=(V,E)$ 的顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，$G$ 的度矩阵为

$$D(G)=\begin{bmatrix} d(v_1) & & & \\ & d(v_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & d(v_p) \end{bmatrix}$$

定理 1.6.1 图 $G=(V,E)$ 是 p 阶简单图，则

$$B(G)\cdot B(G)^T=D(G)+M(G)$$

证明 记 $M(G)=(a_{ij})_{p\times p}$，$B(G)=(b_{ij})_{p\times q}$，$D(G)=(d_{ij})_{p\times q}$。$B(G)\cdot B(G)^T$ 的 (i,j) 元素为

$$(B(G)\cdot B(G)^T)_{ij}=\sum_{k=1}^{q}b_{ik}b_{ik}$$

$D(G)+M(G)$ 的 (i,j) 元素为

$$(D(G)+M(G))_{ij}=\begin{cases} d_{ii}=d(v_i) & \text{当 } i=j \\ a_{ij} & \text{当 } i\neq j \end{cases}$$

若 $i\neq j$，则 $b_{ik}b_{jk}=1$ 当且仅当 $e_k=v_iv_j\in E(G)$，而 $v_iv_j\in E(G)$ 当且仅当 $a_{ij}=1$。当 $e_k=v_iv_j\in E(G)$ 时，对 G 中任何其余边 $e_l\neq e_k$，由于 $e_l\neq v_iv_j$，$b_{il}b_{jl}=0$。当 $v_iv_j\notin E(G)$ 时，对一切 $e_k\in E(G)$，由于 $e_k\neq v_iv_j$，$b_{ik}b_{jk}=0$ 且 $a_{ij}=0$。故以下等式成立：

$$\sum_{k=1}^{q}b_{ik}b_{jk}=a_{ij}$$

即

$$(B(G)\cdot B(G)^T)_{ij}=(D(G)+M(G))_{ij}$$

若 $i=j$，则

$$\begin{aligned}(B(G)\cdot B(G)^T)_{ii}&=\sum_{k=1}^{q}b_{ik}b_{ik}=\sum_{k=1}^{q}b_{ik}^2=d(v_i)\\&=d_{ii}=(D(G)+M(G))_{ii}\end{aligned}$$

所以

$$B(G)\cdot B(G)^T=D(G)+M(G)$$

证毕。

对于一个二分图 $G=(X,Y,E)$ 来说，我们可以用一个阶数比邻接矩阵更小的矩阵来表示。设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，作 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，其中 a_{ij} 表示 x_i 与 y_j 之间连接的边数。

例 3 图 1.23 所示的二分图所对应的 6×5 矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

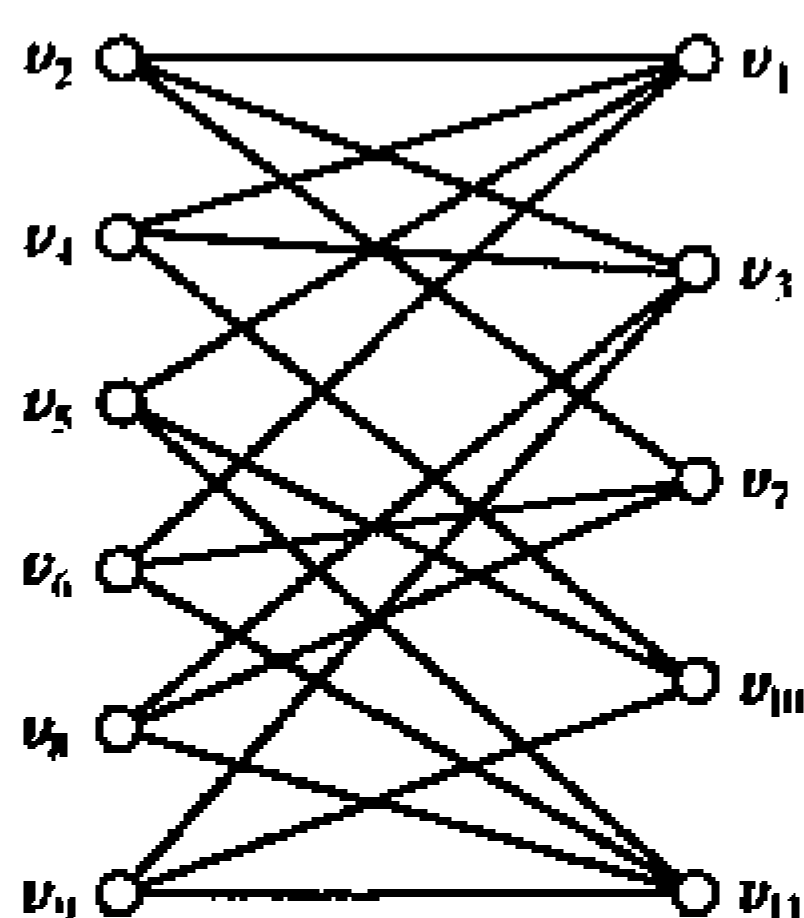


图 1.23

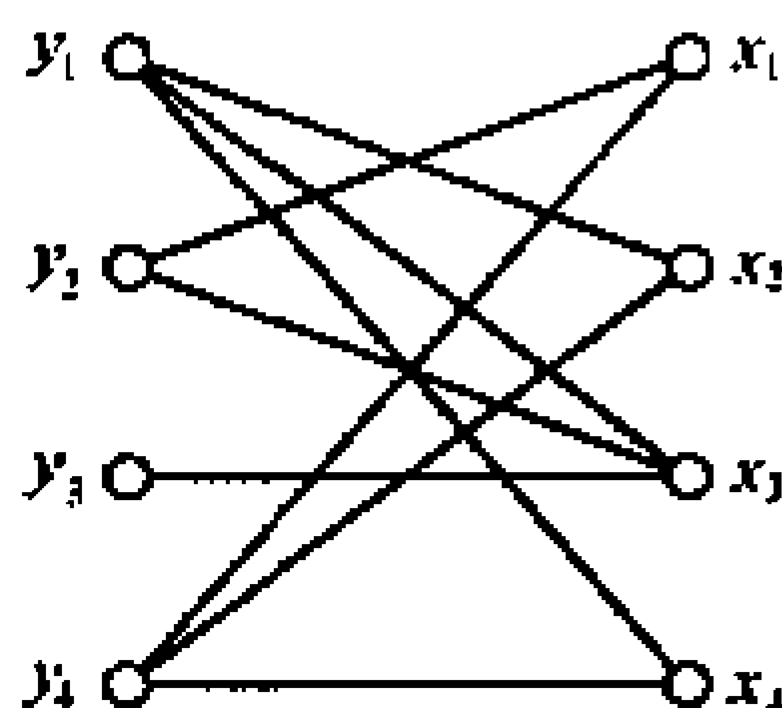


图 1.24

反之，给定一个(0,1)矩阵，能惟一确定一个简单二分图 $G=(X,Y;E)$；例如(0.1)矩阵 B 对应一个二分图 G（见图 1.24）为

$$B=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

对于有向图，我们类似的可以引进关联矩阵和邻接矩阵。

定义 1.6.4 有向图 D 的关联矩阵 $B(D)=(b_{ij})_{p\times q}$ 定义为

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{顶点 } v_i \text{ 是弧 } a_j \text{ 的起点}\\ -1 & \text{顶点 } v_i \text{ 是弧 } a_j \text{ 的终点}\\ 0 & \text{顶点 } v_i \text{ 是弧 } a_j \text{ 不关联}\end{cases}$$

例 4 图 1.25 所示的有向图 D 的关联矩阵 $B(D)$ 为

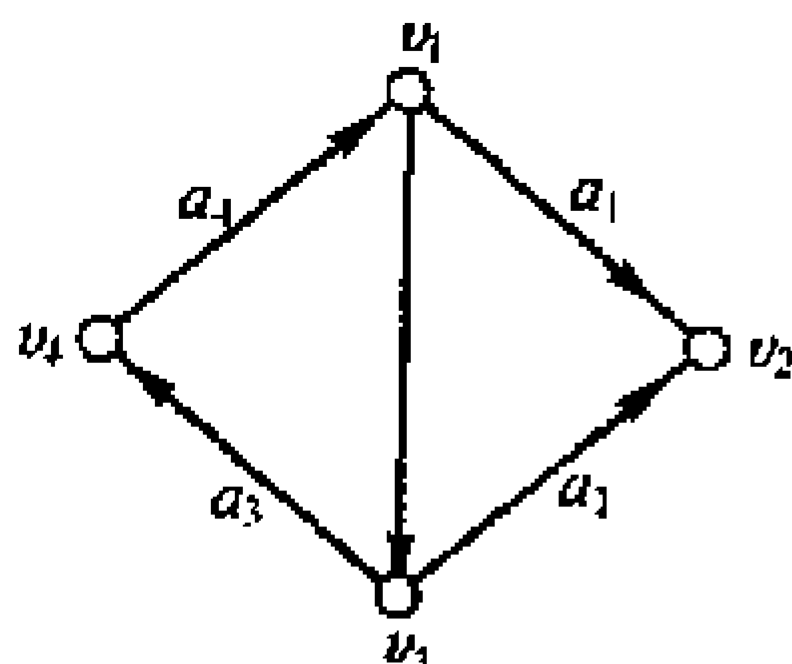


图 1.25

$$B(D)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

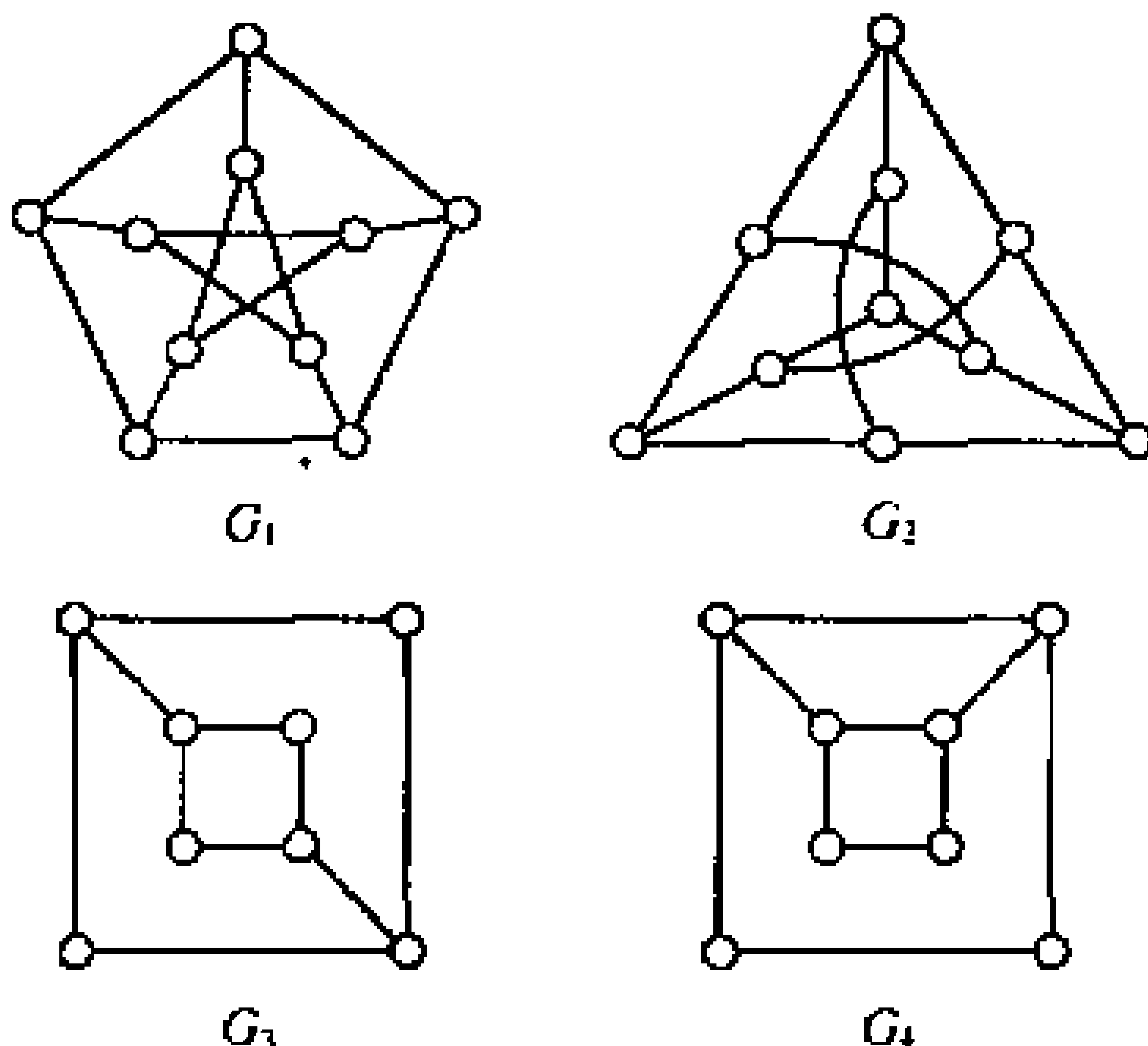
定义 1.6.5 有向图 D 的邻接矩阵 $M(D)=(a_{ij})_{p\times p}$ 的元素 a_{ij} 定义为：从 v_i 到 v_j 的弧的条数。

例 5 图 1.25 所示的有向图 D 的邻接矩阵为

$$M(D)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

习　题　一

1.1　证明：在下面几个图中，G_1 与 G_2 两个图同构（图 G_1 是著名的彼得森（Petersen）图），而图 G_3 与 G_4 不同构。



习题 1.1

1.2　设 G 与 H 同构，其中 $V(G)$ 与 $V(H)$ 之间的这个一一对应为 φ。证明：

(1) 对 G 中任一个顶点 u，$d_G(u) = d_H(\varphi(u))$；

(2) $p(G) = p(H)$，$q(G) = q(H)$；

(3) 举例说明(2)的逆不成立。

1.3　对任意图 G，证明：

$$\delta(G) \leqslant 2q(G)/p(G) \leqslant \Delta(G)$$

1.4　在一次象棋比赛中，任意的两名选手间至多下一盘，试证总存在两名选手，他们下过的盘数相同。

1.5　在习题1.4所指的比赛中，如果每个选手与其余所有的选手

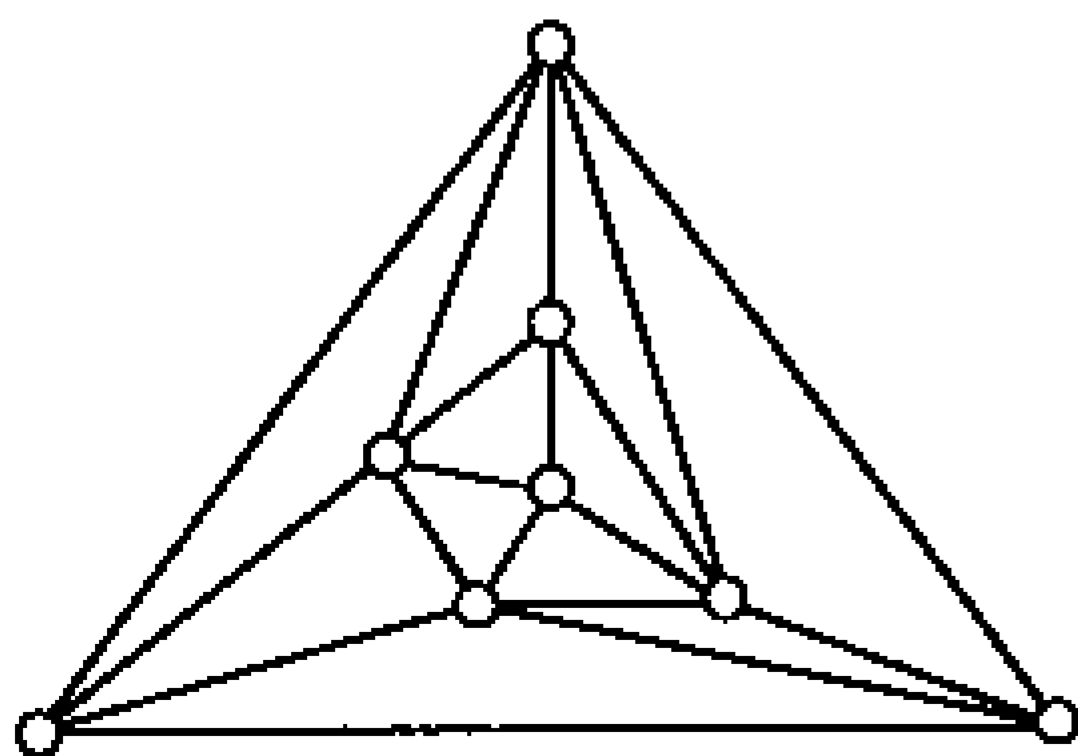
都比赛一次，且选手总数是 n，求总盘数。

1.6 在某俱乐部里有 n 个人($n \geq 6$)，每个人声称只愿意与他认识的 4 个人在一起打桥牌。证明：如果有 1 个人认识的人数大于$\frac{2}{3}n$，而其余每个人认识的人数大于或等于$\frac{2}{3}n$，则总可以从这 n 个人中找出 4 个人，这 4 个人可以在一起打桥牌。

1.7 证明非负整数序列(7,6,5,4,3,3,2)和(6,6,5,4,3,3,1)都不是图序列。

1.8 在一次集会中有 n 个人参加($n \geq 6$)。证明其中的任意 6 个人中必有 3 个人互相认识或有 3 个人互不认识。举例说明，如果将 6 个人改为任意的 5 个人，结论不一定成立。

1.9 将平面上一个三角形的三个顶点分别涂以红、蓝、黑三种颜色。在该三角形内取若干个点，将它分为若干个小三角形(下图是一个例子)，每两个小三角形或有一个公共端点，或者有一条公共边，或者没有公共端点，将每个小三角形的端点也涂上红、蓝、黑三种颜色之一。证明不管怎样涂，都有一个小三角形，它的三个顶点的颜色全不相同。



习题 1.9

1.10 一个旅游组由 n 个人组成($n \geq 4$)，其中任意 4 个人中至少有 1 人，他以前见过另外 3 人。试证：在这种情况下，任意的

4 个人中必存在 1 人，他早就见过其余的 $n-1$ 个人。

1.11　图 G 如图所示：

(1) 画出下列几个子图：

(a) $G-\{v_1,v_2,v_4\}$；

(b) $G[v_1,v_2,v_3]$；

(c) $G[e_3]$；

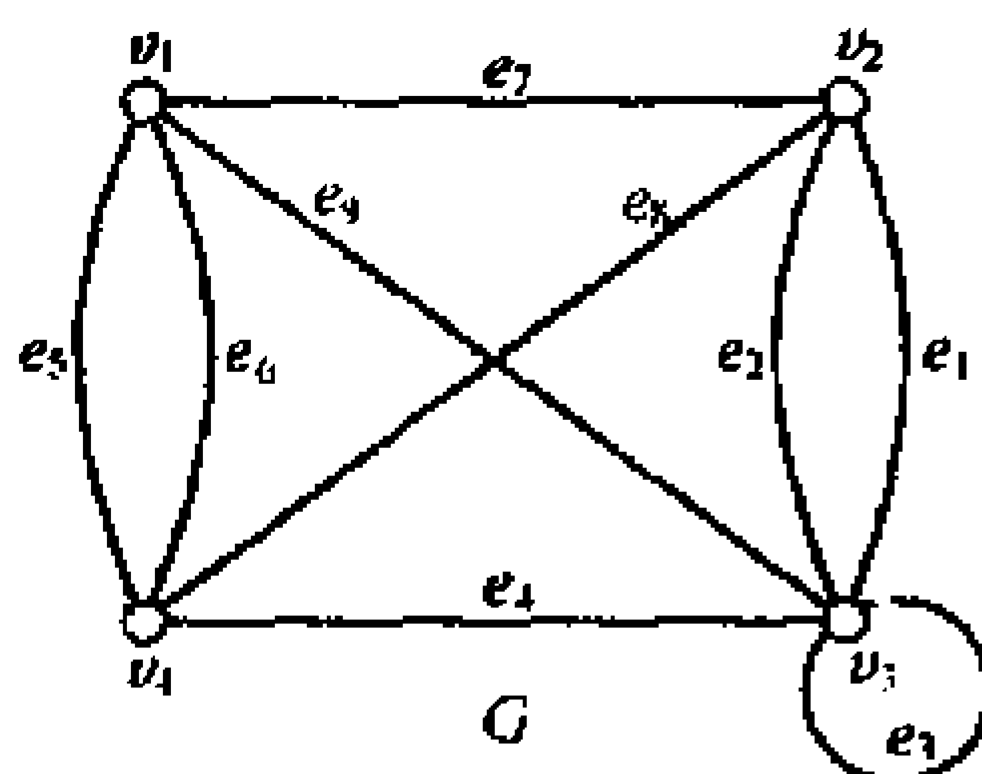
(d) $G[e_1,e_2,e_3]$；

(e) $G-\{e_4,e_7,e_8,e_9\}$；

(f) G 的基础简单图。

(2) 上面的 6 个子图中，哪几个子图是正则图？

(3) 求 $G[v_1,v_2,v_3]\cup G[v_2,v_3,v_4]$ 和 $G[v_1,v_4]+G[v_2,v_3]$。



习题 1.11

1.12　若简单图 G 同构于 G^C，则称 G 为自补图。

(1) 证明自补图的阶数 $p=4k$ 或 $p=4k+1$，k 为某个自然数。

(2) 找出一切 4 阶和 5 阶的自补图。

1.13　设 $G=(X,Y,E)$ 是一个 k 正则二分图($k\geqslant 1$)，则必有 $|X|=|Y|$。

1.14　试证明：任何一个简单图 G 都有一个生成子图 H，使 H 为

二分图，并且对任意一个顶点 $v \in V(G)$，均有

$$d_H(v) \geqslant d_G(v)/2$$

1.15　平面上有 100 个点，其中任意 3 个点不共线。证明：可以适当添加 2 500 条连接这些点的直线段，而不形成一个以这 100 个点中某些点为顶点的三角形。

2 图的连通性

2.1 路和回路

定义 2.1.1 图 $G=(V,E)$ 的一个点边交替出现的有限序列 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots\cdots v_{k-1}e_kv_k$，这里 $v_i(0\leqslant i\leqslant k)$ 是 G 的顶点，$e_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 是 G 的边，满足 e_i 的两个端点就是 v_{i-1} 和 v_i $(1\leqslant i\leqslant k)$，则称 W 是 G 的一条从 v_0 到 v_k 的**途径**，简称为 (v_0-v_k) 途径。$v_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 称为 W 的**内部顶点**；k 称为途径 W 的**长度**；v_0 与 v_k 称为 W 的**起点**与**终点**，或统称为 W 的**端点**。

例如，图 2.1 的 $W_1=v_1e_6v_2e_2v_4e_8v_4e_2v_2e_4v_3$ 是一条 (v_1-v_3) 途径，其长度为 5。

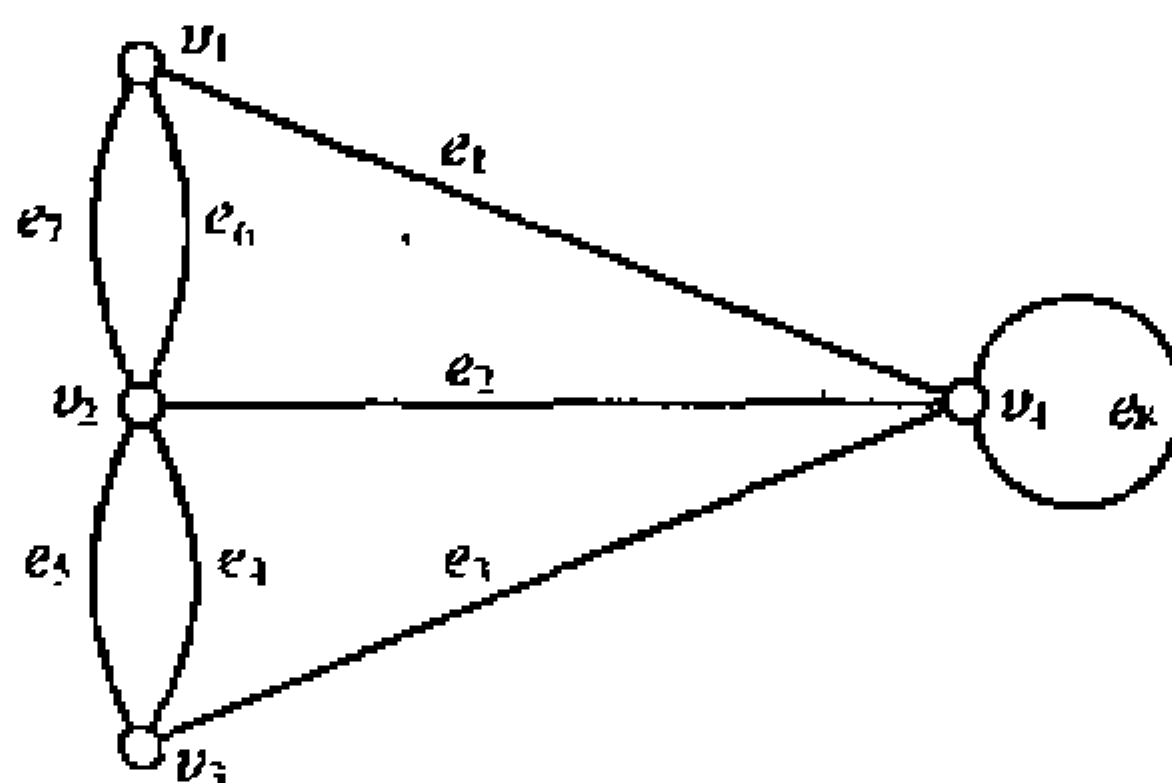


图 2.1

注意在途径的定义中没有要求一条途径内的边互不相同。如果途径的边互不重复，则称这条途径为**迹**。$W=v_1e_7v_2e_4v_3e_5v_2e_2v_4$ 是图 2.1 所示的图 G 的一条 (v_1-v_4) 迹，长度为 4。

如果一条途径中的顶点也互不相同，则称这条途径为路。明显地，如果 W 是一条 $(v_0 - v_k)$ 路，则 W 也是一条 $(v_0 - v_k)$ 迹和 $(v_0 - v_k)$ 途径。反之，若 G 中存在一条 $(v_0 - v_k)$ 途径 W，则在 G 中必然也存在一条 $(v_0 - v_k)$ 路 P，且 $E(P) \subseteq E(W)$。若 P 是一条路，x 和 y 是 P 中两个顶点，用 $P(x,y)$ 表示沿 P 从 x 到 y 的这一段路。

当我们所讨论的图是简单图时，G 的一条途径 $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$ 可简写为 $W = v_0v_1v_2\cdots v_{k-1}v_k$。迹与路也同样可以这样简写。

对于图 G 中两个给定的顶点 u 和 v。若 G 中存在 $(u-v)$ 路，则必定存在一条长度最短的 $(u-v)$ 路 P_0。称 P_0 是一条 $(u-v)$ 最短路，P_0 的长度称为顶点 u 与 v 的距离，记为 $d_G(u,v)$（或 $d(u,v)$）。如果 G 中不存在从 u 到 v 的路，则令 $d_G(u,v) = +\infty$。定义图 G 的直径 $\mathrm{diam}(G)$（简写为 $d(G)$）为

$$d(G) = \max\{d(u,v) \mid u,v \in V(G), u \neq v\}$$

定义 2.1.2 如果一条途径的起点与终点相同，就称这条途径为闭途径。

同样可定义闭迹。我们通常把起点及内部顶点互不相同的闭迹称为回路（或圈）。

例如，图 2.1 中的 $v_1e_1v_4e_3v_3e_4v_2e_6v_1$ 是 G 的一个回路，长度为 4。$v_1e_6v_2e_7v_1$ 是 G 的一个长为 2 的回路。

明显地，在简单图中，任一回路的长度至少是 3，通常用 C_n 来表示某一长度为 n 的回路。

有向图 D 的有向途径是指交替地出现点和弧的一个有限非空序列：$W = v_0a_1v_1a_2v_2\cdots a_kv_k$，对于 $i = 1,2,\cdots,k$，弧 a_i 的起点是 v_{i-1}，终点是 v_i，简称 W 是一条 $(v_0 - v_k)$ 有向途径。和图的途径一样，在严格的有向图中，一条有向途径常常用它的顶点序列 $v_0v_1\cdots v_k$ 来表示。有向迹、有向路和有向回路可以类似的定义。也可类似定义有向图中两顶点 u 与 v 之间的距离 $d_D(u,v)$。注意在有向

图 D 中,对于两个顶点 u,v,一般 $d_D(u,v)=d_D(v,u)$ 不成立。

定理 2.1.1 若简单图 G 中每一个顶点的度至少是 $k(k\geq 2)$,则 G 中必然含有一个长度至少是 $k+1$ 的回路。

证明 在 G 的所有路中,取一条长度最长的路 P,记

$$P=v_0v_1\cdots v_{t-1}v_t$$

则 v_0 和 v_t 的所有邻点全在 P 中,由于 $d_G(v_0)\geq k\geq 2$,所以 v_0 至少有 k 个邻点;设有 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k},1\leq i_1\leq i_2<\cdots<i_k\leq t$,则

$$C=v_0v_1\cdots v_{i_k}v_0$$

就是 G 的一个长为 i_k+1 的回路,显然 $i_k+1\geq k+1$。 证毕。

对于有向图,类似的可以证明。

定理 2.1.2 设有向图 D 是严格的,与 $\delta^-(D)\geq k$ 或 $\delta^+(D)\geq k(k>0)$,则 D 含有长度至少为 $k+1$ 的有向回路。

定理 2.1.3 设简单图 G 中每个顶点的度至少是 3,则 G 含有长为偶数的回路。

证明 设 $P=v_0v_1\cdots v_t$ 是 G 的一条最长路,则 v_0 的所有邻点全在 P 内,设 v_0 的邻点为 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}(1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k)$,其中 $k=d_G(v_0)\geq 3$.在 G 中取三个回路

$$C_1=v_0v_1\cdots v_{i_2}v_0$$

$$C_2=v_0v_1\cdots v_{i_k}v_0$$

$$C_3=v_0v_{i_2}v_{i_2+1}\cdots v_{i_k}v_0$$

它们的长度分别为 i_2+1,i_k+1 和 i_k-i_2+2。这三个数中至少有一个是偶数。即 C_1,C_2 和 C_3 中至少有一个是长为偶数的回路。

证毕。

为了方便,我们把长度为奇(偶)数的回路称为奇(偶)回路。则我们可根据奇回路的存在性来判别给定的图是否为二分图。

定理 2.1.4 非平凡图 G 是二分图当且仅当 G 中不含有长为

奇数的回路。

证明 必要性。设 G 是一个二分图，G 的二分划为 X 和 Y，则 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 为空图。设

$$C = v_1 v_2 \cdots v_k v_1$$

是 G 中长度为 k 的一个回路，下证 k 为偶数。

不妨设 $v_1 \in X$，由于 v_2 与 v_1 相邻，故 $v_2 \in Y$；同样因 $v_2 \in Y$，v_3 与 v_2 相邻，有 $v_3 \in X$。一般说来 $v_1, v_3, v_5, \cdots \in X$，$v_2, v_4, v_6, \cdots \in Y$，又因为 $v_1 \in X$，$v_1 v_k \in E(G)$，所以 $v_k \in Y$，即得 k 为偶数。

充分性。不妨设 G 中每一对点之间有路连接（否则只要考虑 G 的每个每一对点之间有路连接的极大子图）。任取 G 的一个顶点 u，由 G 的假设，对 G 的每一个顶点 v，在 G 中存在 $(u-v)$ 路。现利用 u 对 G 的顶点进行分类。置：

$X = \{v \mid v \in V(G)$，G 中存在一条长为偶数的 $(u-v)$ 路$\}$

$Y = \{v \mid v \in V(G)$，G 中存在一条长为奇数的 $(u-v)$ 路$\}$

显然 $u \in X$。由于图 G 中不存在长度为奇数的回路，所以对任一个点 v，G 中所有从 u 到 v 的路的长度都有相同的奇偶性，因而 $X \cap Y = \varnothing$。由 G 的假设，$X \cup Y = V(G)$。现对 G 的每一条边 $e = u_1 u_2$，若 u_1、u_2 都在 X 上，则存在两条路 P_1 与 P_2 分别连接 u 与 u_1 和 u 与 u_2，且 P_1、P_2 的长度均为偶数，闭途径 $P_1 \cup P_2 \cup \{e\}$ 的长度为奇数，则不难看出 G 中有一条长为奇数的回路，矛盾。同样 u_1 与 u_2 不能同时含在 Y 中。故 e 的两个端点分别在 X 和 Y 中。因此 G 是二分图。 证毕。

从这定理 2.1.4 可得图 2.2 所示的图不是二分图，因为它包含一个长为 3 的回路 $C = v_4 v_5 v_6 v_4$。图 2.3 所示的图是一个二分图，它不含长为奇数的回路。

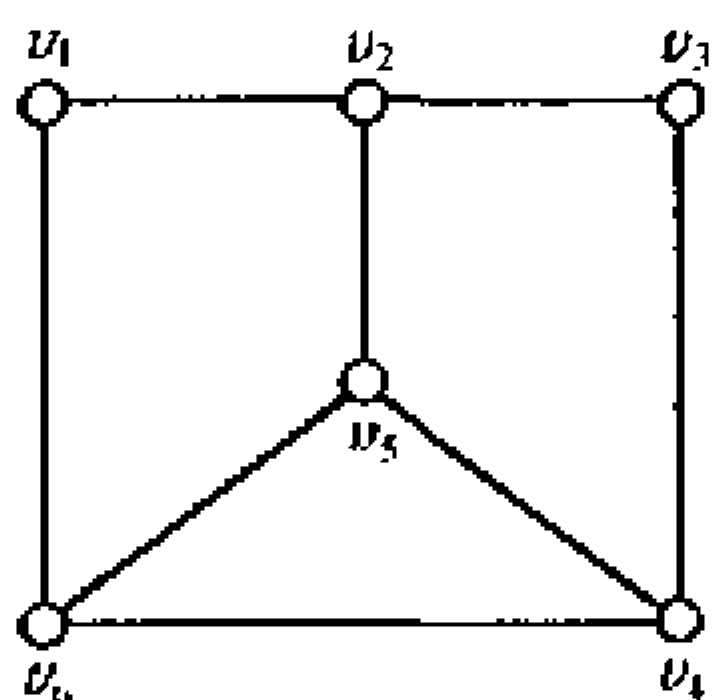


图 2.2

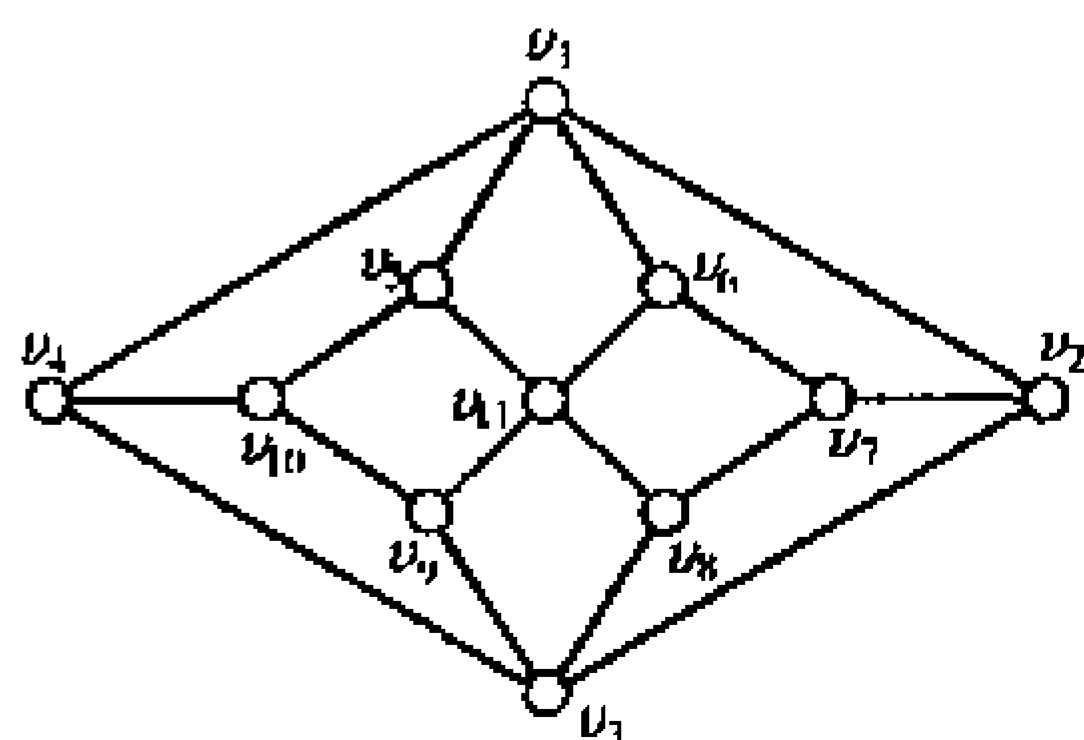


图 2.3

下面我们利用路的概念来考虑著名的“过河问题”。

例 1　一个摆渡人，要把一条狼、一只羊和一捆草运到河东去，由于船太小，除摆渡人之外，一次只能运一个“乘客”。很明显，摆渡人不能让狼与羊单独留在岸边，也不能让羊和草单独留在岸边。问摆渡人怎样才能把它们运到河东去？

解　用 F 代表摆渡人，W 表示狼，S 表示羊，H 表示干草。于是，根据题意，集合 $\{F,S,W,H\}$ 中，允许留在原岸边的子集是 $\{F,S,W,H\}$，$\{F,S,W\}$，$\{F,S,H\}$，$\{F,W,H\}$，$\{F,S\}$，$\{W,H\}$，$\{S\}$，$\{W\}$，$\{H\}$，$\varnothing$。我们现在可以构造一个以这些子集为顶点，摆渡前在原岸边的子集与经过一次摆渡后仍在原岸边的子集所对应的两个顶点连上一条边，得图 G（见图 2.4 所示）。

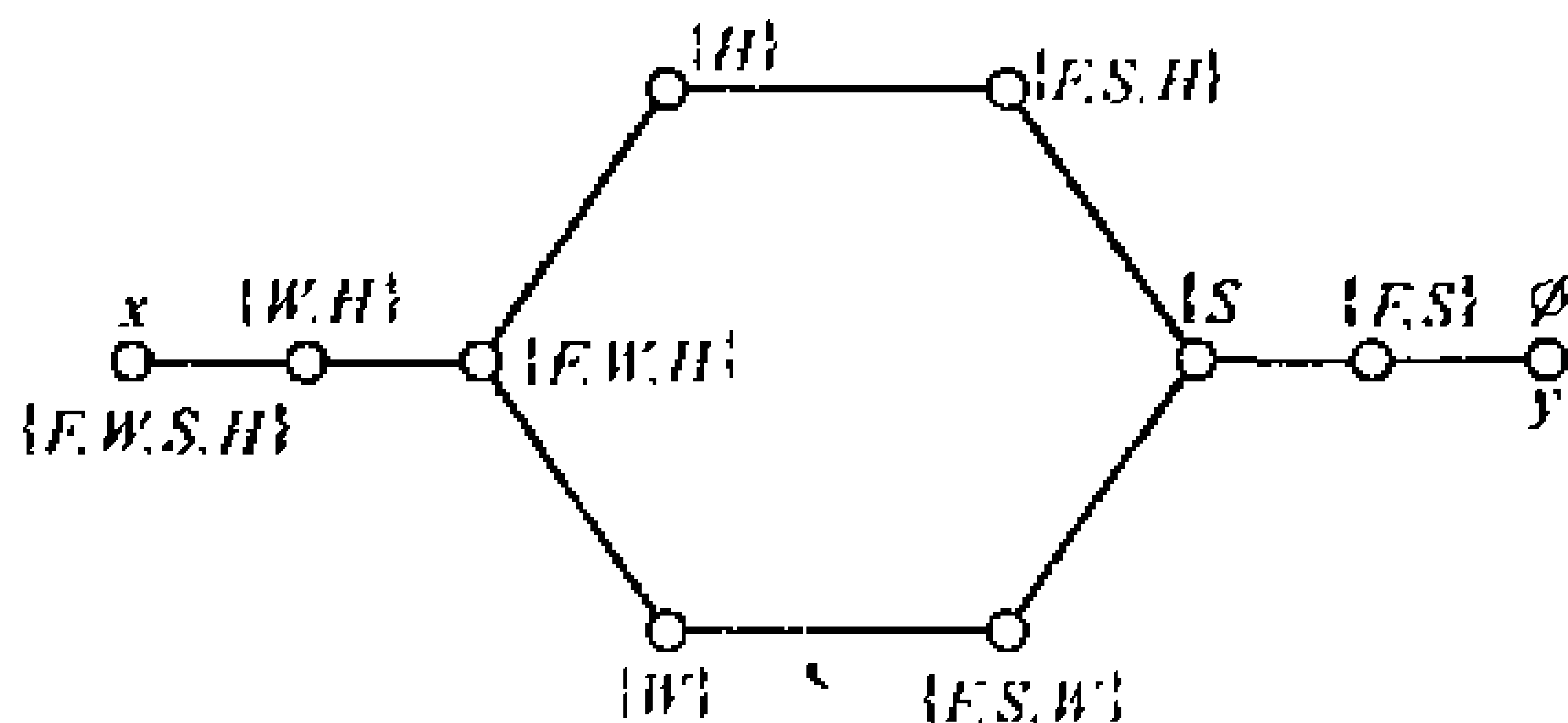


图 2.4

问题的解就是要我们找出图 G 中一条从顶点 $x = \{F,W,S,H\}$ 到顶点 $y = \varnothing$ 的路。从 G 中不难得出从 x 到 y 的一条路:

$\{F,W,S,H\} - \{W,H\} - \{F,W,H\} - \{W\} - \{F,S,W\} - \{S\} - \{F,S\} - \varnothing$。

按照这条路,可以安排渡河:首先摆渡人带羊过河,留下狼和干草,然后人再回来,带着干草过河,把干草放在河东而把羊带回来,然后把羊放下,而把狼带过河去。最后,人再回来把羊带过河去。

图 G 中还有另外一条从 x 到 y 的路,按照这条路,可以给出另一种渡河方案,留给读者自己考虑。

例 2 在 $n \times n$ 的棋盘上,填上 $1 \sim n^2$ 的所有自然数。证明总能找到相邻的两个方格(具有公共边的两个方格称为是相邻的),里面所填的两数之差不小于 $\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$($\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数)。

证明 把每个方格作为顶点(n^2 个)并标上该方格所填的数,相邻的方格对应相邻的顶点,所得图记为 G。则只要证明该图 G 中存在一条边 e,而 e 的两个端点的标号数之差绝对值不小于 $\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$。

容易算得此图 G 的直径为

$$d(G) = (n-1) + (n-1) = 2(n-1)$$

即 G 中任意两个顶点之间有一条长度不超过 $2n-2$ 的路连接它们。

如果 G 中任意一条边的两端点标号数之差绝对值小于 $\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$,则 G 的任意两点的标号数之差的绝对值不超过

$$\begin{aligned} &2(n-1)\left[\left\{\frac{n+1}{2}\right\} - 1\right] \\ &< 2(n-1)\left[\left(\frac{n+1}{2} + 1\right) - 1\right] = n^2 - 1 \end{aligned}$$

但 G 中必有一个顶点的标号数为 n^2,一个顶点的标号数是 1。这两

个顶点的标号数之差绝对值是 n^2-1，与上矛盾。

所以 G 中至少有一条边 e_0 的两个端点标号数之差的绝对值不小于 $\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$。这条边 e_0 的两个顶点所对应相邻的两个方格里所填的两个数之差不小于 $\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$。

下面我们讨论如何走迷宫(从迷宫外面到达中心，或迷宫中的任何地方)。图 2.5 是奥伦治的威廉王的迷宫平面图(建于 1690 年，至今还屹立着)。

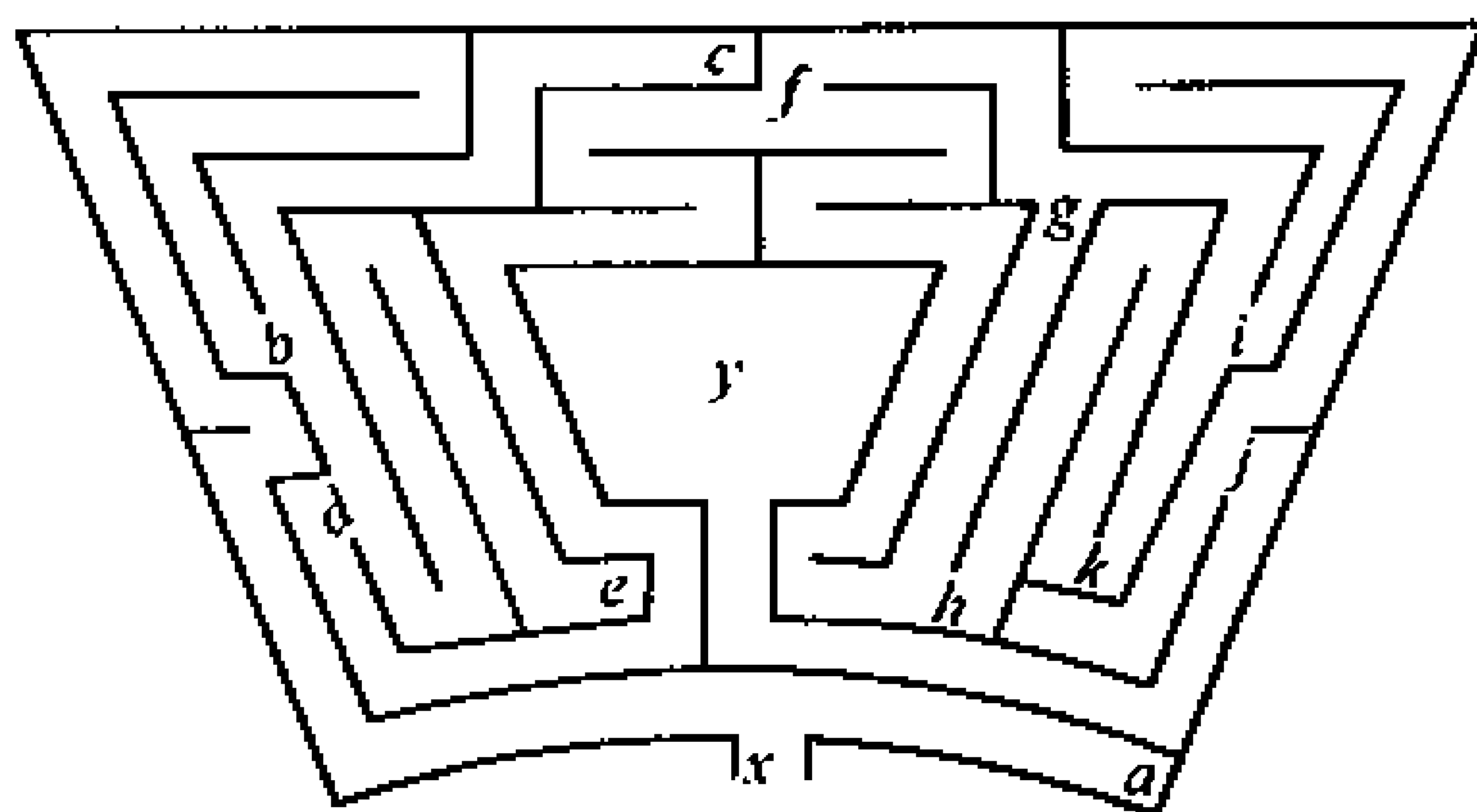


图 2.5

一座迷宫是带一些死角与岔口的回廊。如果把死胡同的底端及分岔点作为图的顶点，而把每一段回廊本身作为图的边，就得到图 G(如图 2.6 所示)。则要想到达迷宫的任何地方，就只要在图 G 中找出一条从 x 到这一点的路。在迷宫中沿这条路所对应的回廊与岔口就可以达目的地。如果还要求找一条从进口 x 到中心 y 的最佳行走方案，就要求在图 G 中找一条从 x 到 y 的最短路。

下面利用有向路的概念来证明一个数列问题。

例3 任意给定 $(n+1)^2$ 项的递增的自然数列。则下面的结论中必有一条是成立的。

(1) 存在 $n+3$ 项的子列，使任一项能整除此子列中它后面的

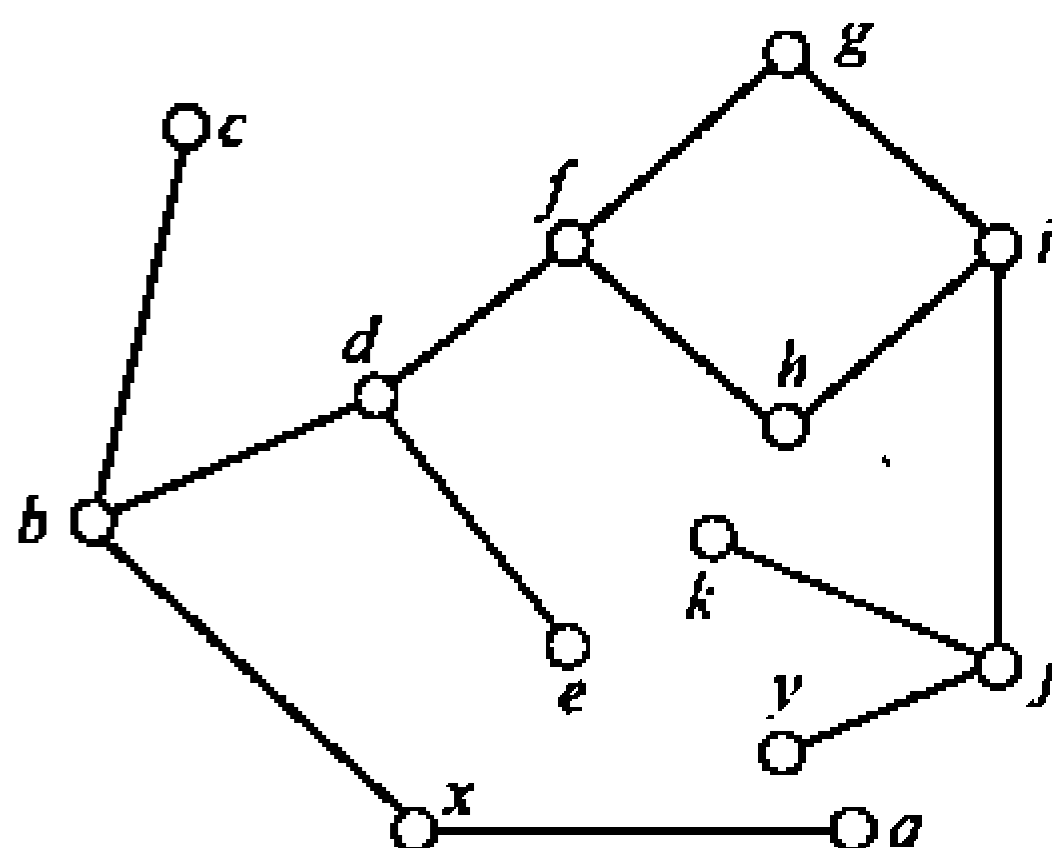


图 2.6

每一项；

(2) 存在 $n+1$ 项的子列，使此子列中任一项不能整除它后面的任何一项。

证明　设这 $(n+1)^2$ 项递增的自然数列为 $v_1, v_2, \cdots, v_{(n+1)^2}$。作一有向图 $D=(V,A)$，其中 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_{(n+1)^2}\}$，若 v_i 整除 v_j，就在 D 中引一条从 v_i 到 v_j 的弧 $(v_i, v_j)(i \neq j)$。明显地，这样构造的有向图无有向回路，而且具有结论(1) 的子列对应 D 中一条长为 $n+2$ 的有向路；具有结论(2) 的子列对应 D 中的 $n+1$ 个互不相邻的顶点。

对每一个顶点 v_i，考虑以 v_i 为起点的所有有向路，记其中最长的一条有向路的长为 $l(v_i)$。如果有某个 $l(v_i) \geqslant n+2$，则结论成立。如对一切 v_i，$l(v_i) \leqslant n+1$，记满足 $l(v_i)=j(0 \leqslant j \leqslant n+1)$ 的顶点 v_i 的个数为 $a(j)$。则

$$a(0)+a(1)+\cdots+a(n+1)=|V(G)|=(n+1)^2$$
$$=n(n+2)+1$$

因为

$$\frac{n(n+2)+1}{n+2}=n+\frac{1}{n+2}>n$$

所以必有一个 j_0，$0 \leqslant j_0 \leqslant n+1$，使 $a(j_0) \geqslant n+1$。即在 D 中至

少存在 $n+1$ 个顶点 $v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_{n+1}}$，使 $l(v_{j_k})=j_0$，$k=1,2,\cdots,n+1$。由假设，D 中以 v_{j_k} 为起点的最长有向路的长为 j_0，现可断定这 $n+1$ 个顶点互不相邻。否则，如有 $(v_{j_k},v_{j_i})\in A(D)$，$(0\leqslant k\neq i\leqslant n+1)$，则

$$l(v_{j_k})\geqslant l(v_{j_i})+1=j_0+1$$

矛盾。所以 $v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_{n+1}}$ 互不相邻，因此结论(2)成立。

2.2 连通图

定义 2.2.1 如果对图 $G=(V,E)$ 的任何两个顶点 u 与 v，G 中存在一条 $(u-v)$ 路，则称 G 是**连通图**，否则称为是**非连通图**。

例如，图 2.7 所示的 G_1 与 G_2 是连通的，而 G_3 是非连通图，因为在 G_3 中不存在 (x_1-y_1) 路。在 2.1 节中的威廉王迷宫所对应的图（见图 2.6 所示）是一个连通图，所以从迷宫的任何地方可以沿回廊到达其他任何地方。

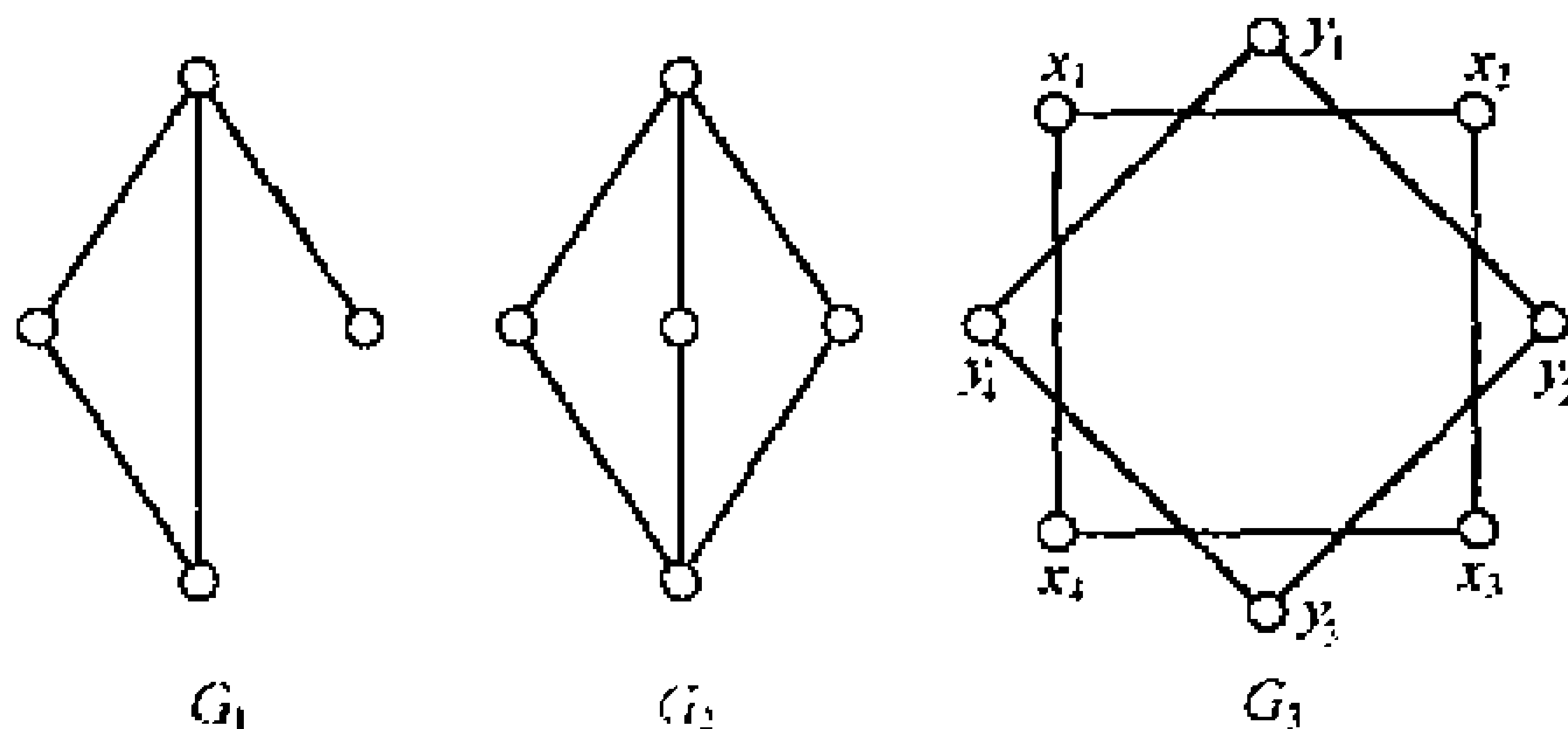


图 2.7

仅有一个顶点组成的图也看成是连通图。显然当 G 仅是一条路或一个回路时，G 是连通的。从连通的定义可知，至少有两个顶点的连通图不含孤立顶点。

对于每一个非连通图 G，我们可以把 G 分成几个子图 G_1，G_2，…，G_k，使得每个 G_i 是连通的，但不是 G 的任何连通子图的真子图($i = 1,2,\cdots,k$)。非连通图 G 的这些子图称为是 G 的连通分支。G 的连通分支个数记为 $w(G)$。例如，图 2.7 中的 G_3 有两个连通分支 G_{31} 与 G_{32}(见图 2.8 所示)，即 $w(G) = 2$。

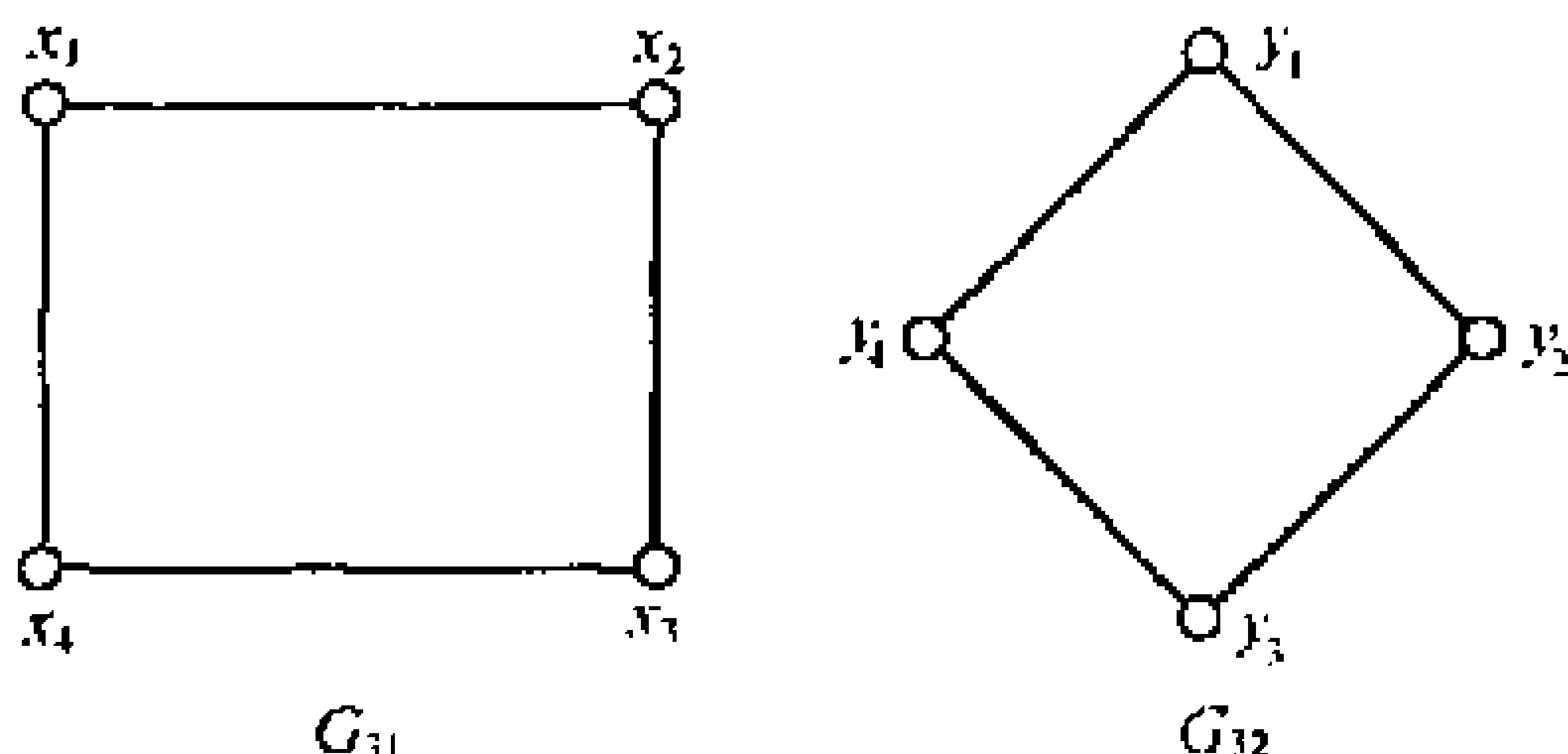


图 2.8

连通图可以看成是只有一个连通分支的图，即对连通图 G，有 $w(G) = 1$。

就直观而言，一个连通图要有较多的边连接其中的顶点。那么一个 p 阶连通图至少要有几条边？下面我们就讨论这个问题。

设 V_1 和 V_2 是 $V(G)$ 的两个不相交的子集，记

$[V_1, V_2] = \{e \mid e \in E(G), e$ 的两个端点分别在 V_1 和 V_2 中$\}$，则不难看出下面的结论成立。

引理 2.2.1 非平凡图 G 是连通图当且仅当对 $V(G)$ 的每一个非空真子集 S，$[S, \overline{S}] \neq \varnothing$ ($\overline{S} = V - S$)。

定理 2.2.2 设 G 是 p 阶连通图，则 $q(G) \geq p - 1$。

证明 显然只需考虑连通的简单图即可，否则只需考虑 G 的基础简单图。

设 $v_1 \in V(G)$，若 G 至少有两个顶点，则令 $V_1 = \{v_1\}$，由引理 2.2.1，知：$[V_1, \overline{V_1}] \neq \varnothing$，令 $e_1 \in [V_1, \overline{V_1}]$，不妨设 $e_1 =$

v_1v_2。取 $V_2=\{v_1,v_2\}$,若 V_2 是 $V(G)$ 的真子集,则存在 $e_2\in[V_2,\overline{V_2}]$,记 v_3 为 e_2 在 $\overline{V_2}$ 中的一个端点。再取 $V_3=\{v_1,v_2,v_3\}$,若 $V_3=V(G)$,结论已成立,否则与上一样可取到一条边 $e_3\in[V_3,\overline{V_3}]$,继续这一过程,便可找出 G 中的 $p-1$ 条边。即证明了 $q(G)\geqslant p-1$。 证毕。

下面讨论连通图与顶点度之间的若干关系。我们把度为 1 的顶点称为**悬挂点**。

定理 2.2.3 设连通图 G 至少有两个顶点,其边数小于顶点数,则此图至少有一个悬挂点。

证明 设 G 是满足定理条件的一个 p 阶图,显然 G 不含孤立顶点。若 G 没有悬挂点,则对每一个顶点 u,$d_G(u)\geqslant 2$,于是有

$$2q(G)=\sum_{u\in V(G)}d_G(u)\geqslant 2p$$

这与 $q(G)<p$ 相矛盾。故 G 中至少有一个悬挂点。 证毕。

其实定理2.2.2也可以用定理2.2.3对 $p(G)$ 进行归纳证明,证明留作习题。

定理 2.2.4 设简单图 G 的顶点序列为 $u_1,u_2,\cdots,u_p$,度数依次是 $d(u_1)\leqslant d(u_2)\leqslant\cdots\leqslant d(u_p)$。如果对任意的 $j\leqslant p-\Delta(G)-1$,有 $d(u_j)\geqslant j$,则 G 是连通图。

证明 反证法:设 G 非连通,令 G_1 是 G 中不含 u_p 的一个连通分支,$p(G_1)=k$,而 G_2 是 G 中含 u_p 的连通分支,则 G_2 至少有 $d(u_p)+1=\Delta(G)+1$ 个顶点,并且

$$p(G_1)+p(G_2)\leqslant p$$

$$k=p(G_1)\leqslant p-p(G_2)\leqslant p-\Delta(G)-1$$

则由假设,$d(u_k)\geqslant k$。若记

$$V(G_1)=\{u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_k}\},i_1<i_2<\cdots<i_k$$

则 $d(u_{i_k})\geqslant d(u_k)\geqslant k$,因而

$$p(G_1) \geqslant d(u_{i_k}) + 1 \geqslant k + 1$$

与 $p(G_1) = k$ 相矛盾，所以 G 是连通的。　　　　证毕。

由此定理即可得以下推论。

推论 2.2.5　设 G 是 p 阶简单图，每个顶点的度至少是 $\left[\frac{p}{2}\right]$，则 G 是连通图（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）。

定理 2.2.6　设 G 是一个连通的简单图，若 G 不是完全图，则 G 中存在三个顶点 u, v 和 w，使 $uv, vw \in E(G)$，但 $uw \notin E(G)$。

证明　由定理的条件可知 $p(G) \geqslant 3$ 且 G 中至少有两个不相邻的顶点，设为 u 和 x。因 G 是连通的，所以存在 $(u-x)$ 路。设 P 是 u 和 x 之间的一条最短路，若长为 2，则令 $w = x$，v 为 P 中的内部顶点，u, v 和 w 就是所要求的三个顶点，否则，记

$$P = uu_1u_2\cdots x$$

因 P 是 $(u-x)$ 最短路，故 u 和 u_2 不相邻，令 $v = u_1, w = u_2$，则 u, v 和 w 即为所求的三个顶点。　　　　证毕。

例 1　用一些圆面覆盖平面上取定的 $2n$ 个点。试证：若每个圆面至少覆盖 $n+1$ 个点，则任两个点能由平面上的一条折线所连接，而这条折线整个地被某些圆面所覆盖。

证明　构造图 $G = (V, E)$ 如下：V 就取平面上给定的 $2n$ 个点，两个不同的顶点如果含在同一个圆面上，就在这两个顶点之间连上一条边（边也含在这个圆面上）。所得图 G 是一个简单图，而且每个顶点的度至少是 n，即

$$\delta(G) \geqslant n = \left[\frac{2n}{2}\right]$$

由推论 2.2.5，G 是连通图，所以 G 中任两点之间有一条路连接。由 G 的构造，这条路被若干个圆面所覆盖。

我们也可以通过图的邻接矩阵来判别图的连通性。首先给出以下定理。

定理 2.2.7 设 $M(G)$ 是 G 的邻接矩阵，则 G 中连接 v_i 到 v_j 长度为 l 的途径数目等于 $M^l(G)=(a_{ij}^{(l)})_{p\times p}$ 中位于第 i 行、第 j 列处的元素值 $a_{ij}^{(l)}$。

证明 对 l 进行归纳。当 $l=1$ 时，结论是成立的。设对 $l=r$ 时，定理的结论亦成立。由 $M^{r+1}(G)=M(G)\cdot M^r(G)$，得

$$a_{ij}^{(r+1)}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}a_{kj}^{(r)}$$

由于 a_{ik} 是连接 v_i 与 v_k 长为 1 的途径的数目，而由归纳假设，$a_{kj}^{(r)}$ 是连接 v_k 到 v_j 长为 r 的途径的数目，所以 $a_{ik}a_{kj}^{(r)}$ 表示从 v_i 经过一条边到 v_k，再经过一条长为 r 的途径到达 v_j 的途径数目，这些途径数目的总长度为 $r+1$。对所有 k 求和，即得 $a_{ij}^{(r+1)}$ 就是所有连接 v_i 与 v_j 长为 $r+1$ 的途径的数目，由归纳原理，定理得证。 证毕。

推论 2.2.8 若 G 是简单图，则对每一个顶点 v_i，$i=1,2,\cdots,p$，有

$$d_G(v_i)=a_{ii}^{(2)}$$

证明 图 G 中与顶点 v_i 关联的边数等于从 v_i 到 v_i 长为 2 的途径数目，故由定理 2.2.7 知结论成立。 证毕。

给定图 G 的邻接矩阵 $M(G)$，作一个 p 阶方阵：

$$R(G)=M(G)+M^2(G)+\cdots+M^{p-1}(G)=(r_{ij})_{p\times p}$$

$R(G)$ 称为 G 的可达矩阵。从定理 2.2.7 容易看出 r_{ij} 就是 G 中连接 v_i 到 v_j 长度不超过 $p-1$ 的途径的数目，因而可以利用 $R(G)$ 来判断一个图的连通性。

定理 2.2.9 阶至少为 3 的图 G 是连通的充分必要条件为 $R(G)$ 中的每个元素都不等于零。

证明 设 G 是连通图，则 G 中任意两个不同的顶点 v_i 与 v_j 之间有一条路连接。若记这条路的长度为 l，显然 $l\leqslant p-1$。则 $r_{ij}\geqslant a_{ij}^{(l)}\geqslant 1$。而对于任意的 $i(1\leqslant i\leqslant p)$，因 G 连通，且 $p(G)\geqslant$

3,由推论 2.2.8 得

$$r_{ii} \geqslant a_{ii}^{(2)} = d_G(v_i) > 0$$

所以 $R(G)$ 没有零元素。

充分性的证明　设 v_i 与 v_j 是 G 中的任意两个不同的顶点。因为

$$r_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(p-1)} \neq 0$$

存在 $1 \leqslant l \leqslant p-1$,$a_{ij}^{(l)} \neq 0$($a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$),则在 G 中有一条长为 l 的途径连接 v_i 与 v_j,因而从 v_i 与 v_j 有一条路。这就证明了 G 是连通图。　　证毕。

对于无向图,它只能是连通或不连通之分。而对于有向图,则有各种不同的连通性。下面我们给出有向图中各种连通的概念。

定义 2.2.2　设 u 和 v 是有向图 D 的两个顶点,若有一条从 u 到 v 的有向路,则称 v 是从 u 可达的,或称 u 可达 v。

(1) 如果有向图 D 的任何两个顶点都互相可达,则称 D 是强连通的;

(2) 如果有向图 D 的任何两个顶点至少由一个顶点到另一个顶点可达,则称 D 是单向连通的;

(3) 若 D 的基础图 G_D 是连通的,则称 D 为弱连通的,简称 D 是连通图。

显然,每一个强连通图是单向连通的,而每一个单向连通图是弱连通的。

例如,图 2.9 中,(a) 是强连通图;(b) 是单向连通图;(c) 是弱连通图。

定理 2.2.10　设 D 是连通的有向图,则 D 是强连通的当且仅当 D 的每一条弧都含在某一有向回路中。

证明　设有向图 D 是强连通的,$a = (u,v)$ 是 D 中的任意一条弧。则 D 中存在一条从 v 到 u 的有向路 P,于是 $P \cup \{(u,v)\}$ 是一条含 $a = (u,v)$ 的有向回路。

反之,若 D 中的每一条弧均在某一个有向回路中。令 u,v 是

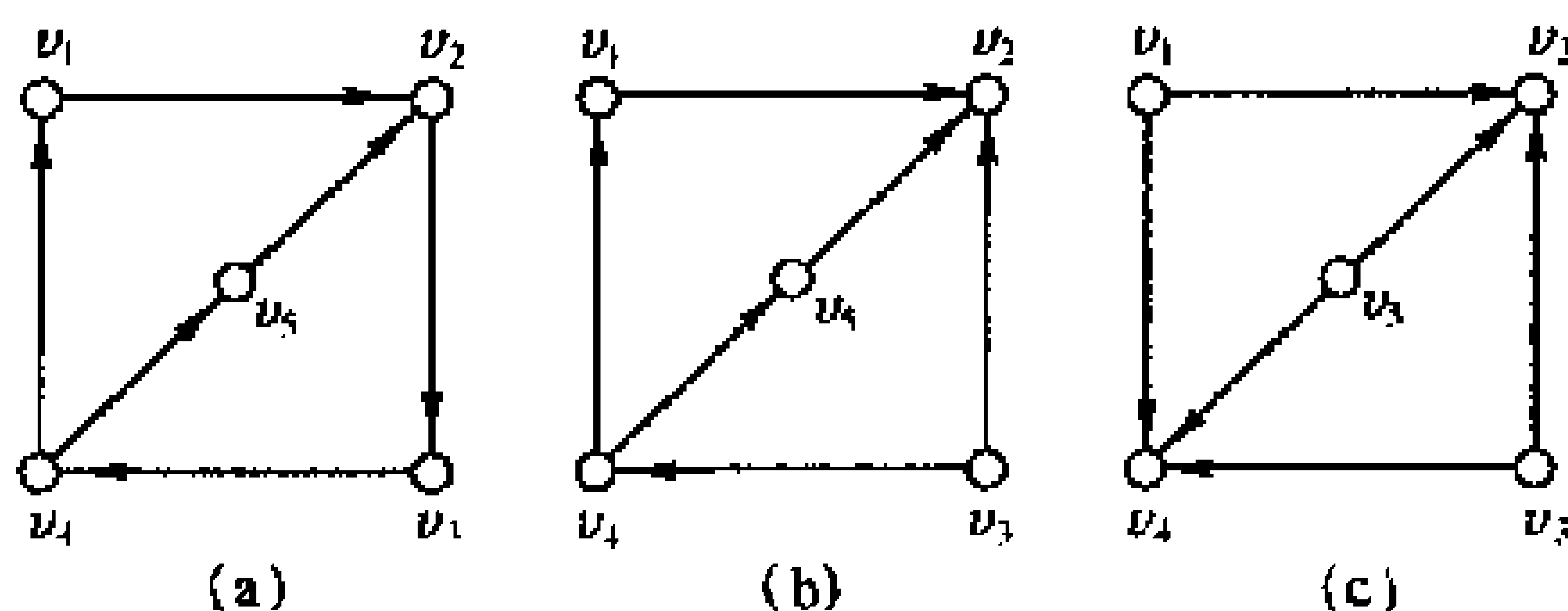


图 2.9

$\boldsymbol{D}$ 中任意两个顶点，我们可以在 $\boldsymbol{D}$ 中构造一条从 $\boldsymbol{u}$ 到 $\boldsymbol{v}$ 及从 $\boldsymbol{v}$ 到 $\boldsymbol{u}$ 的有向路 P_1 及 P_2。

当 $(u, v) \in A(D)$ 时，取 P_1 为 (u, v)，即为从 u 到 v 的有向路；因 D 中有一个有向回路 C 含弧 (u, v)，则取 P_2 为 $C-(u, v)$，即为从 v 到 u 的有向路。

当 u 与 v 在 D 中不相邻时，由于 D 是连通的，G_D 中存在一条从 u 到 v 的路 Q，记

$$Q = u_0 u_1 u_2 \cdots u_{k-1} u_k$$

这里 $u_0 = u, u_k = v$。按照 Q 的顶点标号顺序有 $(u_i, u_{i+1}) \in A(D)$ 或 $(u_{i+1}, u_i) \in A(D)(i = 0,1,\cdots,k-1)$。我们把 Q 中这样的弧 $(u_i, u_{i+1}) \in A(D)$ 称为 Q 的顺向弧，否则称为 Q 的逆向弧。

对 Q 中的每一条逆向弧 (u_{i+1}, u_i)，D 中存在一个含弧 (u_{i+1}, u_i) 的有向回路 C，则 $C-(u_{i+1}, u_i)$ 是 D 中一条从 u_i 到 u_{i+1} 的有向路 $P(u_i, u_{i+1})$。

现将 Q 中的每一条逆向弧 (u_{i+1}, u_i) 都用相应的有向路 $P(u_i, u_{i+1})$ 都用相应的有向路 $P(u_i, u_{i+1})$ 去替换，可得到一条从 $u_0 = u$ 到 $u_k = v$ 的有向途径 P'_1，利用这条有向途径便可得到一条从 u 到 v 的有向路 P_1。

同样可得 D 中一条从 v 到 u 的有向路 P_2，所以 D 是强连通的。

证毕。

2.3 连通度

上一节我们引进了图的连通概念，利用图的连通性，可以把图分成两类：一类是非连通图，另一类是连通图。然而，在所有的连通图中，它们的"连通程度"是很不相同的。考察图 2.10 所示的四个连通图。

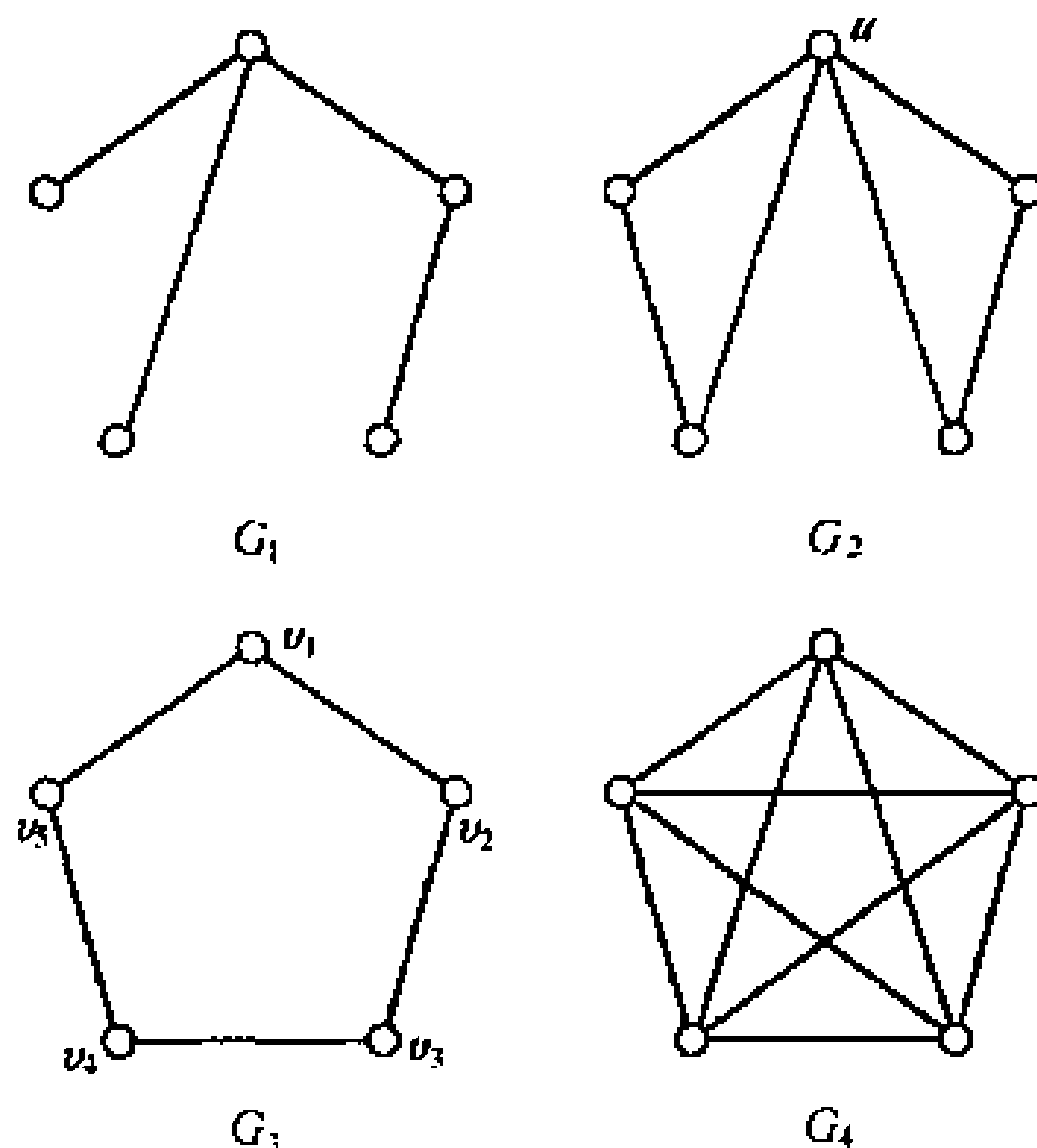


图 2.10

在这四个图中，G_1 是最"脆弱"的连通图，丢去任何一条边或任何一个非悬挂点都会使它成为不连通图；G_2 中虽然删去任何一条边后所得图仍连通，但存在一个顶点 u，使去掉 u 后所得图不连通；G_3 中，丢去任何一条边或一个顶点都不能使它成为非连通图；而 G_4 则是连通程度最高的一个图。

下面我们引进描述图的连通程度强弱的两个参数：点（边）连

通度。图的连通度不仅是图论中的重要概念之一，图的许多性质和图的连通性有着密切的关系。在构造可靠性较高的通讯网络中也起着重要作用。

定义 2.3.1 设连通图 $G=(V,E)$ 不是完全图，V_1 是 $V(G)$ 的一个非空真子集，若 $G-V_1$ 非连通，则称 V_1 是 G 的**顶点割**。若顶点割 V_1 含有 k 个顶点，也称 V_1 是 G 的 **k 顶点割**。

例如图 2.10 中，$\{u\}$ 是 G_2 的一个顶点割；$\{v_1,v_2,v_4\}$ 是 G_3 的一个顶点割，但 $\{v_1,v_2\}$ 不是 G_3 的顶点割。

定义 2.3.2 图 G 是 p 阶连通图，令

$$\varkappa(G)=\begin{cases}\min\left\{|V_1|\ \middle|\ V_1 \text{ 是 } G \text{ 的顶点割}\right\} & \text{若 } G\not\cong K_p\\ p-1 & \text{若 } G\cong K_p\end{cases}$$

称 $\varkappa(G)$ 为 G 的**连通度**。若 V_1 是 G 的一个 $\varkappa(G)$ 顶点割，则称 V_1 是 G 的一个**最小顶点割**。

从定义可知，一个连通图的连通度就是使这个图成为非连通图所需要去掉的最少点数。

例如，图 2.10 中，$\varkappa(G_1)=1$，$\varkappa(G_2)=1$，$\varkappa(G_3)=2$，$\varkappa(G_4)=4$。

如果图 G 非连通，规定 $\varkappa(G)=0$。

因此，$\varkappa(G)=0$ 的图或是平凡图，或是非连通图。如果 $\varkappa(G)=k>0$，则 G 一定是连通的。这时要么 G 是阶为 $k+1$ 的完全图；要么是 G 的阶不小于 $k+2$，G 中有 k 个顶点所构成的顶点割，但不存在由 $k-1$ 个顶点构成的顶点割，也即在 G 中任意去掉点数不超过 $k-1$ 的点子集后所得图仍连通。

定义 2.3.3 称 G 是 **k 连通的**，如果 $0<k\leqslant\varkappa(G)$。

1 连通图即为一切非平凡连通图。当图 G 为 k 连通时，要么 $p(G)=k+1$，且 $G\cong K_{p+1}$；要么 $p(G)\geqslant k+2$ 且 G 中不存在由 $k-1$ 个顶点构成的顶点割。因此有以下结论：

定理 2.3.1 图 G 是 k 连通的当且仅当 $p(G)\geqslant k+1$，并且对

$V(G)$ 的任意一个点数不超过 $k-1$ 的点子集 V'，$G-V'$ 仍是连通的。

类似地可以定义边连通度，首先定义边割。

定义 2.3.4 E_1 是连通图 G 的边子集，若 $G-E_1$ 非连通，则称 E_1 是 G 的边割。若边割 E_1 有 k 条边，则称 E_1 是 G 的一个 k 边割。

定义 2.3.5 连通图 G 的边连通度 $\lambda(G)$ 定义为

$$\lambda(G)=\begin{cases}\min\left\{|E_1|\ \middle|\ E_1 \text{ 是 } G \text{ 的一个边割}\right\} & \text{若 } G \ncong K_1\\ 0 & \text{若 } G \cong K_1\end{cases}$$

若 E_1 是 G 的一个 $\lambda(G)$ 边割，则称 E_1 是 G 的一个**最小边割**。

从定义可知，一个非平凡连通图的边连通度就是使这个图成为非连通图所需去掉的最少边数。

如果 G 是非连通图，规定 $\lambda(G)=0$。

因此，$\lambda(G)=0$ 的图要么是平凡图，要么是非连通图。$\lambda(G)=k$ 的图是指这样的连通图，其中恰有 k 条边组成的边割，但任何 $k-1$ 条边都不能构成一个边割，也即，在 G 中任意去掉一个边数不超过 $k-1$ 的边子集后所得图仍是连通图。

定义 2.3.6 称 G 是 k **边连通图**，如果 $0<k\leqslant\lambda(G)$。

从定义可见，1 边连通图即为一切非平凡的连通图。显然 k 边连通图（$k\geqslant 2$）是指这样的图；不存在由 $k-1$ 条边构成的边割，因而有：

定理 2.3.2 图 G 是 k 边连通图当且仅当对 $E(G)$ 的任意一个子集 E_1，若 $|E_1|\leqslant k-1$，则 $G-E_1$ 仍是连通图。

由定义立即可以看出，如果以 P_{p-1} 和 C_p 分别表示长为 $p-1$ 的路和长为 p 的回路，则 $\mathcal{K}(P_{p-1})=\lambda(P_{p-1})=1$。$\mathcal{K}(C_p)=\lambda(C_p)=2$，并且 $\mathcal{K}(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$。

以下讨论点、边连通度的几个简单性质：

定理 2.3.3 对简单图 $G=(V,E)$，$p=p(G)$，以下几条结论成立：

(1) $\kappa(G) \leqslant \delta(G), \lambda(G) \leqslant \delta(G)$;

(2) $\kappa(G) \leqslant p-1$,等号成立当且仅当 $G \cong K_p$;

(3) $\lambda(G) \leqslant p-1$,等号成立当且仅当 $G \cong K_p$;

(4) 对 G 的任意一个顶点 u,$\kappa(G)-1 \leqslant \kappa(G-u)$;

(5) 对 G 的任意一条边 e,$\lambda(G)-1 \leqslant \lambda(G-e) \leqslant \lambda(G)$。

证明 若 G 是 p 阶的完全图,则

$$\kappa(G)=\lambda(G)=\delta(G)=p-1$$

若 G 不是完全图,则 $\delta(G)<p-1$。设 $u \in V(G)$,使 $d_G(u)=\delta(G)$,则 $N(u)$ 与 $[\{u\}, V-\{u\}]$ 分别构成 G 的一个顶点割和边割,故

$$\kappa(G) \leqslant |N(u)|=\delta(G)$$

$$\lambda(G) \leqslant |[\{u\}, V-\{u\}]|=\delta(G)$$

这就证明了(1),(2)和(3)的不等式,(2)中等号自然成立。对于(3),若 $G=K_p$,令 E_0 为 K_p 的最小边割,即 $\lambda(G)=|E_0|$。则 $G-E_0$ 有且只有两个连通分支,设 G_1, G_2,由于 $G=K_p$ 为完全图,故 $|E_0|=|[V(G_1), V(G_2)]| \geqslant p-1$,即 $\lambda(G) \geqslant p-1$,所以,$\lambda(G)=p-1$。

(4) 在 G 中任取一个顶点 u,若 $G-u$ 非连通,则(4)已成立,否则设 V_0 是 $G-u$ 的一个最小顶点割,则由

$$(G-u)-V_0=G-(V_0 \cup \{u\})$$

非连通可知,$V_0 \cup \{u\}$ 是 G 的一个顶点割。故

$$\kappa(G) \leqslant |V_0 \cup \{u\}|=\kappa(G-u_0)+1$$

(5) 对 G 的任意一条边 e,$\lambda(G-e) \leqslant \lambda(G)$ 显然成立。与(4)类似可证得

$$\lambda(G)-1 \leqslant \lambda(G-e)$$ 证毕。

值得注意的是,不等式 $\kappa(G-u) \leqslant \kappa(G)$ 并非对一切图成立。例如,对图 2.11 中的图 G,$\kappa(G)=1$,但 $\kappa(G-u)=4$。

在图的连通度、边连通度和最小度之间存在一个简单的关系式:

定理 2.3.4 对任何简单图 G,都有

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

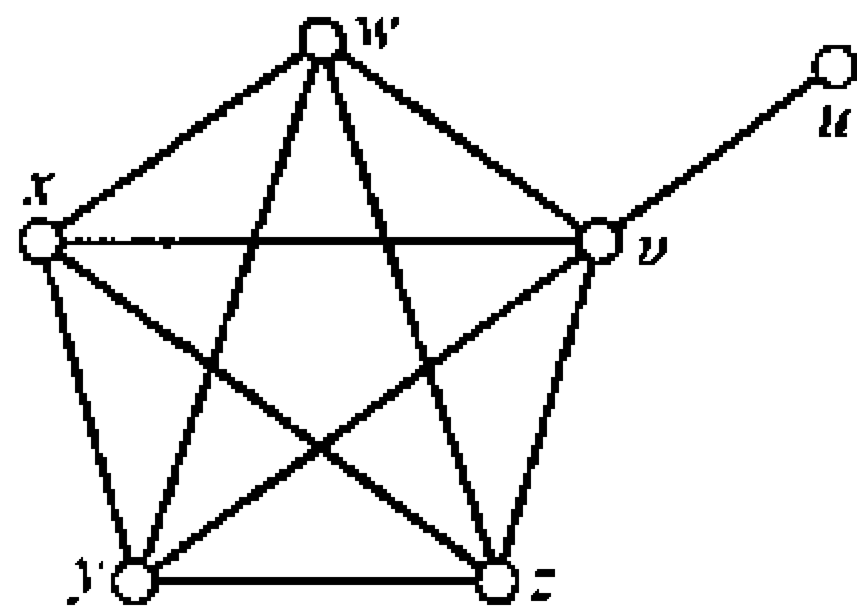


图 2.11

证明 由定理 2.3.3 知,$\lambda(G) \leqslant \delta(G)$。下面我们证明 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$。

如果 G 是非连通图或是平凡图,则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$,$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$ 成立。若 G 是 p 阶完全图,则 $\kappa(G) = \lambda(G) = p - 1$,$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$ 也成立。故下面我们只需要考虑 G 是连通而非完全图。

设 $E_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_{\lambda(G)}\}$ 是 G 的一个最小边割,则 $G - E_1$ 恰好有两个连通分支,记为 G_1 和 G_2(见习题2.20),并且 G_1 与 G_2 中分别存在一个顶点 $u \in V(G_1)$ 和 $v \in V(G_2)$,使 $uv \overline{\in} E(G)$,否则,记 $p(G_1) = p_1, p(G_2) = p_2 = p - p_1$,有

$$\lambda(G) = |E_1| \geqslant p_1(p - p_1) \geqslant p - 1$$

由定理 2.3.3 知,$G \cong K_p$,与假设矛盾。

现取 G 的一个点子集:

$V_1 = \{u_i \mid u_i$ 是不同于 u 和 v 且与 e_i 关联的一个顶点,$i = 1, 2, \cdots, \lambda(G)\}$

则

$$|V_1| \leqslant |E_1| = \lambda(G)$$

并且在 $G - V_1$ 中不存在 $(u - v)$ 路,所以 V_1 是 G 的一个顶点割,故

$$\kappa(G) \leqslant |V_1| \leqslant \lambda(G)$$ 证毕。

由这个定理可知,每一个 k 连通图也必然是 k 边连通图。

定理 2.3.4 中的不等式常常是严格成立的。例如,图 2.12 中的 G,有 $\kappa(G) = 2$,$\lambda(G) = 3$ 和 $\delta(G) = 4$。

下面我们讨论使 $\lambda(G) = \delta(G)$ 成立的充分条件。

定理 2.3.5 设 G 是 p 阶连通的简单图,若对于 G 的任意四

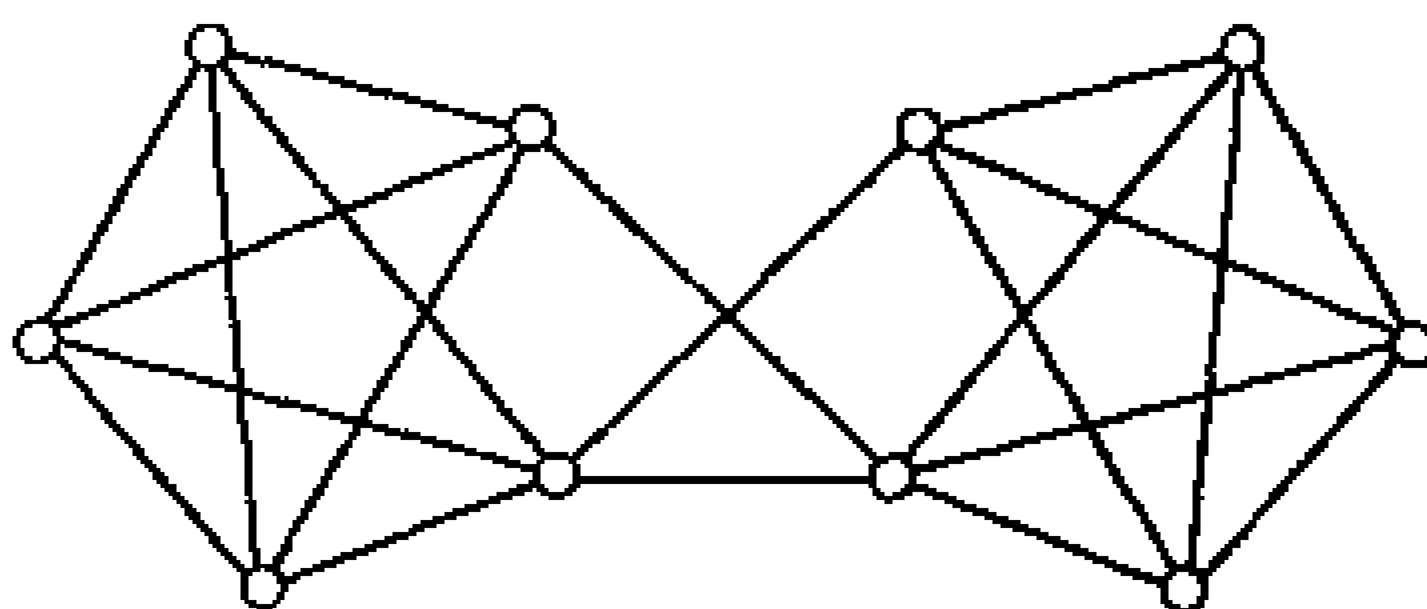


图 2.12

个顶点 u,v,x 和 y，由 $[\{u,v\},\{x,y\}]=\varnothing$ 就有

$$d(u)+d(v)+d(x)+d(y)\geqslant 2p-3 \tag{4}$$

则 $\lambda(G)=\delta(G)$。

证明 反证法：设 $\lambda(G)<\delta(G)$。令 E_1 是 G 的一个最小边割，$G-E_1$ 恰有两个连通分支 G_1 和 G_2，点数分别记为 p_1 和 p_2，不妨设 $p_1\leqslant p_2$，则 $p_1\leqslant\left[\frac{p}{2}\right]$。

下面我们来考虑 G_1 中各顶点在 G 中的度的总和。

一方面，由 $\delta(G)$ 的定义，有

$$\sum_{u\in V(G_1)} d_G(u)\geqslant\delta(G)p_1 \tag{5}$$

另一方面，分别考虑 G_1 和 E_1 中的边，有

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V(G_1)} d_G(u)&=\sum_{u\in V(G_1)} d_{G_1}(u)+|E_1|\\&\leqslant p_1(p_1-1)+\lambda(G)\end{aligned} \tag{6}$$

由式(5)和式(6)两式得

$$p_1\delta(G)\leqslant p_1(p_1-1)+\lambda(G)$$

或

$$\delta(G)\leqslant p_1-1+\frac{\lambda(G)}{p_1} \tag{7}$$

由假设 $\lambda(G)<\delta(G)$，故

$$\lambda(G)<p_1-1+\frac{\lambda(G)}{p_1}$$

或

$$(p_1-1)(p_1-\lambda(G))>0 \tag{8}$$

因此

$$p_1 \geqslant \lambda(G)+1$$

若 $p_1=\lambda(G)+1$，则由式(7)可得

$$\delta(G) \leqslant p_1-1+\frac{p_1-1}{p_1}$$

因此

$$\delta(G) \leqslant p_1-1=\lambda(G)$$

与 $\lambda(G)<\delta(G)$ 矛盾。于是必有 $p_1 \geqslant \lambda(G)+2$。该式表明 G_1 中至少有两个顶点设为 u 和 v，u 和 v 与 E_1 中的边不关联，因此 $d_G(u) \leqslant p_1-1$，$d_G(v) \leqslant p_1-1$。

因 $p_2 \geqslant p_1$，G_2 中也至少有两个顶点设为 x 和 y，x 和 y 与 E_1 中的边不关联，则 $d_G(x) \leqslant p_2-1$，$d_G(y) \leqslant p_2-1$。

对于 G 中的这四个顶点 u,v,x 和 y，有 $[\{u,v\},\{x,y\}]=\varnothing$，并且

$$d_G(u)+d_G(v)+d_G(x)+d_G(y) \leqslant 2p-4$$

这与式(4)相矛盾。

这就证明了 $\lambda(G) \geqslant \delta(G)$，再由定理 2.3.3(1)，$\lambda(G) \leqslant \delta(G)$，可知 $\lambda(G)=\delta(G)$。

推论 2.3.6 设 G 是 p 阶简单图，若对于 G 的任意两个不相邻的顶点 u 和 v，均有

$$d_G(u)+d_G(v) \geqslant p-1$$

则 $\lambda(G)=\delta(G)$。

证明 图 G 的连通性可参见习题2.12。由定理2.3.5即可得本结论成立。 证毕。

推论 2.3.7 设 G 是 p 阶简单图，若 $\delta(G) \geqslant \left[\frac{p}{2}\right]$，则 $\lambda(G)$

$= \delta(G)$。

证明 由推论2.2.5可知 G 是连通的，由定理2.3.5即可得此结论成立。 证毕。

定义 2.3.7 图 G 的一族路称为内不相交的，如果这族路中任意两条路除起点与终点外没有公共顶点。

定理 2.3.8 一个 $p \geqslant 3$ 阶的简单图 G 是2连通的充分必要条件是 G 的任两个不同顶点被两条内不相交的路所连接。

证明 充分性：设 G 的任两个不同顶点被两条内不相交的路所连，则 G 显然连通，并且不存在这样的顶点 v，使 $G-v$ 不连通。因此 G 是2连通的。

必要性：设 G 是2连通的。我们对任两个顶点 u 与 v 之间的距离用归纳法来证明这两个点之间有两条内不交的路连接。

当 $d(u,v)=1$ 时，$uv \in E(G)$。作 $G' = G - uv$，则由定理2.3.4得 $\lambda(G) \geqslant \kappa(G) \geqslant 2$，$G'$ 仍是连通图。因此在 G' 中存在一条 $(u-v)$ 路 P，这就得到 G 中的两条内不相交的 $(u-v)$ 路 P 和 $Q = uv$。

归纳假设对于距离小于 k 的任意两个顶点定理结论成立。现设 $d(u,v) = k(\geqslant 2)$。令

$$P_1 = u_0 u_1 u_2 \cdots u_{k-1} u_k$$

这里 $u = u_0$，$u_k = v$，P 是 G 中一条 $(u-v)$ 最短路，则 $d(u_0, u_{k-1}) = k-1$。由归纳假设，G 中存在两条内不相交的 $(u_0 - u_{k-1})$ 路 P_2 和 Q_1。

又因为 G 是2连通的，所以 $G - u_{k-1}$ 仍是连通图，$G - u_{k-1}$ 中存在 $(u_0 - u_k)$ 路 P'。设 P' 与 P_2 和 Q_1 的最后一个公共顶点是 x，不妨设 $x \in V(P_2)$（参见图2.13），于是 G 中存在两条内不相交的 $(u-v)$ 路 P 和 Q，分别是：

$$P = P_2(u_0, x) \cup P'(x, u_k)$$

$$Q = Q_1 \cup \{u_{k-1} v\}$$

证毕。

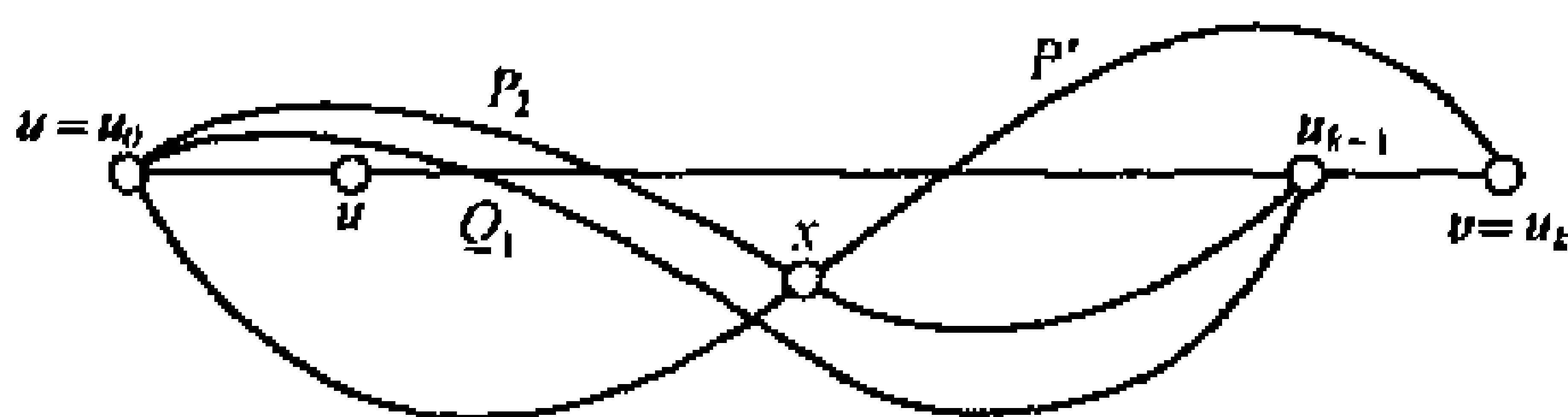


图 2.13

由于连接同一对顶点的两条内不相交的路形成一个回路，因此以下结论成立：

推论 2.3.9 一个 $p\geqslant 3$ 阶简单图 G 是 2 连通的充分必要条件是 G 的任意两个顶点含在 G 的某一个回路上。

定理 2.3.8 可推广到 k 连通图，名为 Menger 定理。

定理 2.3.10 一个 $p\geqslant k+1$ 阶简单图 G 是 k 连通的充分必要条件是 G 的任意两个不同顶点至少被 k 条内不相交的路所连。

此定理的证明需要网络流理论，我们将在后面给出该定理的证明。

关于 k 边连通图，也有类似的结论：

定理 2.3.11 连通图 G 是 2 边连通的充分必要条件是 G 的任意一条边含在某一个回路上。

定理 2.3.12 简单图 G 是 k 边连通的充分必要条件是对 $V(G)$ 的任意非空真子集 S，均有

$$|[S,\overline{S}]|\geqslant k$$

证明 必要性是明显的。因为对 $V(G)$ 的任一非空真子集 S，$[S,\overline{S}]$ 是 G 的一个边割，故

$$|[S,\overline{S}]|\geqslant \lambda(G)\geqslant k$$

充分性：设 E_1 是 G 的最小边割，则 $G-E_1$ 恰含两个连通分支，设为 G_1 和 G_2，记 $V_1=V(G_1)$。则 $V(G_2)=V(G)-V_1=\overline{V}_1$，并且 $E_1=[V_1,\overline{V}_1]$。根据给定的条件以及 E_1 的假设，我们有

$$\lambda(G)=|E_1|=|[V,\overline{V}_1]|\geqslant k$$

所以 G 是 k 边连通图。 证毕。

2.4 可靠通讯网络的构造

我们要构造一个有线通讯网络，使得对于给定的正整数 k，任意的 k 个通讯站(或 k 条通讯线路) 的失灵，不影响其余通讯站的正常联络。我们希望在总的造价给定的情况下，k 越大越好，因为此时该通讯网络的可靠性达到最高的要求。或在 k 确定的情况下，要求总的造价最小。这就是通讯网络的可靠性问题。这个问题归结为以下图论问题。

设 k 是给定的正整数，G 是赋权图。试确定 G 的一个具有最小权的 k - 连通生成子图。

这里 G 的子图 H 的权规定为

$$w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e)$$

对 $k = 1$，这个问题简化为 § 3.3 的求 G 的最优生成树的问题。当 $k > 1$ 时，这是个尚未解决的难解问题之一。然而当 $G = K_p$ 且每条边的权为1时，Harary于1962年解决了这一问题。下面介绍 Harary 的工作。

注意到对于有 p 个顶点、每条边的权均为 1 的赋权完全图而言，它的具有最小权的 k - 连通生成子图只不过是一个有 p 个顶点，而边数最少的 k - 连通图。记

$$f(k, p) = \min\{q(G) \mid G 是 p 阶 k - 连通图\}$$

当然假设 $k < p$。由 $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2q(G)$ 和 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$，有

$$f(k, p) \geqslant [kp/2]$$

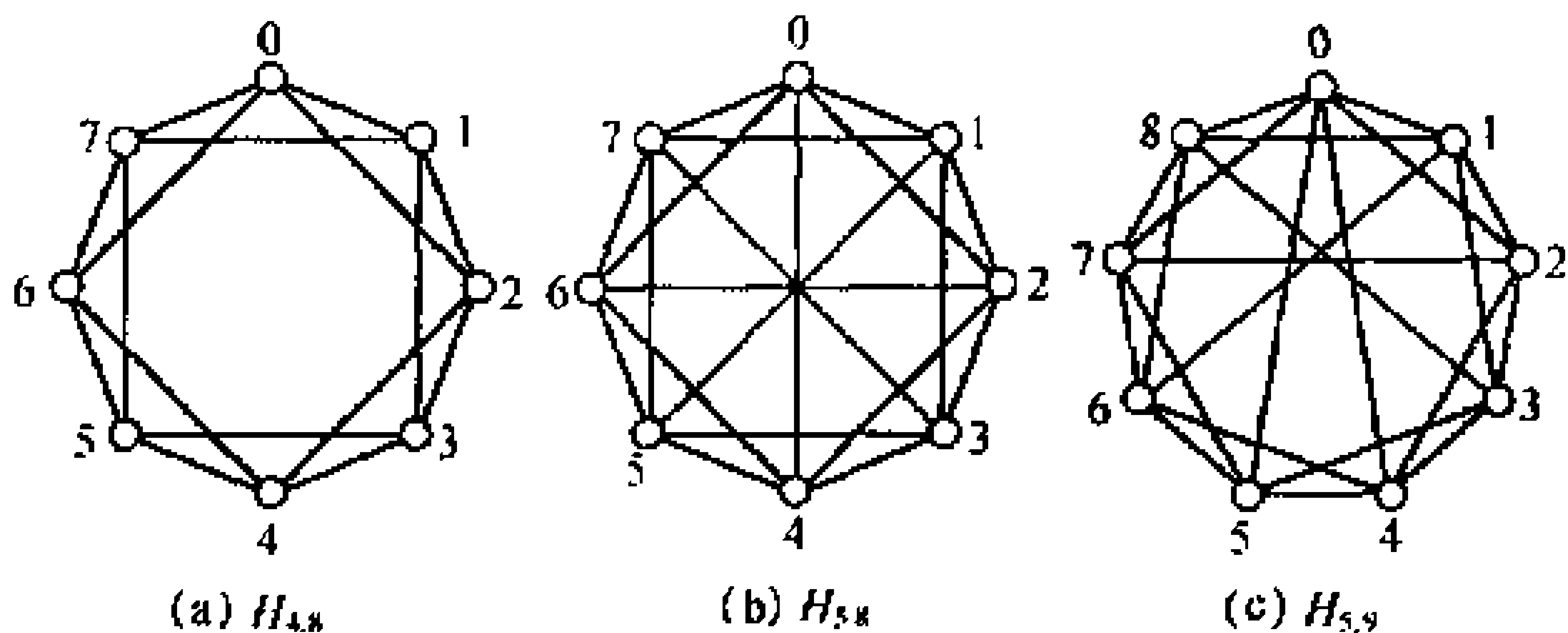
Haray实际构造出一个 p 个顶点的 k - 连通图 $H_{k,p}$，它的边数恰好为 $\{kp/2\}$ 条，因而有 $f(k, p) = \{kp/2\}$。根据 k 和 p 的奇偶

性，分三种情形：

(1) k 是偶数，设 $k=2r$。$H_{2r,p}$ 以 $\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 为顶点集。当 $i-r\leqslant j\leqslant i+r$ 时（这里加法在 $\mathrm{mod}\,p$ 意义下进行），在顶点 i 与 j 之间连一条边。如 $H_{4,8}$ 在图 2.14(a) 中所示。

(2) k 是奇数，$k=2r+1$，p 是偶数。先构造一个 $H_{2r,p}$，然后对 $1\leqslant i\leqslant p/2$ 的 i。在 i 与 $i+p/2$ 间加上一条边得 $H_{2r+1,p}$。如 $H_{5,8}$ 在图 2.14(b) 中所示。

(3) k 是奇数，$k=2r+1$，p 是奇数。先构造 $H_{2r,p}$，然后在顶点 0 与 $\frac{p-1}{2}$，0 与 $\frac{p+1}{2}$ 之间加上边，在顶点 i 与 $i+\frac{p+1}{2}$ 间加上边，其中 $1\leqslant i\leqslant\frac{p-1}{2}$，则得到 $H_{2r+1,p}$。如 $H_{5,9}$ 在图 2.14(c) 中所示。



(a) $H_{4,8}$　　(b) $H_{5,8}$　　(c) $H_{5,9}$

图 2.14

定理 2.4.1　$H_{k,p}$ 是 k – 连通图，且边数最少。

证　当 $k=2r$ 时，我们来证明 $H_{2r,p}$ 没有少于 $2r$ 个顶点的点割集。反证法，若 V' 是 $H_{2r,p}$ 的一个点割集，且 $|V'|<2r$，又设 i 与 j 分别在 $H_{2r,p}-V'$ 的两个不同分支中。令

$$S=\{i,i+1,\cdots,j-1,j\}$$

$$T=\{j,j+1,\cdots,i-1,i\}$$

其中加法在 modp 下进行。因为 $|V'|<2r$，故 $|V'\cap S|<r$ 或 $|V'\cap T|<r$，不失一般性，设 $|V'\cap S|<r$。这样，显然在 $S-$

V' 中有一个由不同顶点构成的序列，它开始于 i 而终止于 j，并且任意两个相继顶点标号之差的绝对值至多是 r。根据 $H_{2r,p}$ 的构造，这一序列是一条从 i 到 j 的路，而这条路整条含在 $H_{2r,p}-V'$ 中，导致矛盾。因此 $H_{2r,p}$ 是 $2r$ – 连通的。类似可以证明：当 $k=2r+1$ 时，$H_{2r+1,p}$ 是 $(2r+1)$ – 连通的。由于

$$f(k,p) \geqslant \left\{\frac{kp}{2}\right\}, \quad q(H_{k,p}) = \left\{\frac{kp}{2}\right\}$$

而 $H_{k,p}$ 是 p 阶 k – 连通图，故有

$$f(k,p) \leqslant \left\{\frac{kp}{2}\right\}$$

从而推得

$$q(H_{k,p}) = f(k,p) = \left\{\frac{kp}{2}\right\}$$

证毕。

注意到 $k(G) \leqslant \lambda(G)$，故 $H_{k,p}$ 也是 k – 边连通图。若用 $g(k,p)$ 表示 p 个顶点，k – 边连通图中的最少边数，则对于 $1<k<p$，$g(k,p)=\left\{\frac{kp}{2}\right\}$。

2.5 最短路问题

给定连接若干城市的铁路（公路）网，找一条给定两城市间的最短铁路（公路）路线，这是个极普通的实际问题：最短路问题。该问题的数学模型如下：

给定一个网络 N（有向或无向），u_0 与 v_0 是 N 中指定的两个顶点，在 N 中找一条从 u_0 到 v_0 且权最小的 (u_0-v_0) 路。

为了方便，规定 N 中的一条路 P 的权 $w(P)$ 称为 p 的长度。若 N 中存在 $x-y$ 路，则将 N 中权最小的 $(x-y)$ 路称为 $(x-y)$ 最短路，其长度称为 x 与 y 的距离，记为 $d_N(x,y)$。

下面先介绍在无向网络即赋权图 $G=(V,E,W)$ 中，求顶点

$u_0 \in V(G)$ 到连通图 G 的各个顶点最短路的一个有效算法。

所谓算法，是指一组有序规则，它准确告知，为解决给定的问题，何时应做何种操作。图论算法的设计和分析是一个引人入胜的领域，也是与计算机科学技术关系最为密切的领域之一。多年来，许多学者对任何图论问题都想找到一个有效算法来解决，可惜至今大家只是部分地得到成功。所谓的有效算法，又称好算法，按 Edmonds 的定义，是指对于给定的问题（本书仅介绍图论问题的若干算法），该问题的图论算法的计算量 $f(p,q) = 0(P(p,q))$（这里 $P(p,q)$ 是关于 p 和 q 的多项式），其中 p 与 q 分别是某个图的顶点数和边数。

现在给出--个求解最短路问题的有效算法：Dijkstra(1959) 算法。该算法是目前公认的最好算法，它不仅求出从 u_0 到其余顶点的距离，最后还可确定出 u_0 到其余各项点的最短道路。

根据实际问题的需要，显然只需讨论简单图的最短路问题就够了。还可假定所有边的权均为正的，因为若某条边的权为 0，则可使其端点重合。按照常规，当 $uv \notin E(G)$ 时，规定 $w(uv) = +\infty$。

Dijkstra 算法的步骤：开始，给始点 u_0 一个标号 $l(u_0) = 0$，而对 $v \neq u_0$，则有 $l(v) = +\infty$（在实际计算中，$+\infty$ 可以被一足够大的任意数值所代替）。在算法进行时，这些标号不断被修改：在第 i 步结束时，对已选定的顶点 $u \in S_i$，有

$$l(u) = d(u_0, u)$$

而对其余顶点 $v \in \overline{S}_i$，有

$$d(u_0, v) \leqslant l(v) = \min_{u \in S_{i-1}} \{d(u_0, u) + w(uv)\}$$

Dijkstra **算法**

(1) 置 $l(u_0) = 0$，对 $u \in V - \{u_0\}$，$l(v) = +\infty$，$S_0 = \{u_0\}$，$i = 0$。

(2) 对每一个 $v \in N_{\overline{S}_i}(u_i)$，用 $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i v)\}$ 代替

$l(v)$。如果 $l(v)$ 取到 $l(u_i)+w(u_iv)$，则在 v 旁边记下 (u_i)。计算 $\min_{v\in \bar{S}_i}\{l(v)\}$，并把达到最小值的这一个顶点记为 u_{i+1}。置 $S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$。

(3) 若 $i=p(G)-1$，则停止。否则用 $i+1$ 代替 i，并转入第二步。

当算法结束时，从 u_0 到 v 的距离由最终的标号 $l(v)$ 给出，并且可根据各个顶点旁边的 (u_i) 追回出从顶点 v 到 u_0 的最短路。若我们的兴趣在于确定到某一特定顶点 v_0 的距离，则当某 u_j 等于 v_0 时立即停止。该算法的框图如图 2.15 所示。

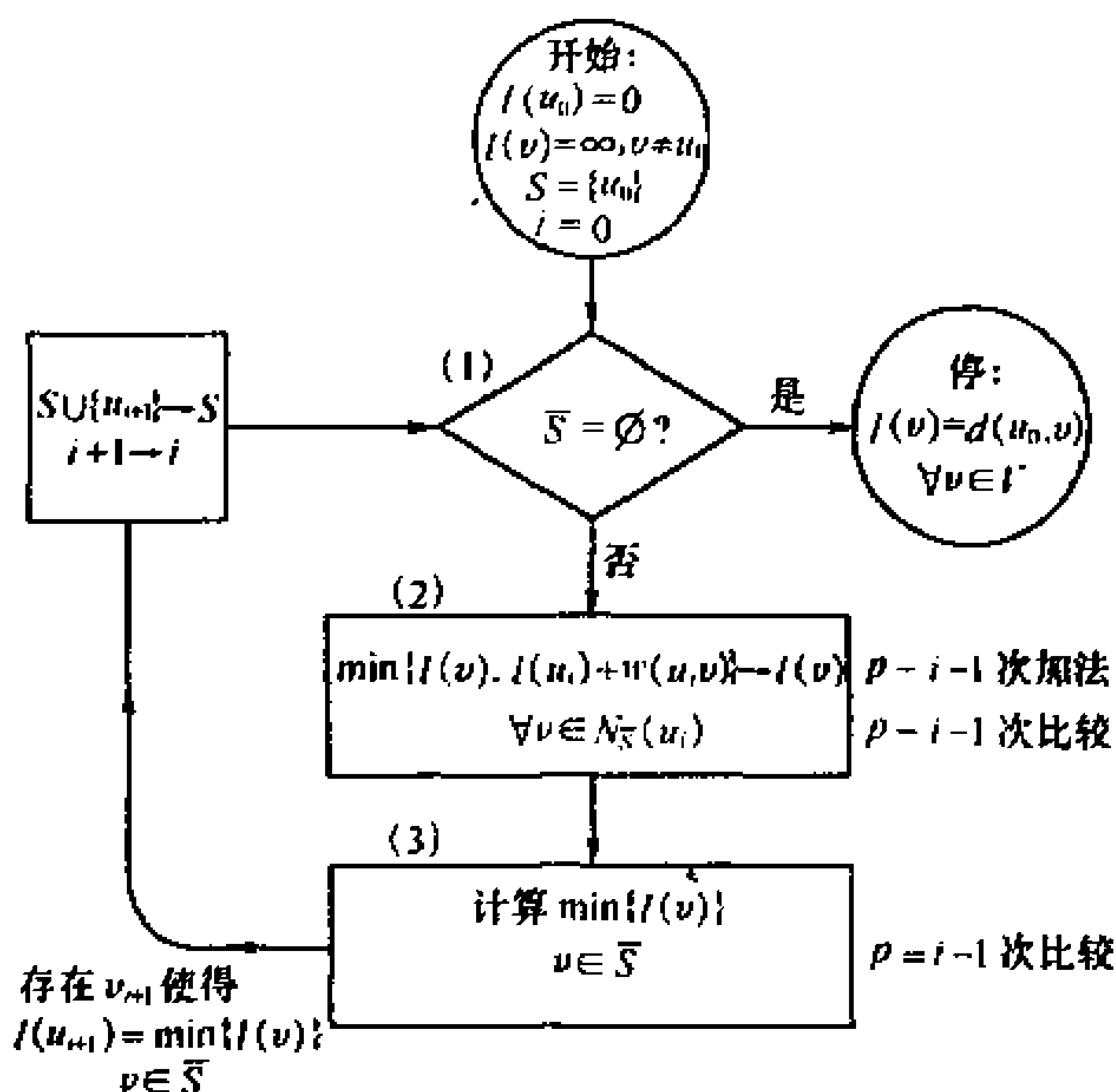


图 2.15

通过该框图，容易计算出该算法的计算量 $f(p,q)=O(p^2)$，所以是有效算法。

Dijkstra 算法只求出图中一个特定顶点 u_0 到所有其它顶点的最短路。但在许多实际问题中,需研究任意两点之间的最短中的求法问题,如全国各城市之间最短的航线、选址问题等。这问题就是图论中的距离表问题。

其实,要求出一个图的任意两点间的最短路,只需将图中每一个顶点依次视为始点,然后用 Dijkstra 算法就可以。但这要用到大量的计算。下面我们简单介绍另一个较好一些的算法:Floyd(1962) 算法。

首先取 $D^{(0)} = (l_{ij}^{(0)})_{p\times p}$,称为 G 的边权矩阵。这里 $l_{ij}^{(0)} = w(v_iv_j), 1 \leqslant i, j \leqslant p$。

然后计算出 p 个矩阵 $D^{(1)}, D^{(2)}, \cdots, D^{(p)}$

其中

$$D^{(k)} = (l_{ij}^{(k)})_{p\times p}, k = 1,2,\cdots,p$$

$$l_{ij}^{(k)} = \min\{l_{ij}^{(k-1)}, l_{ik}^{(k-1)} + l_{kj}^{(k-1)}\}$$

这时,$D^{(p)}$ 中的元素 $l_{ij}^{(p)}$ 之值就是顶点 v_i 与 v_j 之间的最短路之值 $d(v_i, v_j)$。

以上所介绍的求无向网络最短路的 Dijkstra 算法容易推广到求有向网络 $N = (V, A, W)$ 中的最短路。为方便,假设 N 中不含长度非正的有向回路。

在不含非正回路的有向网络 $N = (V, A, W)$ 中,其中 $V = \{1,2,\cdots,n\}$ 为顶点的集合,而 A 为弧的集合,若用 U_j 和 U_k 分别表示自点 1 到点 j 和点 k 的最短有向路的长度,用 w_{kj} 表示弧 (k, j) 的长度或权,若 $(k, j) \overline{\in} A$,则 $w_{ij} = +\infty$),且对一切 $j \neq k$, $j, k = 2,3,\cdots,n$,有

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_j \leqslant U_k + w_{kj} \end{cases} \tag{1}$$

且 $U_j = U_k + w_{ij}$ 当且仅当弧 (k, j) 在自点 1 到点 j 的最短有向

路上。

因为诸 U_j 是N 中自点 1 到点 j 的最短有向路的长度，所以这条最短有向路必有最后一条弧(k,j)，而且该有向路上自点 1 到 k 的一段也必是最短有向路，从而式(1) 可写为

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_j = \min\limits_{k \neq 1}\{U_k + w_{kj}\}, j = 2,3,\cdots,n \end{cases} \tag{2}$$

这说明，网络 N 中自点 1 到各点的最短有向路的长度必满足式(2)，即它们是方程式(2) 的一组解。

现在，我们要问：式(2) 的解是否是自点 1 到其余各点的最短有向路的长度呢？下面的定理 2.5.1 回答了这个问题。

定理 2.5.1 设有向网络 N 中不含非正有向回路，并且从点 1 到其余各点都有有限长的有向路，那么式(2) 有惟一的有限解 $\{U_j\}$。

证明 设$\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$为式(2) 的任一组有限解。对任一 U_j，我们可以在 G 中找出点 1 到 j 的有向路。

$$P = (1,i_1)(i_1 i_2)\cdots(i_{k-1},i_k)(i_k,j)$$

使得

$$U_{i_1} = U_1 + w_{1i_1}, U_{i_2} = U_{i_1} + w_{i_1 i_2}$$
$$\vdots$$
$$U_{i_k} = U_{k-1} + w_{i_{k-1}i_k}, U_j = U_{i_k} + w_{i_k j}$$

若式(2) 的解不惟一，设 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 是自点 1 到各点的最短有向路的长度。因此，它是式(2) 的一组解。设 $U'_1,U'_2,\cdots,U'_n$ 是不同于 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 的另一组解，那么必存在某一 j，使 $U_j \neq U'_j$。U_j 是自点 1 到点 j 的最短有向路的长度。而 U'_j 是自点 1 到点 j 的某一有向路的长度，则有 $U'_j > U_j$。在 $U'_j > U_j$ 的所有 j 中，总可以选取某个 j，使(k,j) 是自点 1 到点 j 最短有向路上的弧，且 $U'_k = U_k$(因为 $U'_1 = U_1$，所以这样的弧一定存在)，从而

有

$$U'_j > U_j = U_k + w_{kj} = U'_k + w_{ij}$$

这与 $U'_1, U'_2, \cdots, U'_n$ 为式(2) 的解相矛盾。　　　　证毕。

然而，直接求解方程式(2) 是很困难的。目前几乎所有求最短有向路的算法，都是围绕着怎样解这个方程的问题。

对于某些特殊的有向网络，方程式(2) 可以简化，从而变得较易求解。

定理2.5.2　设 U_j 是有向网络N中自点1到j的最短有向路的长度，并且对所有的 $j = 1,2,3,\cdots,n$，U_j 为有限值。若网络 N 中除点 1 外的其余各点能重新编写成如下的序号 $2,3,\cdots,n$，使得对所有 $i < j$，成立

$$U_i \leqslant U_j \text{ 且 } w_{ji} \geqslant 0$$

或者

$$U_i > U_j \text{ 且 } w_{ji} = +\infty \text{，即}(j,i) \overline{\in} A$$

则方程式(2) 可简化为

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_j = \min\limits_{k<j} \{U_k + w_{kj}\}, j = 2,3,\cdots,n \end{cases} \tag{3}$$

显然，式(3) 比式(2) 更容易求解，因为 $U_1 = 0$ 是已知的，而 U_2 只依赖于 U_1，U_3 只依赖于 U_1 和 U_2，…，一般地，U_j 只依赖于

$$U_1, U_2, \cdots, U_{j-1}$$

所以，可用代换方法依次求出 $U_2, U_3, \cdots, U_n$。由此可见，找出有向网络中各点的满足定理 2.5.2 的顺序是问题的关键。

下面我们介绍求最短的有向路的 Dijkstra 算法。

Dijkstra 算法仅适用于在弧权为正值的有向网络中求最短有向路。一个弧权为正值的有向网络显然具有如下性质：

定理 2.5.3　设 $N = (V, A, W)$ 是一个弧权为正值的有向网络，其中 $V = \{1,2,3,\cdots,n\}$。则在 N 中，任意一条最短有向路

的长都大于它的真子有向路的长。

根据定理2.5.3，N中自点1到其他各点最短有向路的长可按大小排列如下：

$$0 = U_1 \leqslant U_2 \leqslant \cdots \leqslant U_n$$

于是，它满足定理2.5.2的条件，因此可以用方程式(2)来求解。具体算法如下：

(1) 置 $P = \{1\}, T = \{2,3,\cdots,n\}$，且

$$U_1 = 0, U_j = w_{1j}, j = 2,3,\cdots,n$$

(2) 在 T 中寻找一点 k，使得

$$U_k = \min_{j \in T}\{U_j\}$$

置 $P = P \cup \{k\}, T = T - \{k\}$。若 $T = \varnothing$，终止。否则，进行(3)。

(3) 对 T 中每一点 j，置

$$U_j = \min\{U_j, U_k + w_{kj}\}$$

然后返回(2)。

例1 求图2.16中点1到其他各点的最短有向路长。

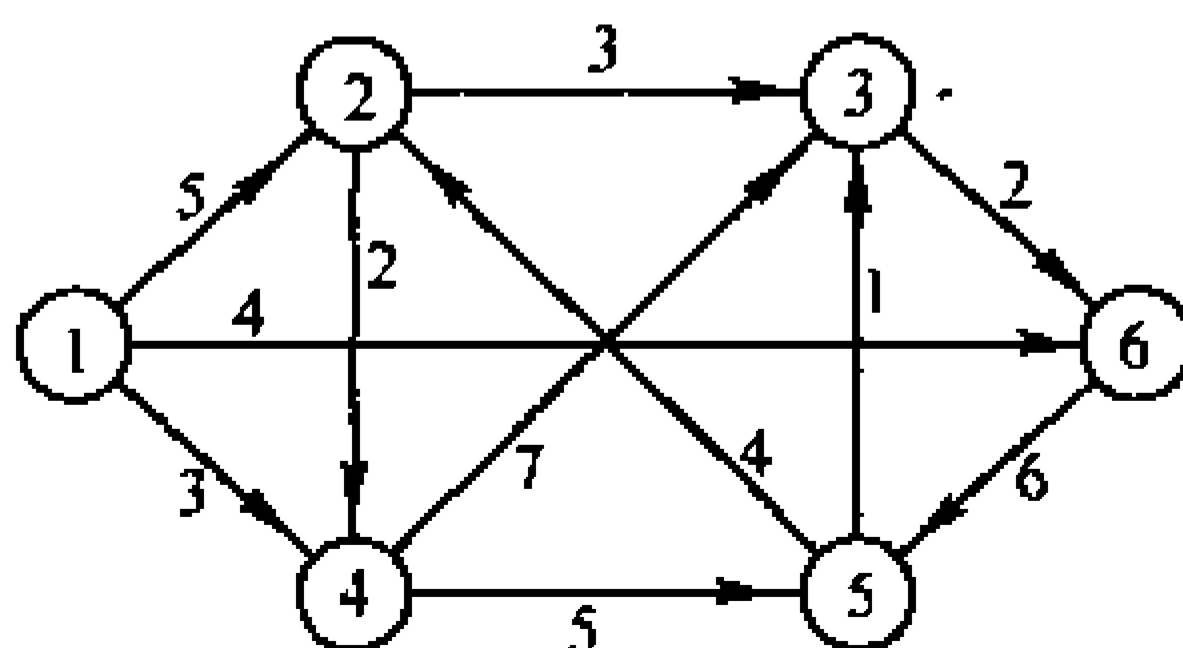


图 2.16

用Dijkstra算法的迭代过程见图2.17，点内的数字表示 U_j，粗弧构成相应的最短路。

这个算法经过 $n-1$ 次循环必结束。

最短路问题在实际工作中还有其他许多应用。例如，通讯网络中最可靠路问题，最大容量问题，统筹方法中求关键路线，以及背

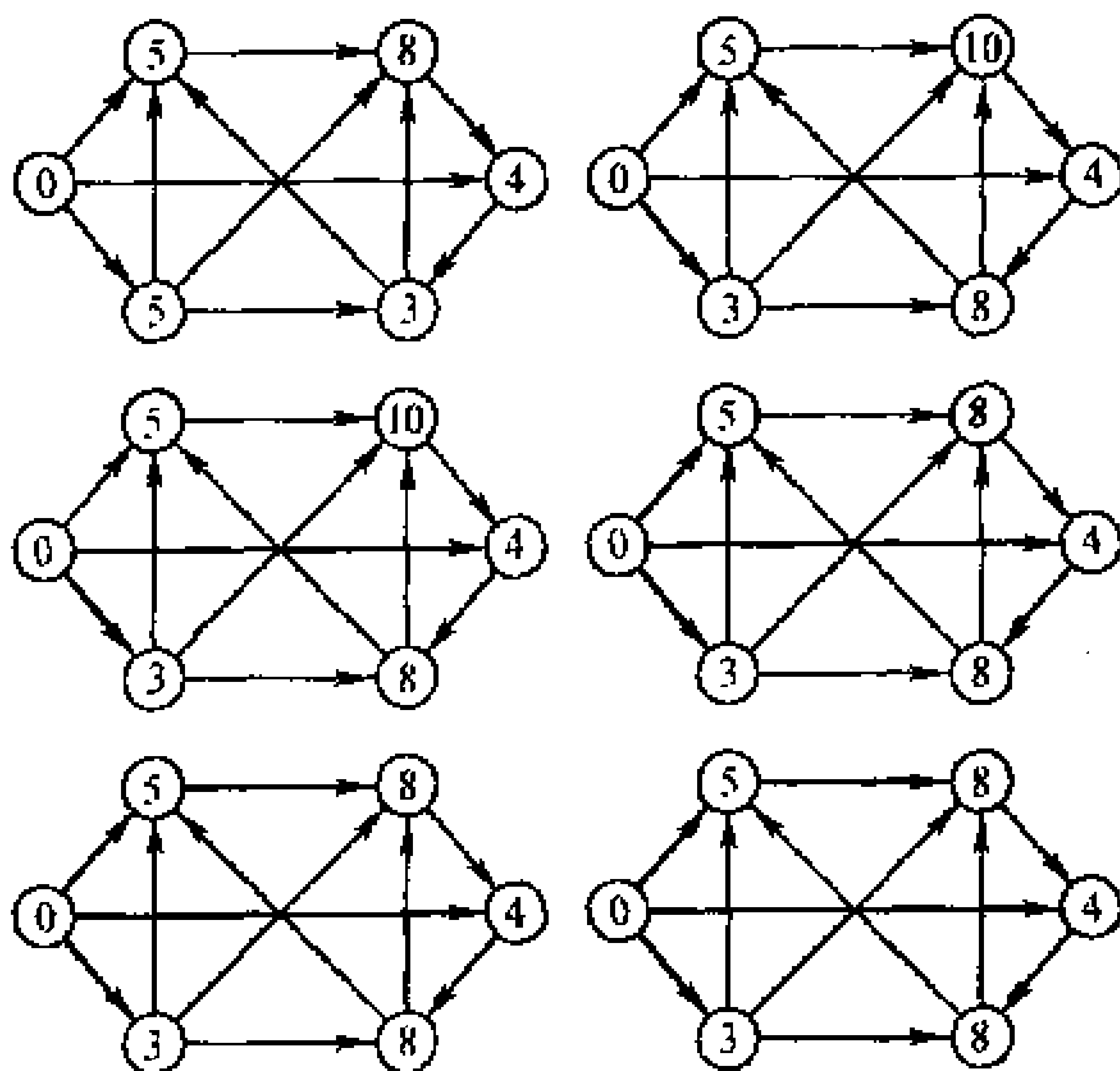


图 2.17

包问题和选址问题都可化为求最短有向路问题。另外,某些工件加工顺序问题,中国邮递员问题等都要用最短有向路算法做其子程序。因此,最短路的用途已远远超出了其直观的意义。下面将介绍一些应用。

1) 最可靠有向路

给定一个通讯网络 N,它的每一条支路(或弧)(i,j) 有一个完好概率 p_{ij}。从发点 1 到收点 n 的任意一条有向路的可靠性定义为该有向路上所有弧上概率的乘积,那么我们的问题是寻求从点 1 到点 n 的最可靠的有向路。

这个问题很容易化为最短有向路的问题。因为 $1 \geqslant p_{ij} > 0$,故取 $w_{ij} = -\log p_{ij}$,以 w_{ij} 表示有向网络中弧(i,j) 的长度。那么可以用 Dijkstra 方法求自点 1 到 n 的最短有向路,这条最短有向路就是通讯网络中最可靠的有向路。

2）设备更新问题

某企业使用一台设备，每年年初，企业领导总要考虑是购买新设备，还是继续使用旧设备。若购置新设备，就要支付购买费，若使用旧的，就要支付一笔维修费。具体需多少，根据该设备使用的年数决定。现在的问题是如何制定一个几年之内的设备更新计划，使得支付的总费用最少。表 2.1 给出了企业对该种设备的维修费用，表 2.2 给出了在不同年代购买该种设备所需的费用，试给出该企业五年内的设备更新计划。

表 2.1　　（单位：万元）

使用年数	0 ~ 1	1 ~ 2	2 ~ 3	3 ~ 4	4 ~ 5
维修费用	5	6	8	11	18

表 2.2　　（单位：万元）

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
11	11	12	12	13

可供选择的方案显然是很多的。例如每年都购进一台新设备，这就是一个方案。按这个方案，总的购买费用为 $11+11+12+12+13=59$ 万元，每年支付维修费用 5 万元，5 年共付 25 万元，于是总支付为 $59+25=84$ 万元。又如决定 1、3、5 年各购进一台新设备也是一个方案，这时购买费用为 $11+12+13=36$ 万元，维修费为 $5+6+5+6+5=27$ 万元，总支付为 63 万元，等等。

怎样的方案能使总支付最少呢？这可以用几种方法来求解，我们把这个问题化为最短路问题。

设 $v_1,\cdots,v_5$ 分别表示 1 ~ 5 年年初更新设备状态，用 v_6 表示第 5 年底更新设备状态。从 v_i 到 $v_{i+1},\cdots,v_6$ 各画一条弧。弧 (v_1,v_2) 表示在第 1 年年初购进的设备用到第 2 年年初，权 w_{12} 表示需

的购买费加维修费，即 $w_{12}=11+5=16$。弧(v_1,v_3)表示第1年买的设备用到第3年年初，权 w_{13} 表示所需总费用，即 $w_{13}=11+5+6=32$ 等等。这样就得图 2.18。设备更新问题化为求从 v_1 到 v_6 的最短路问题。计划结果表明：$v_1v_3v_6$ 和 $v_1v_4v_6$ 都是最短路，对应的费用为 53 万元，它们都是最优的更新方案。

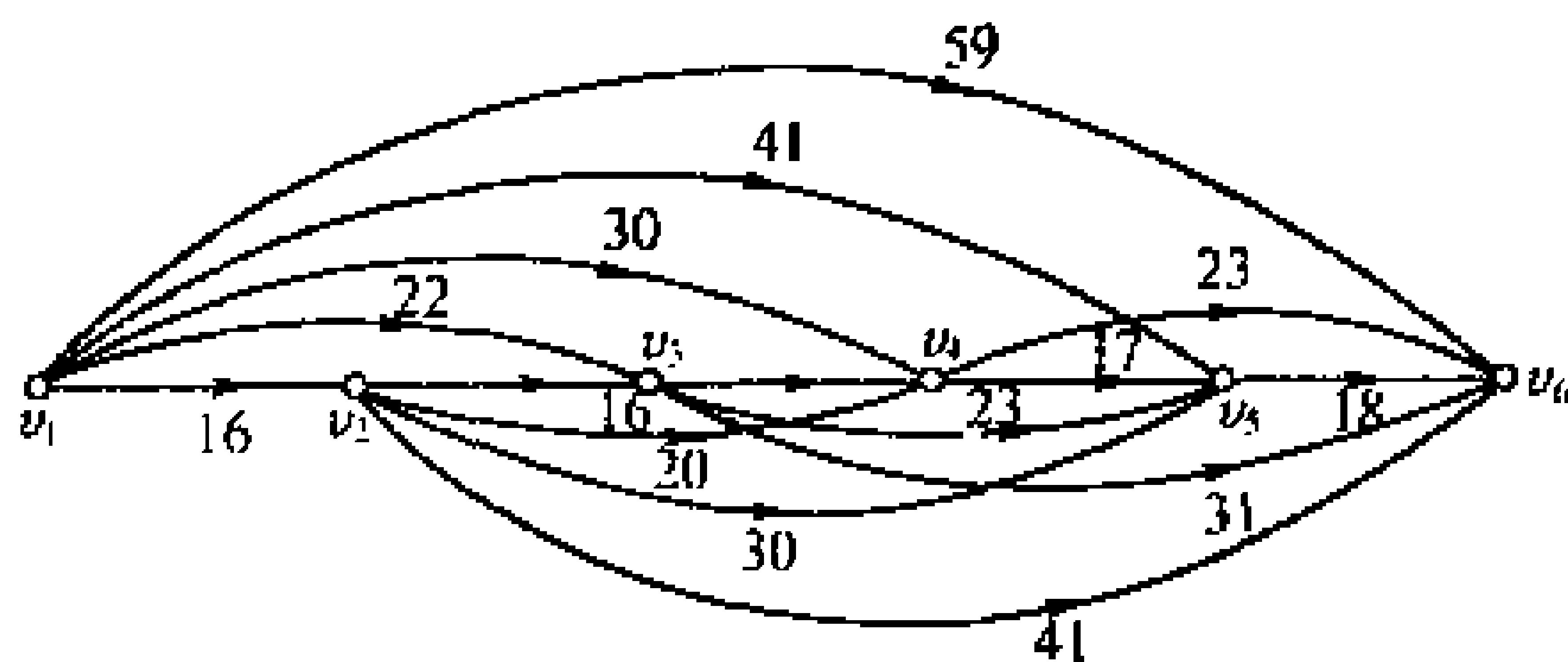


图 2.18

3) 选址问题

一般说来，选址问题的意思是指：我们已经知道了一些现有设施的地址，希望确定一个或几个新设施的地址。例如，某公司生产的某种产品，且有此种产品的十家重要的用户。已知该公司和各用户的地址，现希望建设一个新仓库，问应建在什么位置，才能使产品从公司运到仓库，再运到各用户的总运费最省呢？又如，某市要建一个新的图书馆来为某一特定地区服务，问这个图书馆应建在什么位置最好呢？选址问题的求解有两种不同的方法，分别称为连续型和离散型。大多数选址问题，根据实际情况，只有有限个地址可以选择，因此，通常都是用离散型方法来求解，而解决离散型选址问题的关键是求相应网络中所有点对间的最短路。先看一个具体的例子。

例 2 已知有 6 个村庄，各村的小学生人数如表 2.3 所示，各村庄间的距离如图 2.19 所示。现在计划建造一所医院和一所小学，问医院应建在哪个村庄才能使最远村庄的人到医院看病所走

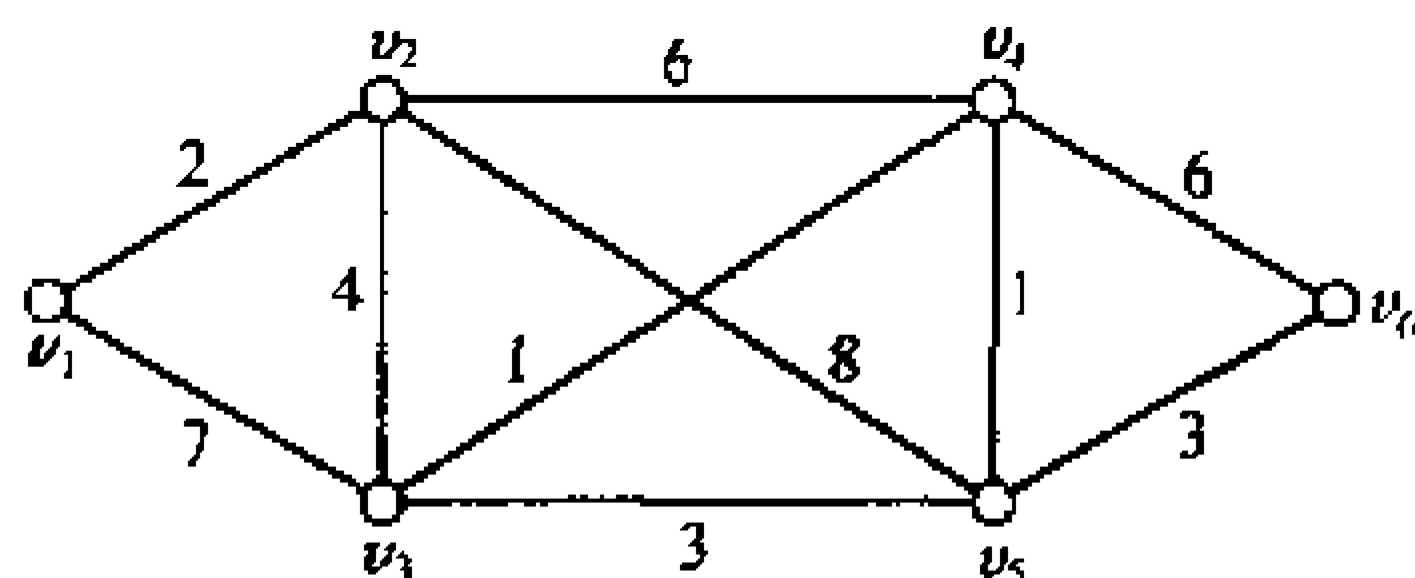


图 2.19

的路最短?又问小学建在哪个村庄使得所有学生上学走的总路程最短?

表 2.3

村　庄	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
小学生	50	40	60	20	70	90

利用 Floyd 算法,首先求出任意两点 v_i, v_j 间的最短路长,如表 2.4 所示。

表 2.4

从＼到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	2	6	7	8	11
v_2	2	0	4	5	6	9
v_3	6	4	0	1	2	5
v_4	7	5	1	0	1	4
v_5	8	6	2	1	0	3
v_6	11	9	5	4	3	0

设想医院建在村庄 v_j,则其他村庄的村民就要分别走 d_{1j}, d_{2j},…,d_{6j} 的路程,d_{ij} 表示 i 村至 j 村的实际距离,其中必有最大者。对每一点 v_j,求出这个最大值,我们希望建在这些最大值之中

的最小值所对应的村庄。这相当于对表 2.4 中每一列元素求出最大值，它们分别是 11,9,6,7,8,11，这些数中 6 最小，即第 3 列的最大元素达到最小，所以医院应建在村庄 v_3，这样其他村庄到该村庄的就医距离最多为 6。

设想小学建在 v_j，则其他村庄的小学生所走的总路程就是

$$50d_{1j} + 40d_{2j} + 60d_{3j} + 20d_{4j} + 70d_{5j} + 90d_{6j}$$

对每一点，求出这个值，它们的最小值所对应的 v_j 就是所要选择的最佳位置。这相当于将表 2.4 中每一行元素分别乘上对应村庄里小学生的人数，然后分别求出各列的和，见表 2.5，其总和最小的列为 v_4，即小学建在村庄 v_4 位置，这样必使所有学生上学所走的总路程最短。

表 2.5

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	100	300	350	400	550
v_2	80	0	160	200	240	360
v_3	360	240	0	60	120	300
v_4	140	100	20	0	20	80
v_5	560	420	140	70	0	210
v_6	990	810	450	360	270	0
总和	2 130	1 670	1 070	1 040	1 050	1 500

从这个例子可以看出，求出相应网络中所有点间的距离是求解这类选址问题的关键，与选址问题有关的网络模型有如下几种。

给定一个有向且无负有向回路的网络 $N = (V, A, W)$，其中 $V = \{1,2,3,\cdots,n\}$。对每一弧有一个实数权 w_{ij}，对每一点 i 有一个实数权 w_i。设点 i 到点 j 的最短有向路的长度为 d_{ij}。若点 i_0 满足下述条件(1) ~ (6)，则分别称它为发射中心、入射中心、平均发射中心、平均入射中心、发射重心和入射重心。

(1) $e(i_0) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} d_{ij}$

(2) $\lambda(i_0) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} d_{ji}$

(3) $\bar{e}(i_0) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}$

(4) $\bar{\lambda}(i_0) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ji}$

(5) $W_e(i_0) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} w_j d_{ij}$

(6) $W_0\lambda(i_0) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} w_j d_{ji}$

4) 统筹方法

一项工程,可以分解为若干工序(事项),而这些工序之间又存在着错综复杂的衔接关系。由于技术或其他原因,有些工序必须在其他工序完成后才能开工,而每一工序的完工都需要一定的时间,这些都是众所周知的。显然,完成每个工序所用的时间都会影响到整个工程的进度。

若用一条弧表示一个工序,有弧与弧的衔接来表示工序和工序的先后关系,用弧的权来表示完成这个工序所用的时间,则得到一个无回路的有向网络 $N=(V,A,W)$。设整个工程开始的点为始点,用 x 表示;结束点为终点,用 y 表示。显然,在这个网络中,从始点到终点的最长有向路上的弧所对应工序的完成进度将直接影响到整个工程的进度。把这些工序称为关键工序,由它们对应弧所组成的有向路称为关键路线(或称主要矛盾线)。因此,统筹方法也称为关键路线法(CPM)。

将 N 的每条弧 a 的权 $w(a)$ 改为 $M-w(a)$,这里 M 是一个充分大的数,所得的赋权有向图记为 N'。求关键路线,实际上等价于求网络 N 对应的网络 N' 中的最短有向路。除从始点至终点的最长有向路外,从始点至各顶点的最长有向路的长度就是以该点

为始点的各工序的最早开始时间，也就是说这些工序不能在这个时间之前启动，顶点 v_k 的最早开始时间用 t_k 表示。

从每一个顶点至终点也有一条最长有向路，它的长度是从这点开始的工序到项目终止所需的最少时间，用 $\bar{t}_k$ 表示。若用 T 表示关键路线的长，则 $T-\bar{t}_k$ 是从该点开始的工序的最晚时间，晚于这个时间便影响整个工程的预期完成。

在关键路线上的顶点 v_k，恒有 $t_k = T-\bar{t}_k$，而不在关键路线上的点一般说来有 $t_k < T-\bar{t}_k$。从 t_k 到 $T-\bar{t}_k$ 这一段时间是工序的缓冲时间，也就是说，在这段时间内开工不影响任务的完成。每个工序也有各自的缓冲时间，这对于实际计划安排是有用的。比如可用来避开人力安排、物资运输过于集中等。

表 2.6　建 筑 工 序 表

工序(事项)	估计周数	紧前事项
1. 平整土地	4	无
2. 打　桩	1	1
3. 运进钢材	3	无
4. 运进混凝土	2	无
5. 运进木料	2	无
6. 运进水管和电器材料	1	无
7. 浇注地基	7	2,3,4
8. 焊接钢梁	15	3,7
9. 安装生产设备	5	7,8
10. 分隔办公室	10	5,7,8
11. 安装水电和电器	11	6,8,10
12. 装饰墙壁	5	8,10,11

例 3　某建筑公司签订了一项合同，要为一家制造公司建造一座新的工厂。合同规定工厂的完工期限为 12 个月。要是工厂不能在一年内完工，就要赔款，因此建筑公司的管理处决定认真地分

析一下建筑过程的第一个阶段。通过分析，找出了建筑工厂必须完成的各道工序和这些工序之间的先后关系，并估计出它们延续的时间，它们由表 2.6 列出。

用 CPM 的术语来说，表 2.6 中的每道工序都是一个事项。显然，有些事项只能在另外一些事项完成以后才能开工。例如，只有打好了桩才能浇注地基。一旦架起了钢梁，安装好设备并分隔好各个办公室，其他事项可同时进行。表 2.6 也列出了每一事项的紧前事项。

利用表 2.6 所示之先后关系和所列之延续时间，我们在图 2.20 中画出了这个 CPM 网络。我们看到，最长路长是 0→1→2→7→8→10→11→12→13，它的长度为 53 周，而关键事项就是：平整工地、打桩、浇地基，焊接钢梁、分隔办公室安装水电设备、装饰墙壁。前面已经提到，这些事项中任一个要是拖延一周，整个大楼的完工就要推迟一周。因此工程管理员应该特别注意不让这些关键事项超过它们的计划工期，他可以为这些事项雇一些工人（或者从非关键事项抽调一些工人到关键事项上去）。

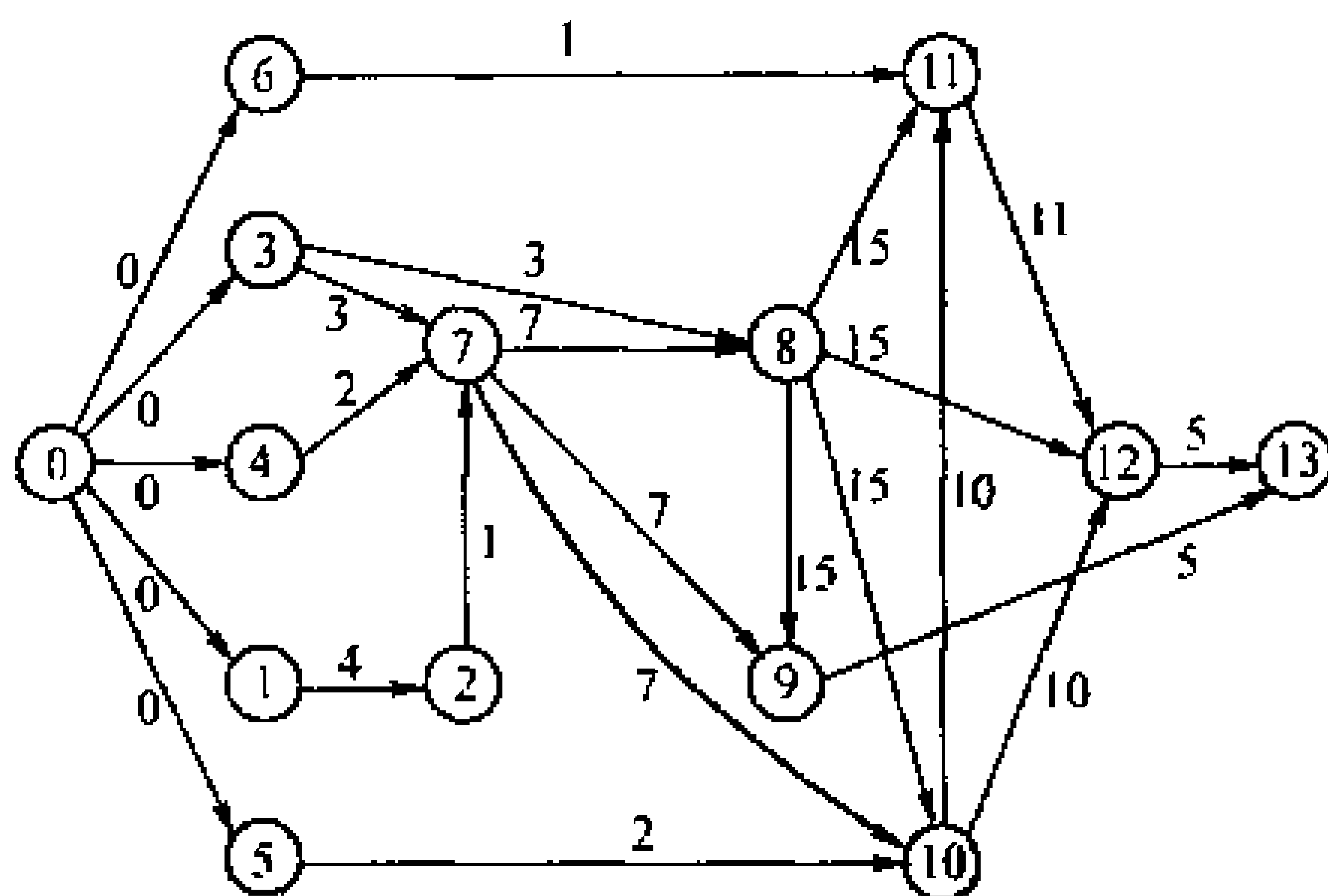


图 2.20

利用图 2.20 的 CPM 网络，我们还可以算出各个事项的缓冲时间。例如，考虑安装生产设备这一工序，即事项 9。由于路径 0 → 1 → 2 → 7 → 8 → 9 的长度将是 27，故此事项应在 27 周以后才能开工(我们知道，这种安装工作一定要等到事项 8 完工，即焊接钢梁完成以后才能进行)。如果安装生产设备用去的时间不是预计的 5 周，而是 26 周，那么路径 0 → 1 → 2 → 7 → 8 → 9 → 13 的长度将是 53，这并不会拖延建筑工程的完工时间，因为关键路径的长度为 53。我们得出结论，安装生产设备这道工序的机动时间为 26 - 5 = 21 周，因为从 5 周增加到 26 周，并不会对整个工程产生什么不利的影响。当然，这一安装工作若需 27 周，那么路径 0 → 1 → 2 → 7 → 8 → 9 → 13 的长度就是 54，这就意味着整个工程要推迟 1 周。

总起来说，进行一次 CPM 研究，必须列出一项工程的各道工序或各个事项，并且说明每个事项的延续时间和紧前事项；然后画出它的 CPM 网络，其中将工程中的各道工序的开工事项、工程开工事项和工程完工事项各画成一个结点。从工程开工这一结点都有一条(长度为零的)弧指向每道可以马上开工的工序，已无后继工序的各道工序都有一条弧指向工程完工这一结点。对于每一结点 j 的所有紧前结点 i，都要画出弧(i,j)，而各弧(i,j)的长度就等于事项 i 的延续时间。最后找出从工程开工到工程完工的最长路径，它将区分出那些必须严密监督的关键事项。此外，有时也可能希望了解，在不处宅完工期的条件下各个事项能够拖延多少的时间。

2.6 单行道路系统的构造

在这一节我们来考虑一个实际上相当重要的问题。设 G 是表示城市街道系统的图，顶点表示交叉路口。如果图 G 是连通的，则可以从城市的任何一点到其他任意一点。我们考虑的问题是：在什

么条件下可以把街道变成单行道路系统，使从城市中的任何点仍有可能沿规定单行方向到达任意其他点，以达到城市交通的畅通。这显然是关于图的定向问题。例如，考察图 2.21(a) 和(b) 中代表的道路系统的两个图。

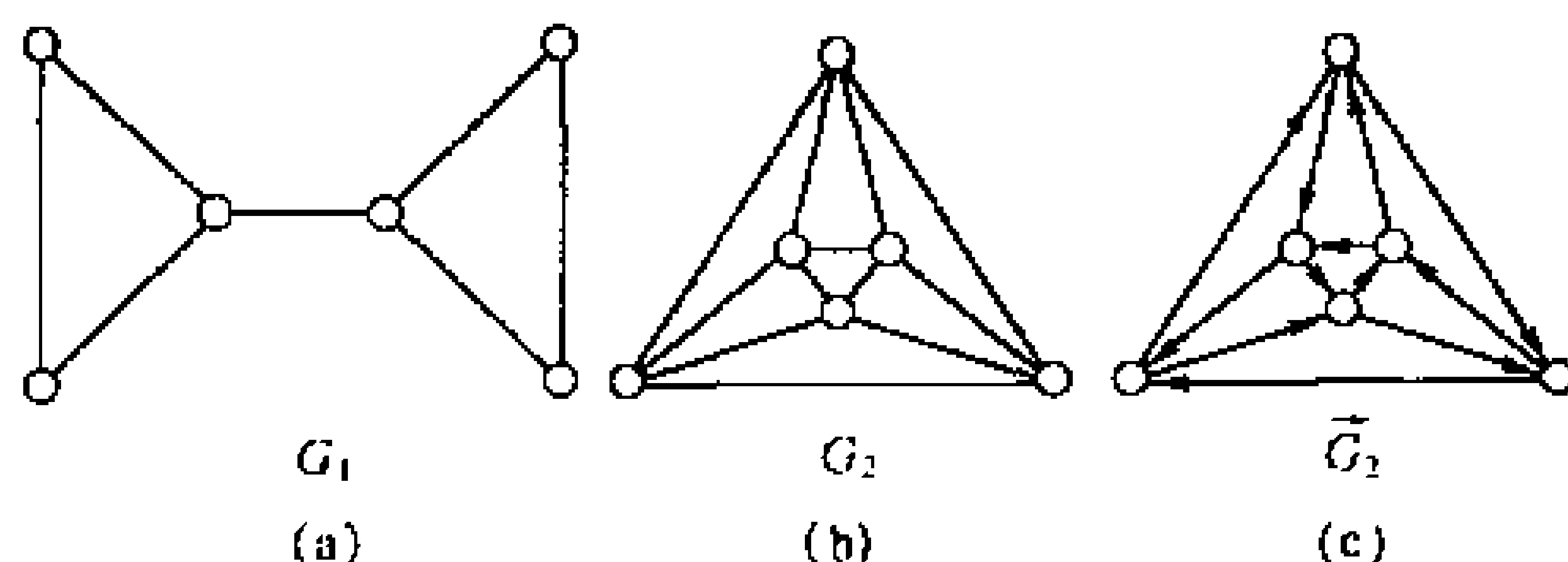


图 2.21

对于 G_1，无论给以怎样的定向，所得定向图都不能使这个系统的交通畅通，即强连通。原因在于 G_1 有一条割边。而对于 G_2 有一个较好的定向图 $\vec{G}_2$(见图 2.21(c))，其中每个顶点可从任何别的顶点出发而到达该点，即 $\vec{G}_2$ 是强连通图。

不难看到，我们所需的定向图要求是强连通的。而一个图 G 有强连通的定向图的必要条件是 G 为 2 - 边连通的。Robbins(1939) 证明这个条件也是充分的。

定理2.6.1 若 G 是2 - 边连通图，则 G 有强连通的定向图。

证明 设 G 是2 - 边连通图，则 G 必含有回路。先取一个回路 C_1，我们归纳地定义 G 的连通子图序列 $G_1, G_2, \cdots$ 如下：$G_1 = C_1$；若 $G_i(i = 1,2,\cdots)$ 不是 G 的生成子图，设 v_i 是在 G 中而不在 G_i 中的一个顶点，则存在从 v_i 到 G_i 的边不重路 P_i 和 Q_i，定义

$$G_{i+1} = G_i \cup P_i \cup Q_i$$

由于 $p(G_{i+1}) > p(G_i)$，这个序列必然终止于 G 的一个生成子图 G_n。

现依次给每个 G_i 定向：首先让 $\vec{G}_1$ 成为一个有向回路；对 $G_{i+1} = G_i \cup P_i \cup Q_i$，设已有定向图 $\vec{G}_i$，让 P_i 成为以 v_i 为起点的有向路，而 Q_i 成为以 v_i 为终点的有向路，得 $\vec{G}_{i+1}$，易见 $\vec{G}_{i+1}$ 是强连通有向图，$i = 1,2,\cdots,n$ 因此最后的 $\vec{G}_n$ 是强连通有向图。由于 G_n 是 G 的生成子图，所以 G 有强连通的定向图。　　　　证毕。

习　题　二

2.1　设 G 是一个简单图，$\delta(G) \geqslant k$。证明：G 中存在长度至少是 k 的路。

2.2　设 D 是每个顶点的出度至少为 1 的有向图。证明 D 含有有向回路。

2.3　任意给定一个含 n^2+1 项的实数序列（各项互不相同）。证明：一定可以从这个数列中找出一个含 $n+1$ 项的单调子列。

2.4　设 G 是至少有三个顶点的简单图。证明：对 G 中任意三个顶点 u，v 和 w，都有不等式

$$d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$$

2.5　有 $2n$ 个人在一起聚会，其中每个人至少同 n 个人认识。证明从这 $2n$ 个人中总可以选出 4 个人来，这 4 个人可以围桌而坐，使得每个人旁边的 2 个人他都是认识的。

2.6　设简单图 G 的每个顶点的度至少是 3。证明不存在大于 2 的整数，它能整除 G 的每个回路的长度。

2.7　若 G 是至少有五个顶点的简单图。证明 G 或者 G^c 包含一个回路。

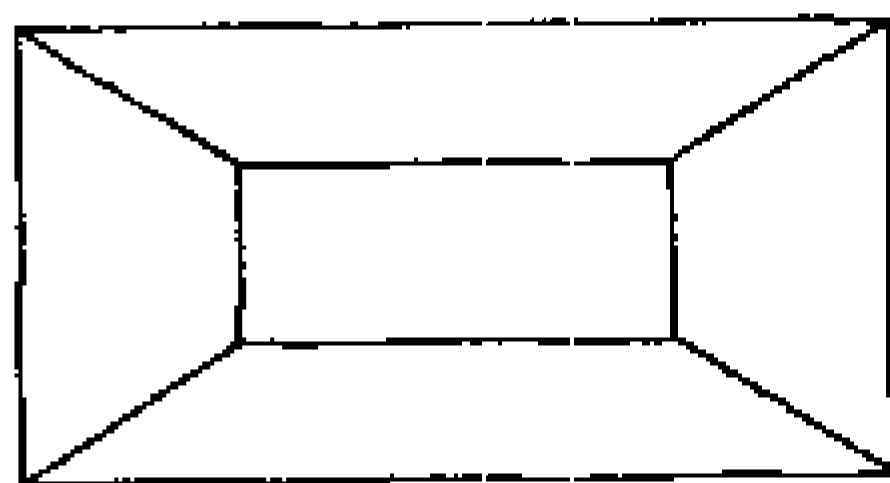
2.8　一个连通图中的任意两条最长路至少有一个公共顶点。

2.9 证明：若 G 不连通，则：

(a) G^c 连通；

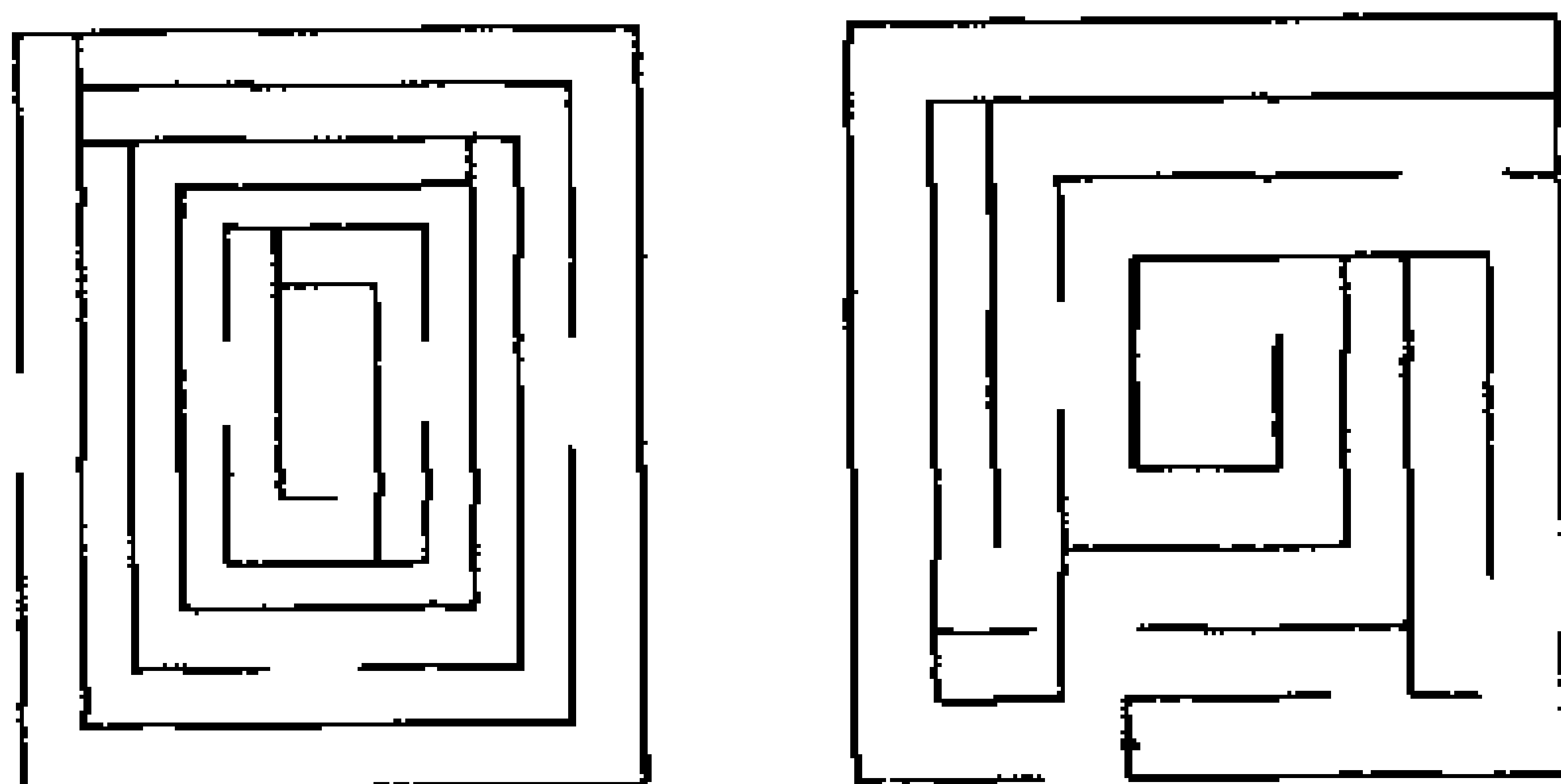
(b) $\mathrm{diam}(G^c) \leqslant 2$。

2.10 下面这一图形能否三笔不重复画成？为什么？



习题 2.10

2.11 有二座迷宫如下图所示。请画出该迷宫所对应的图，再找一条从进口到中心的行走路线。



习题 2.11

2.12 试证明：若 G 是 p 阶简单图，G 中每一对不相邻的顶点的度数之和至少是 $p-1$，那么 G 是连通图。

2.13 设 C 是连通图 G 的一个回路，e 是 C 中的一条边，证明 $G-e$ 仍是连通图。

2.14 图 G 的一条边 e 称为是割边，如果 $w(G-e) > w(G)$，证明 G 的一条边 e 是割边当且仅当 e 不含在 G 的任何回路上。

2.15 设 $M = (m_{ij})_{p\times p}$ 是有向图 D 的邻接矩阵。

$$R_p = M + M^2 + \cdots + M^p$$

证明:(1) D 是强连通当且仅当 R_p 中没有零元素;

(2) D 是单向连通当且仅当 $R_pR_p^T$ 中除对角元素外没零元素。

2.16 证明:若图 G 中每个顶点的度为偶数,则 G 无割边。

2.17 (a) 证明:若 G 是简单图,$q(G) > \binom{p(G)-1}{2}$,则 G 连通。

(b) 对 $p > 1$,找一个简单图 G,使 $q(G) = \binom{p-1}{2}$,$p(G) = p$ 但 G 非连通。

2.18 用定理 2.2.3 去证明定理 2.2.2。

2.19 证明:若 G 是 k 连通图,则 $q(G) \geqslant kp(G)/2$。

2.20 设 G 是非平凡连通图,E_1 是 G 的最小边割。证明 $w(G - E_1) = 2$。

2.21 G 的一个边割 E' 称为是**极小边割**,如果 E' 的任意一个真子集都不是 G 的边割,对 $V(G)$ 的非空真子集 S,证明:$[S,\overline{S}]$ 是 G 的极小边割当且仅当 $G(S)$ 与 $G[\overline{S}]$ 都是连通的。

2.22 G 是 p 阶简单图,u 和 v 是 G 中两个不相邻的顶点,满足

$$d_G(u) + d_G(V) \geqslant p$$

证明:G 是 2 连通图当且仅当 $G + uv$ 是 2 连通图。

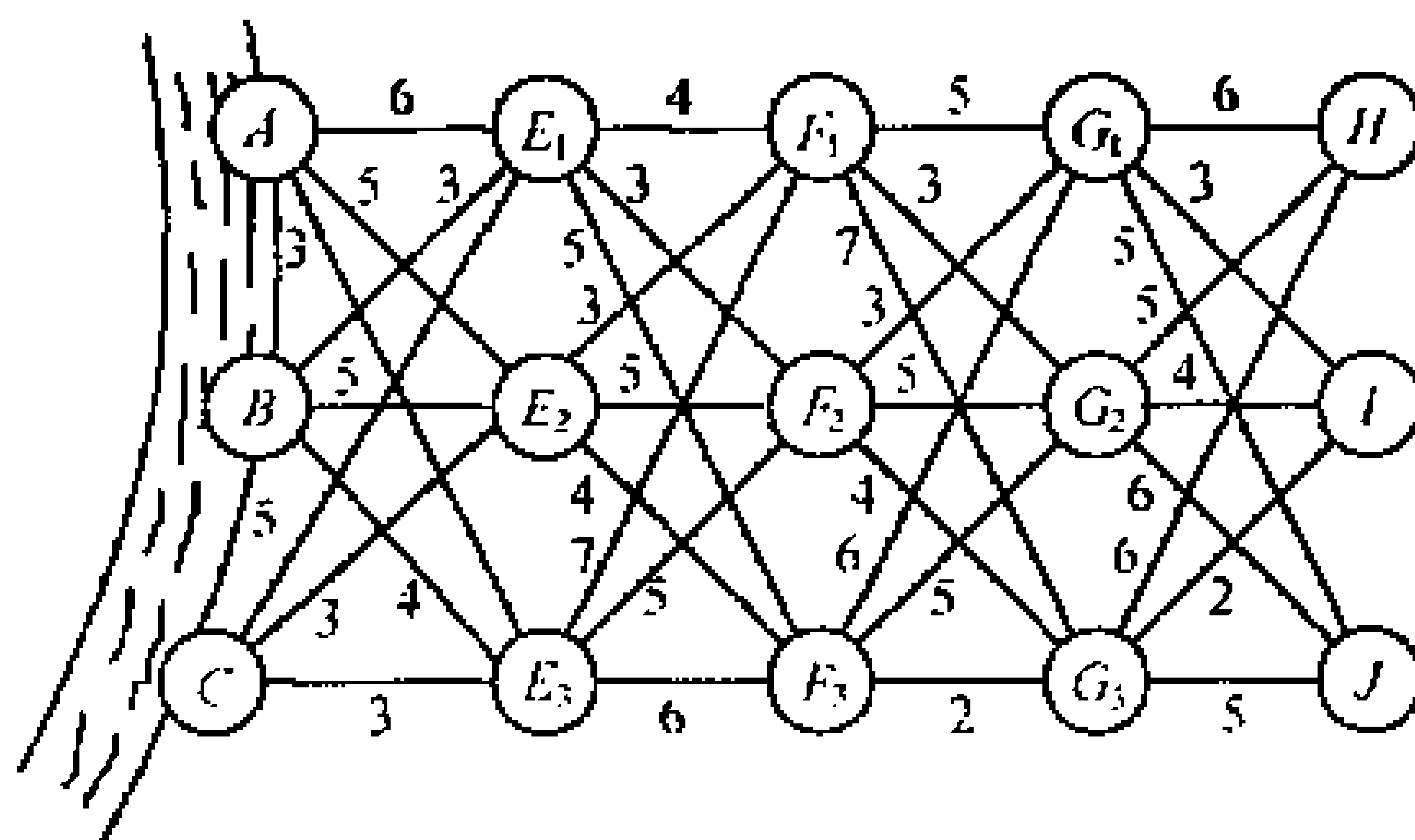
2.23 证明定理 2.3.11。

2.24 如下图所示,某城市有三个位置 $\{H, I, J\}$ 可作水厂的厂址。水厂需要从某河流上引水,引水口的位置有 $\{A, B, C\}$ 三处可供选择,从引水口出来的引水管线要经过另外一些地区。图中各线段上的数字表示建造该段管线

的费用(万元),问:

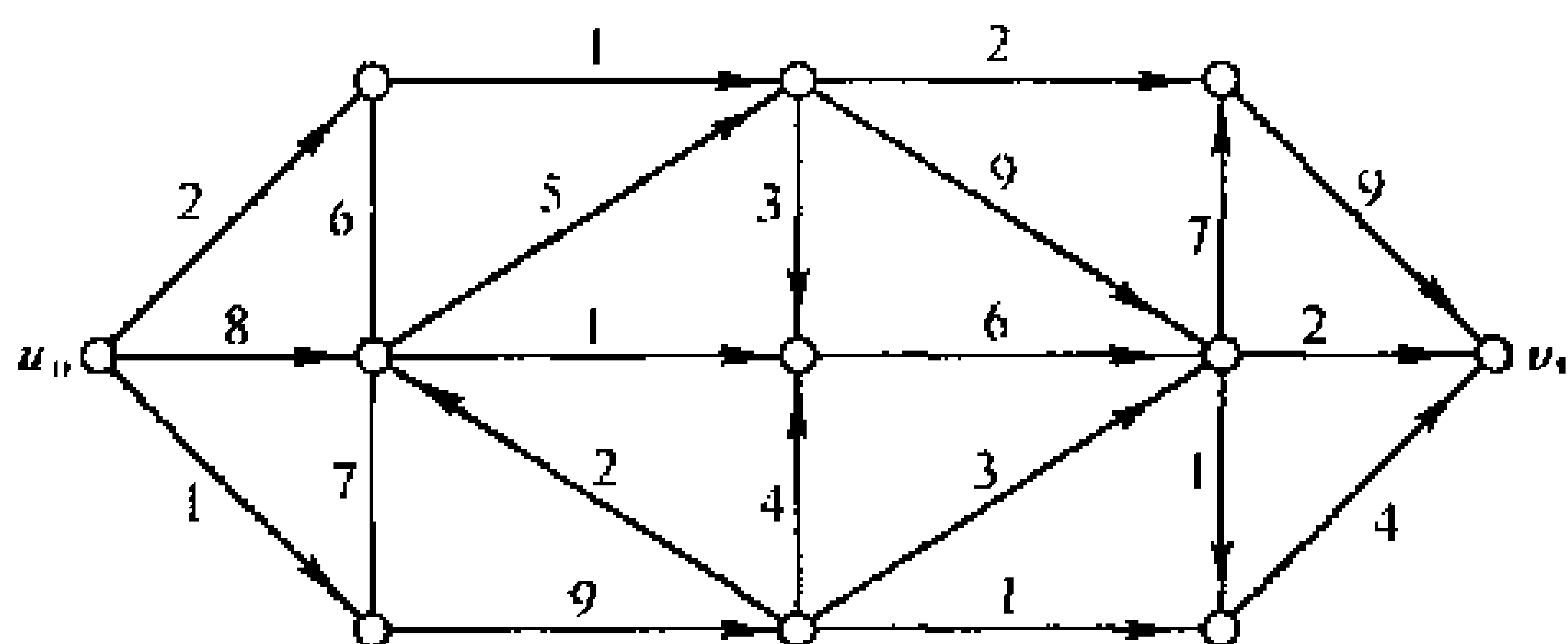
(1) 最多能组合多少个引水方案?

(2) 选一个水厂位置及引水口的位置,使安装费用最省。



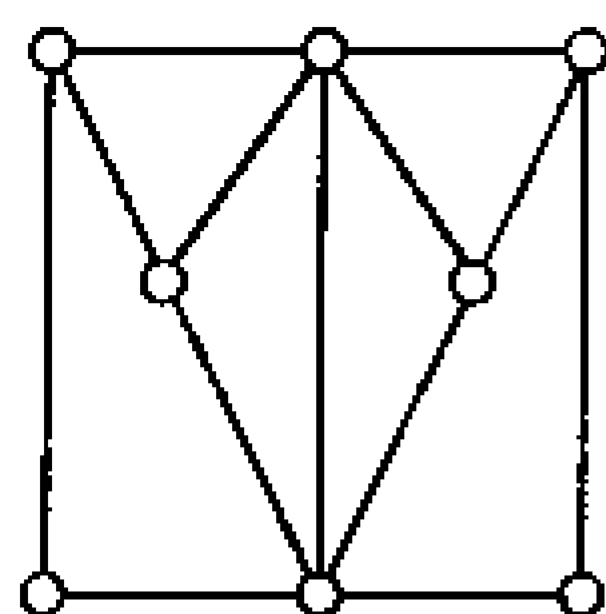
习题 2.24

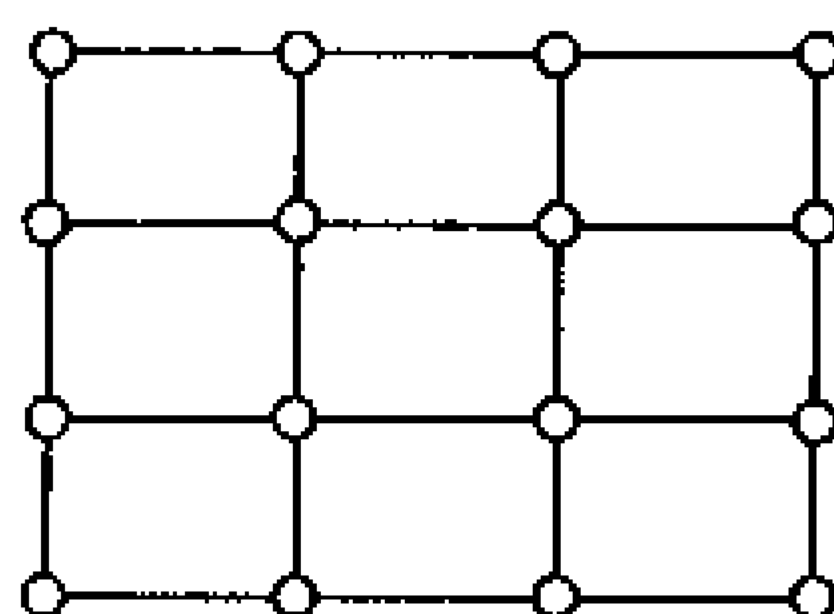
2.25 求下面有向网络 $N=(V,A,W)$ 的一条最短(u_0-v_0)路。



习题 2.25

2.26 给如下所示的两个图 G_1 和 G_2 定向，使所得有向图 $\vec{G}_1$、$\vec{G}_2$ 是强连通的。


G_1


G_2

习题 2.26

3 树

3.1 树的基本性质

在第1章的1.1节中提到基尔霍夫对电网络的研究及凯莱用图对有机化学中同分异构体个数的计算，他们都用到一种图论中常见的图，这种图就是我们这一节所要介绍的重要的一类图"树"。

定义 3.1.1 没有回路的连通图称为树。

树之所以是重要的一类图，它不仅在于图论本身，由于树是连通图中最简单的一类图，许多问题对一般连通图未能解决或者没有简单的方法，而对于树，则已圆满解决，且方法较为简单。而且在许多不同领域中有着广泛的应用。在日常事务关系中，树的例子是很多的。例如家谱图就是其中的一个。在小说《红楼梦》中的开头，有一张描写荣国府中主要人物之间的关系表(见图3.1)。如果将每个人用一个顶点来表示，并且在父子之间连一条边，便得到图3.2所示的图，此图是一棵树。一个单位各部门之间的上下级关系也可以用树来表示。

在通常情况下，我们用 T 表示一棵树，图3.3列举了具有六个顶点的所有六个不同构的树。从图3.3不难看出，树正是从这一类图的形状而得名的。下面几个定理完全刻划了树的特性。

定理 3.1.1 一个简单图 T 是树当且仅当 T 中任意两个不同顶点之间有且只有一条路连接。

证明 设 T 是树，显然对 G 中任两个不同的顶点 u 和 v，G 中存在 $(u-v)$ 路，而且只有一条路，否则 T 至少有一个回路存在。

反之，若 T 中任何两个不同的顶点之间有且只有一条路。显然 T 是连通的，而且必无回路。否则，如 T 有一个回路，那么这回路上的任何两个不同顶点有两条不同的路连接它们。　　证毕。

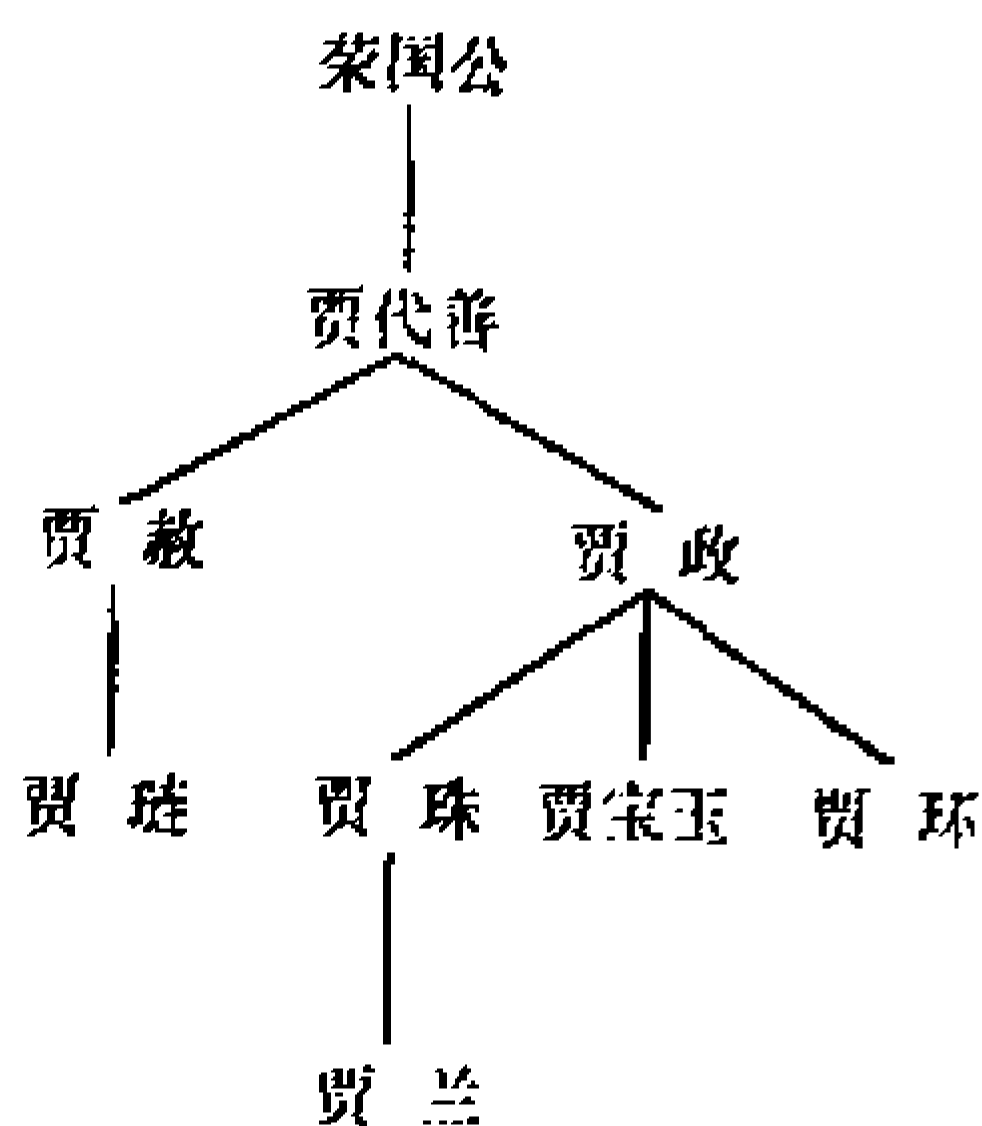


图 3.1

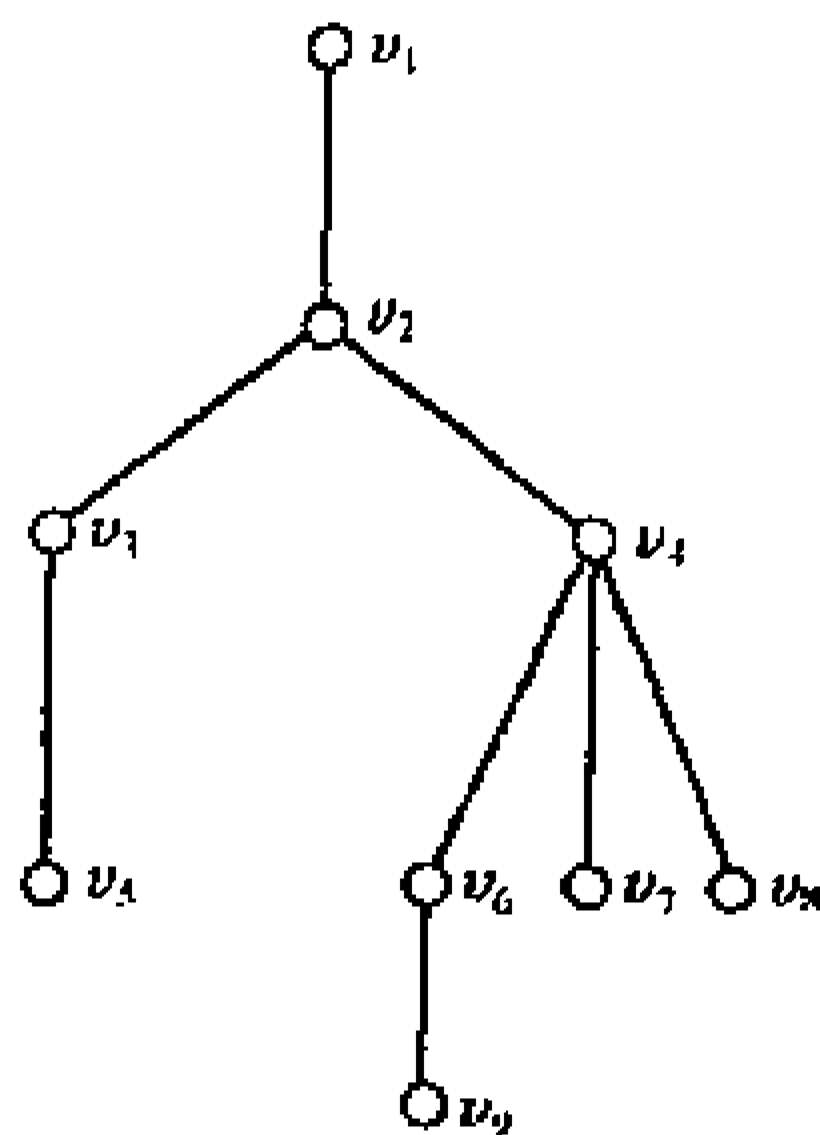


图 3.2

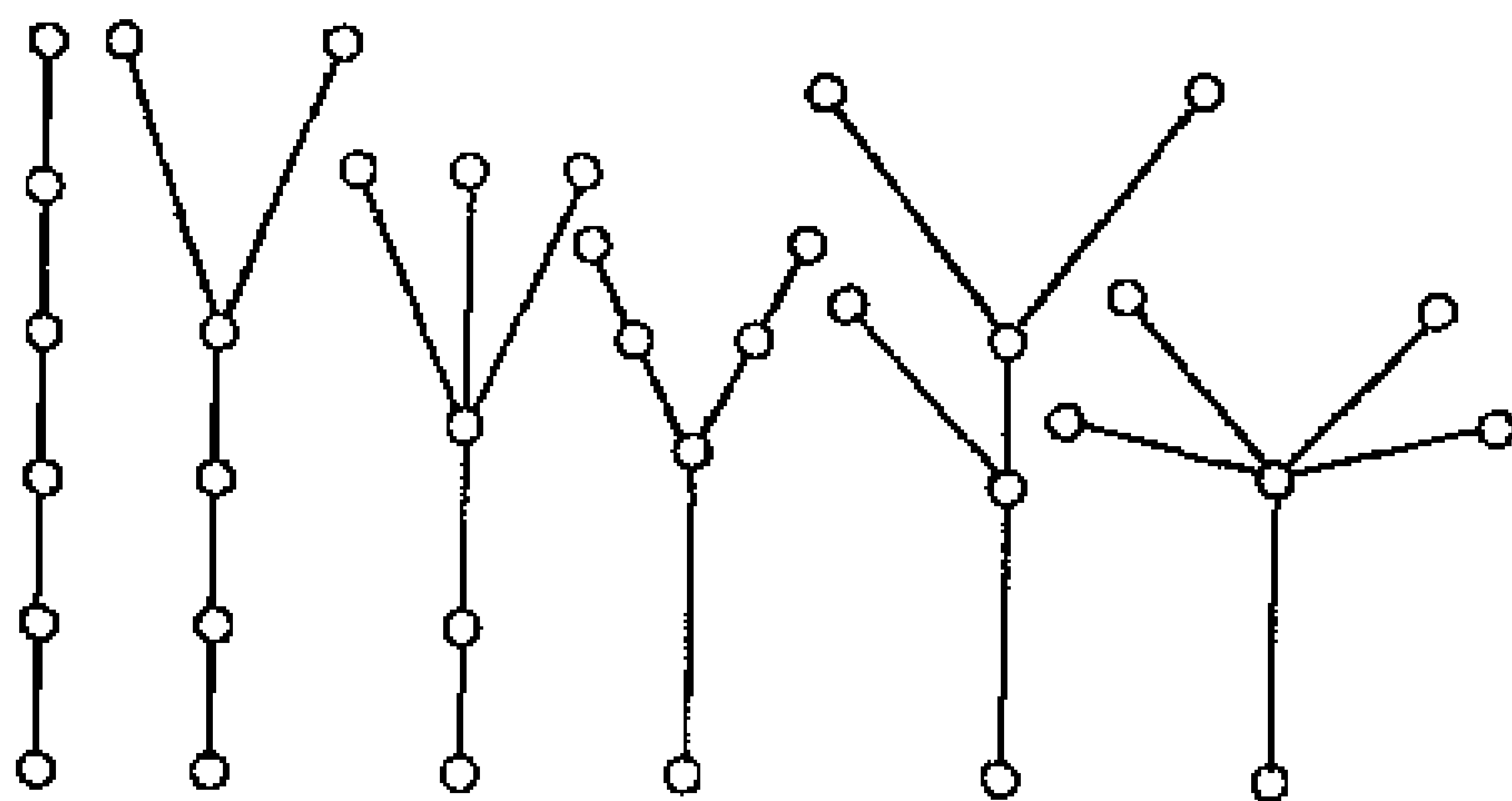


图 3.3

定理 3.1.2　下述论断是等价的：

(1) 图 T 是树；

(2) T 连通且 $q(T) = p(T) - 1$；

(3) T 无回路且 $q(T)=p(T)-1$；

(4) T 连通且 T 的每一条边都是割边；

(5) T 无回路，并且对 T 中任意两个不相邻的顶点 u 和 v，$T+uv$ 有且只有一个回路。

证明 (1)⇒(2) 设 T 是树，对 $p(T)$ 施行数学归纳法。当 $p(T)=1$ 时，$T\cong K_1$，则 $q(T)=0=p(T)-1$，结论成立。设 $p(T)=k$ 时结论成立。现在考虑 $k+1$ 阶的树 T。由于 T 无回路，则由定理 2.1.1 知 $\delta(T)=1$。设 $d_T(u)=1$，则 $T-u$ 仍连通并且无回路。所以 $T-u$ 是 k 阶树，由归纳假设，$q(T-u)=p(T-u)-1$，即 $q(T)-1=(p(T)-1)-1$，故 $q(T)=p(T)-1$。

(2)⇒(3) 设 T 满足(2)，要证明(3)成立，只要证明 T 无回路。若 T 有回路 C，在 C 中任取一条边 e，则 $T-e$ 仍是连通图，但其边数 $q(T-e)=q(T)-1=p(T)-2$，这与定理 2.3.2 相矛盾。

(3)⇒(4) 设 T 满足(3)。先证明 T 连通。若 T 有 $k(k\geqslant 2)$ 个连通分支 $T_1,T_2,\cdots,T_k$，易见每个分支均是树，则由(2)可知 $q(T_i)=p(T_i)-1(i=1,2,\cdots,k)$，故

$$
\begin{aligned}
q(T)&=\sum_{i=1}^{k}q(T_i)=\sum_{i=1}^{k}(p(T_i)-1)=\sum_{i=1}^{k}p(T_i)-k\\
&=p(T)-k
\end{aligned}
$$

因 $k\geqslant 2$，与 $q(T)=p(T)-1$ 相矛盾，所以 T 连通。再证 T 的每条边是割边。让 e 是 T 的任意一条边，则由于 $q(T)=p(T)-1$，故

$$q(T-e)=q(T)-1=p(T)-2=p(T-e)-2$$

由定理 2.3.2 知 $T-e$ 非连通，所以 e 是割边。

(4)⇒(5) 设 T 满足(4)。由于 T 的每一条边是割边，所以 T 无回路，又因为 T 连通，故 T 是树。设 u 和 v 是 T 中任意两个不相邻的顶点，由定理 3.1.1 知 T 中存在惟一的 $(u-v)$ 路 P，则 $P\cup\{uv\}$ 就是 $T+uv$ 中惟一的回路。

(5)⇒(1) 设 T 满足(5)，证明 T 是树。只要证明 T 连通。设

T 非连通，在 T 的两个不同分支中各取一个顶点 u 和 v，明显地 $T+uv$ 仍无回路，与 T 满足(5)矛盾。故 T 连通，因而 T 是树。证毕。

定理 3.1.3 T 是至少有两个顶点的树，则 T 至少有两个悬挂点。树 T 恰好有两个悬挂点当且仅当 T 本身是一条路。

证明 设 $P=v_0v_1\cdots v_k$ 是 T 的一条最长路。可以证明 v_0 与 v_k 都是 T 的悬挂点。否则，若 $d_T(v_0)\geqslant 2$，则由于 P 是最长路，v_0 的所有邻点全含在 P 上，故存在 $i,0<i\leqslant k,v_0v_i\in E(T)$，则 $v_0v_1\cdots v_iv_0$ 就构成 T 的一个回路，与 T 是树矛盾，所以 v_0 是悬挂点，同样可得 v_k 是悬挂点。

若 T 恰好有两个悬挂点，设为 u 和 v，则对 $V(T)-\{u,v\}$ 中每个顶点 $x,d_T(x)\geqslant 2$，应用定理 3.1.2，可得

$$\begin{aligned}2(p(T)-1)=2q(T)&=\sum_{x\in V(T)}d_T(x)\\&=1+1+\sum_{x\in V(T)-\{u,v\}}d_T(x)\\&\geqslant 2+2(p(T)-2)\end{aligned}$$

因此，对 $V(T)-\{u,v\}$ 中每个顶点 x，均有 $d_T(x)=2$，再由 T 的连通性可知，T 本身是一条路。 证毕。

由树的定义及定理 3.1.2 可知，连通、无回路和 $q(T)=p(T)-1$ 这三条性质中的任何两条都足以保证图 T 是树，因而都可以作为树的定义。

定义 3.1.2 G 的顶点 u 称为割点，如果满足 $w(G-u)>w(G)$。

定理 3.1.4 树 T 的每一个非悬挂点都是 T 的割点。

证明 设 T 是 p 阶树，u 是 T 中一个非悬挂点，即 $d_T(u)\geqslant 2$。不难看出 $T-u$ 含 $p-1$ 个顶点，其边数为

$$\begin{aligned}q(T)-d_T(u)&=p-1-d_T(u)\\&=p(T-u)-d_T(u)<p(T-u)-1\end{aligned}$$

因而 $T-u$ 不是树。显然 $T-u$ 不含回路，所以 $T-u$ 非连通，即

u 是 T 的割点。 证毕。

最后,我们引进图的离径、半径与中心的概念。

定义 3.1.3 图 G 的一个顶点 v 的离径 $R(v)$ 定义为

$$R(v) = \max_{u \in V}\{d(v,u)\}$$

图 G 的半径 $R(G)$ 定义为

$$R(G) = \min_{v \in V}\{R(v)\}$$

所有满足 $R(v) = R(G)$ 的顶点 v 都称为 G 的中心。

不难看出,一个图 G 的直径 $d(G)$ 为 $\max_{v \in V}\{R(v)\}$。

例如,图 3.4 所示的 G 中,$R(u_1) = R(u_6) = R(u_4) = 3$,$R(u_2) = R(u_3) = R(u_5) = 2$。故 G 的直径为 3,半径为 2,u_2,u_5 与 u_3 是 G 的中心。图 3.5 的 G_1 中,v_3 与 v_6 是 G_1 的中心。从这两个图可知,图的中心一般是不惟一的。

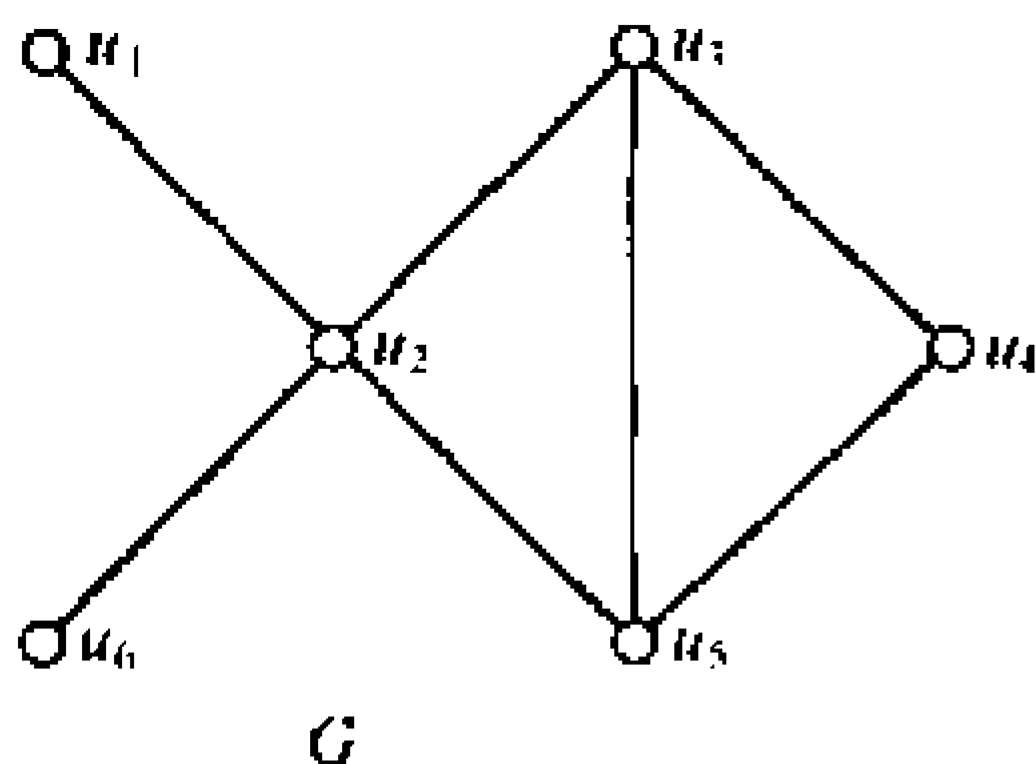


图 3.4

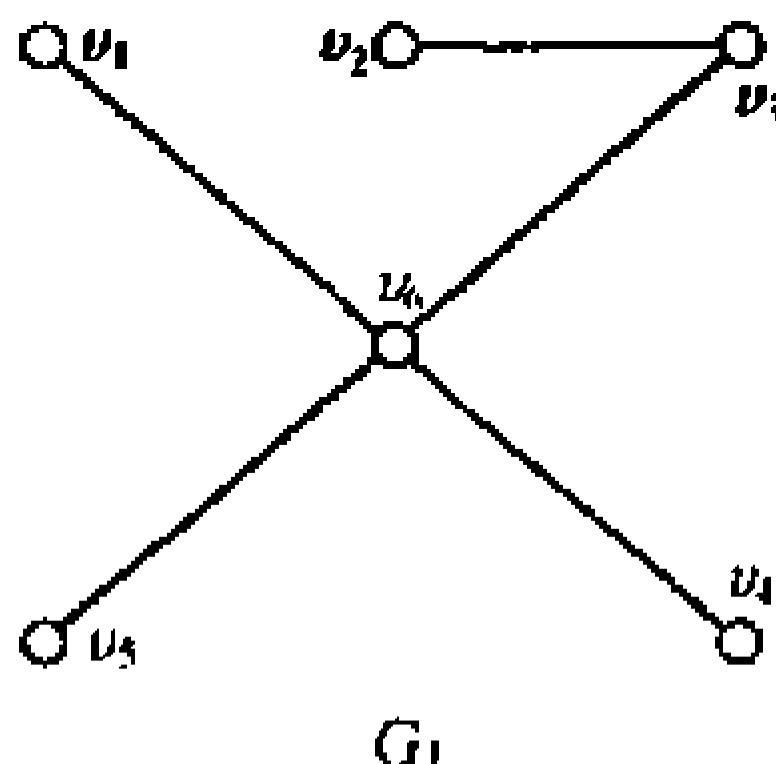


图 3.5

图的中心有很明显的实际意义。假设图 G 的边均等于单位长,在每个顶点处各驻一支军队,那么如果将指挥部设在 G 的中心处时,就能以最快的速度将部队集合于指挥部所在地。

定理 3.1.5 设 $P = u_1u_2\cdots u_lu_{l+1}$ 是树 T 的一条最长路,则

(1) T 的直径为 l;

(2) 若 l 为奇数,设 $l = 2k - 1$,那么 T 的半径为 k,T 有两个相邻的中心,即为 u_k 和 u_{k+1}。并且每一条长为 l 的路都通过这两个

中心；

(3) 若 l 为偶数，设 $l = 2k$，那么 T 的半径为 k，T 只有一个中心，即为 u_{k+1}。并且每一条长为 l 的路都通过中心 u_{k+1}。

证明 (1) 由于树 T 中只有惟一的一条 $(u_1 - u_{l+1})$ 路 P，故 $d(u_1, u_{l+1}) = l$ 即为 T 的直径。

(2) 设 u 是 T 中的任意一个顶点，则

$$
\begin{aligned}
d(u, u_1) + d(u, u_{2k}) &= d(u_1, u) + d(u, u_{2k}) \\
&\geqslant d(u_1, u_{2k}) = 2k - 1
\end{aligned}
$$

所以 $d(u, u_1) \geqslant k$ 或 $d(u, u_{2k}) \geqslant k$，因此 u 的离径 $R(u) \geqslant k$。所以 T 的半径 $R(T) \geqslant k$。

下面来证明 T 的半径为 k，中心是 u_k 和 u_{k+1}。

对于 T 中任意一个顶点 u，如果 u 在 P 上，则明显地 $d(u, u_k) \leqslant k$。如果 u 不在 P 上，则 P 中必存在一个顶点 u_i($2 \leqslant i \leqslant 2k - 1 = l$)，$T$ 中有一条连接 u 与 u_i 的路 Q，使 $u_1, u_2, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots\cdots, u_{2k}$ 都不在 Q 上(见图 3.6 所示)。

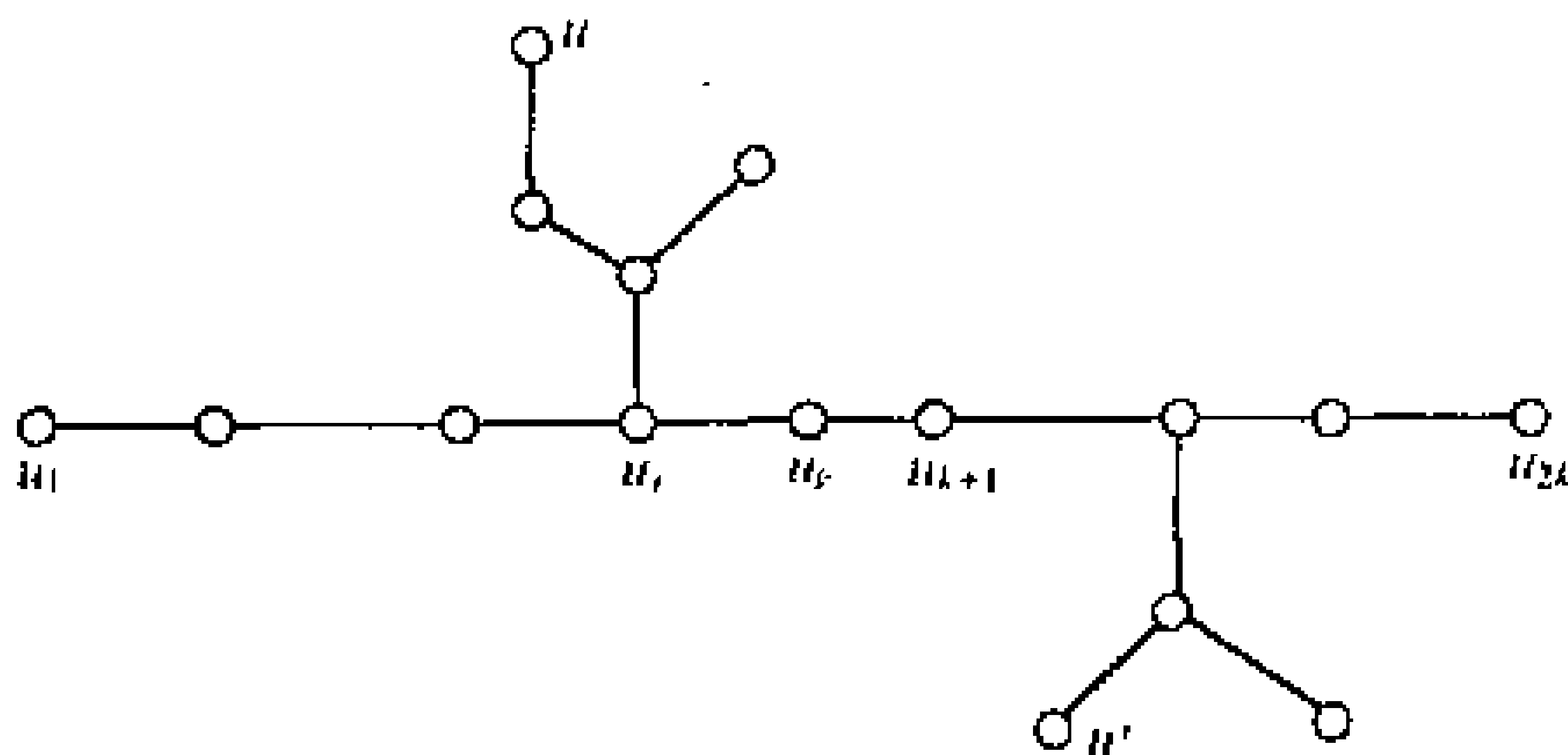


图 3.6

由于 P 是 T 的最长路，所以有以下两不等式：

$$
d(u, u_i) \leqslant i - 1, \quad d(u, u_i) \leqslant l + 1 - i
$$

如果 $i \leqslant k$，由于 $d(u_i, u_k) = k - i$，故

$$d(u,u_k) = d(u,u_i) + d(u_i,u_k)$$
$$\leqslant i - 1 + k - i = k - 1 < k$$

如果 $i > k$,则

$$d(u,u_k) = d(u,u_i) + d(u_i,u_k)$$
$$\leqslant l + 1 - i + i - k = l + 1 - k = k$$

从而对 T 的每个顶点 u,$d(u,u_k) \leqslant k$,因此 $R(u_k) \leqslant k$,从而 $R(T) \leqslant k$。结合 $R(T) \geqslant k$,我们有 $R(T) = k$,并且 $R(u_k) = k$,即 u_k 为 T 的一个中心。同样可证 u_{k+1} 也是 T 的一个中心。

最后证明长为 l 的每一条路 P' 一定通过中心 u_k 与 u_{k+1}。设 P' 的两个端点分别是 u 和 u',则 u 和 u' 均不在 P 上。在 P 上有两个顶点 u_i 和 $u_j(2 \leqslant i,j \leqslant 2k-1)$,$T$ 中存在 $(u - u_i)$ 路 Q_1 和 $(u' - u_j)$ 路 Q_2,使 $(V(Q_1) - \{u_i\} \cap V(P) = \varnothing$、$(V(Q_2) - \{u_j\}) \cap V(P) = \varnothing$。不妨设 $i \leqslant j$(见图 3.6 所示)。因为 T 是树,故

$$P' = Q_1 \cup P(u_i,u_j) \cup Q_2$$

如果 $i \leqslant j \leqslant k$,则

$$d(u,u') \leqslant d(u,u_i) + d(u_i,u_j) + d(u_j,u')$$
$$\leqslant (i-1) + (j-i) + (j-1) = 2(j-1)$$
$$\leqslant 2(k-1) < 2k - 1 = l$$

同样,如果 $k < i \leqslant j$,则 $d(u,u') < l$。这些都与 P' 是长为 l 的 $(u - u')$ 路相矛盾。因此 $i \leqslant k < j$。这就证明了长度为 l 的路一定通过 T 的中心 u_k 和 u_{k+1}。

(3) 与(2)类似可证明。略。　　　　证毕。

该定理的证明不仅给出了树的直径、半径的计算方法,而且也给出了树的中心的计算方法。

下面给出树的两个应用以结束本节。

例 1　有 10 个学生参加一次考试,试题 10 道。已知没有 2 个学生做对的题目是完全相同的。证明:在这 10 道试题中可以找到一道试题,将这道试题取消后,每 2 个学生所做对的题目仍然不会

完全相同。

证明 反证法：用10个顶点 $v_i(i=1,2,\cdots,10)$ 来表示10位学生，如果结论不成立，则对每一道试题 $h(1\leqslant h\leqslant 10)$，如果去掉 h，必有两个学生 v_i 和 v_j，他们做对的题目是完全相同的，即原来 v_i 比 v_j 或 v_j 比 v_i 恰好多做一题 h，就在 v_i 和 v_j 之间连一条边，并标上号 h（如果有好几对，我们可以任取其中的一对）。这样就得到一个具有10个顶点、10条边的简单图，用 G 表示。由定理3.1.2知，G 不是树。因 $q(G)=p(G)$，G 含有回路，设为

$$C=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}v_{i_1}$$

则沿着 C 走时，每通过一条边就相当于解出的题目增加或减少了一道题，并且增减的题目是互不相同的。现在对这回路 C 来说。从 v_{i_1} 出发沿 C 走一圈回到 v_{i_1}，就相当于对 v_{i_1} 做对的题目增加一些再减少另一些题目，最后的结果仍是 v_{i_1} 原来做对的题目。这是一个矛盾。

例2 （1958年波兰数学奥林匹克试题）平面上有 n 条线段，$n\geqslant 3$，其中任意3条都有公共端点。证明这 n 条线段有一个公共端点。

证明 把这 n 条线段的端点视为一个图 G 的顶点，线段为 G 的边。依题意，G 是无回路的连通图，故 G 是树，且直径为2，$p(G)=q(G)+1=n+1$。取 $u\in V(G)$，使 $d_G(u)=\Delta(G)$，则 $d_G(u)\geqslant 2$。若存在 $v\in V(G)-\{u\}$，$d_G(v)\geqslant 2$。设 $x\in N_G(u)-\{v\}$，$y\in N_G(v)-\{u\}$，如果 $uv\in E(G)$，因 G 是树，$x\neq y$ 且 $d(x,y)=3$，与 $d(G)=2$ 矛盾；如果 $uv\notin E(G)$，则存在 $x_1\in N_G(u)-\{x\}$，$y_1\in N_G(v)-\{y\}$，此时 G 的三条边 x_1u，ux，vy_1 无公共端点，与题设矛盾。故 G 中只有一个顶点 u 是非悬挂点，而其余 n 个顶点是悬挂点，则

$$2n=2q(G)=\sum_{x\in V}d_G(x)=d_G(u)+n$$

所以 $d_G(u)=n$，因此 u 就是这 n 条边的公共端点，也即为 n 条线段的公共端点。

3.2 生成树

在这一节我们将讨论以树作为子图的情况。

定义 3.2.1 给定一个图 G，如果图 G 的一个生成子图 T 是一棵树，则称 T 是 G 的一个生成树。

例如，在图 3.7 所示的图中，T_1，T_2 和 T_3 都是 G 的生成树。

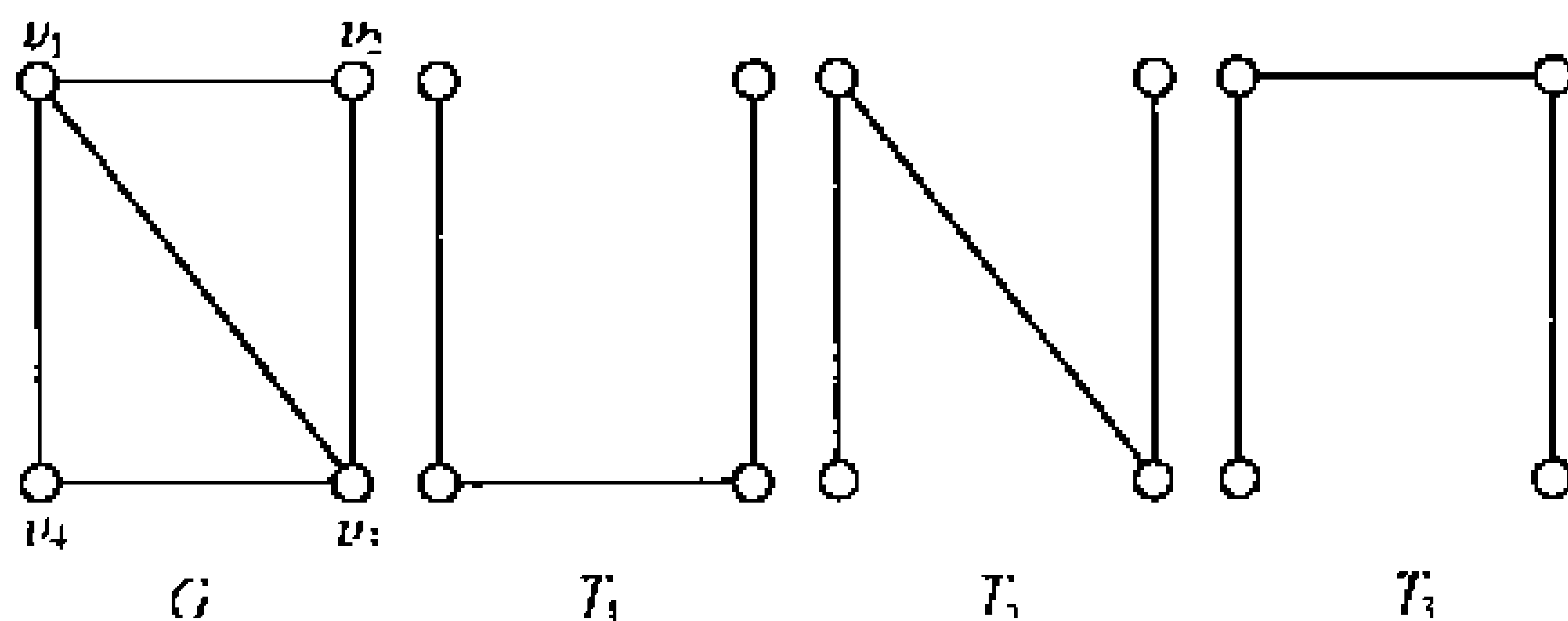


图 3.7

明显地，如果一个图 G 有生成树，则 G 一定连通。反之，设 G 是一个连通图，我们可以通过以下两种不同的方法来构造图 G 的一个生成树。

方法一：破圈法。设 G 是一个连通图，如果 G 是树，则 G 本身就是 G 的一个生成树。如果 G 不是树，则 G 至少有一个回路 C，在 C 中任取一条边 e，则 $G-e$ 仍是连通图，即 $G_1=G-e$ 是 G 的连通生成子图。如果 G_1 仍不是树，可以继续这过程，直到一条边从最后一个回路中去掉，所得图 T 就是 G 的一个连通生成子图，而且没有回路，故 T 就是 G 的一棵生成树。

方法二：避圈法。设 G 是一个连通图。在 $V(G)$ 中逐次添加 $E(G)$ 中的边，要求每次添加边之后所得子图都不含回路。把上述

过程进行到无法再进行为止。所得到的子图 T 是 G 的一个极大无回路生成子图，T 就是 G 的生成树。

这样我们就构造性证明了下述定理：

定理 3.2.1 G 是连通图当且仅当 G 含有生成树。

定义 3.2.2 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，称 $\overline{T} = G - E(T)$ 为 T 的**余树**。T 中的边称为**树枝**(或简称为**枝**)。$\overline{T}$ 中的边称为 G 关于 T 的**弦**。

不难看出连通图 G 的生成树 T 所含的树枝和弦的条数分别是 $p(G)-1$ 和 $q(G)-p(G)+1$，它们与生成树的选取无关。

在这里要注意，生成树的余树未必是树，而且未必是连通的。图 3.8 给出了连通图 G 的一个生成树 T 及其余树 $\overline{T}$。

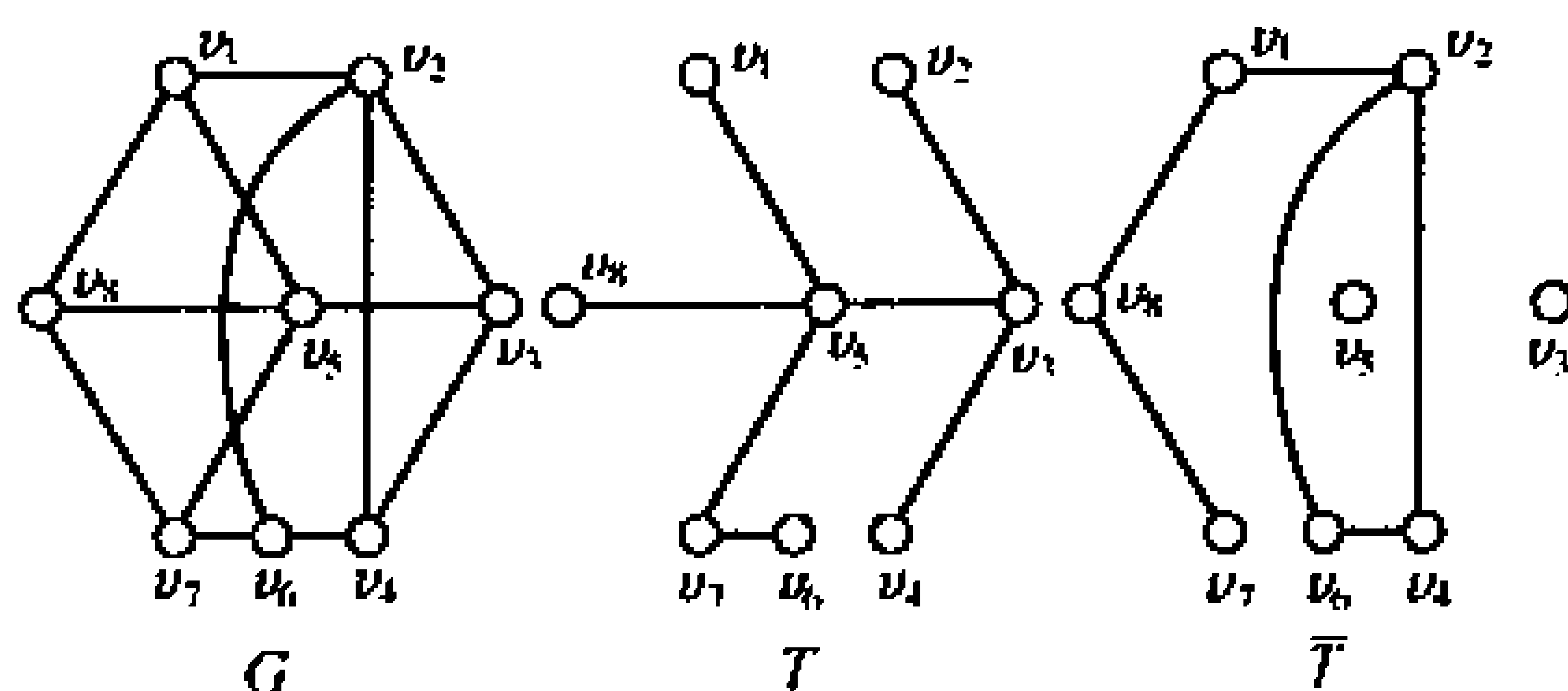


图 3.8

定理 3.2.2 设 T 是 G 的一个生成树，$\overline{T}$ 是 G 关于 T 的余树，则

(1) $E(\overline{T})$ 中不含 G 的任何边割；

(2) 对 T 中任何一条边 e，$E(\overline{T}+e)$ 有且只有 G 的一个极小边割；

(3) 对 $\overline{T}$ 中任何一条边 e，$T+e$ 含有惟一的一个回路。

证明 (1) 对 $E(\overline{T})$ 中任意一个边子集 E'，由于 $T = G - E(\overline{T})$，T 是 $G-E'$ 的生成子图，也即 $G-E'$ 含有生成树。由定理 3.2.1 知，$G-E'$ 是连通图，因此 E' 不可能构成 G 的边割。这就证

明了(1)成立。

(2) 对 T 中任何一条边 e,因为 T 是树,$T-e$ 恰有两个连通分支,设它们是 T_1 和 T_2,记 $V_1 = V(T_1)$,则 $\overline{V}_1 = V(T_2)$,显然 G 有一个边割 $[V_1,\overline{V}_1] \subseteq E(\overline{T}+e)$,并且 $G-[V_1,\overline{V}_1]$ 恰有两个连通分支 $G[V_1]$ 与 $G[\overline{V}_1]$,于是 $[V_1,\overline{V}_1]$ 就是含在 $E(\overline{T}+e)$ 中 G 的一个极小边割(参见习题 2.21)。现来证明 $E(\overline{T}+e)$ 只含 G 的一个极小边割。

设 $E' \subseteq E(\overline{T}+e)$ 是 G 的一个不同于 $[V_1,\overline{V}_1]$ 的极小边割,则由(1)可知 $e \in E'$,并且 $T-e$ 是 $G-E'$ 的生成子图。由于 E' 与 $[V_1,\overline{V}_1]$ 是 G 的两个不同的极小边割,不妨设存在 $e' \in [V_1,\overline{V}_1]-E'$,则 $(T-e)+e'$ 是 $G-E'$ 的一个生成子图。现由 $e' \in [V_1,\overline{V}_1]$ 可知 $(T-e)+e'$ 是连通的,因此 $G-E'$ 连通,这与 E' 是 G 的一个极小边割相矛盾。这样 $[V_1,\overline{V}_1]$ 是 $E(\overline{T}+e)$ 中 G 的惟一的一个极小边割。

(3) 此结论即为定理 3.1.2(5)。 证毕。

从定理 3.2.2(3) 可发现,对于每一个连通图 G 及它的一个生成树 T,关于 T 的弦有 $q(G)-p(G)+1$ 条,因而 G 至少含有 $q(G)-p(G)+1$ 个不同的回路。

定义 3.2.3 设 T 是 $G=(V,E)$ 的一个生成树,v 是 G 的一个顶点,若对于 $V-\{v\}$ 的任一顶点 u,有 $d_T(v,u)=d_G(v,u)$,则称 T 是 G 关于 v 的保距生成树。

定理 3.2.3 设 v 是连通图 G 的任意一个顶点。则存在 G 关于 v 的保距生成树。

证明 首先作 $V(G)$ 的点子集:

$$V_i = \{u \mid u \in V(G), d(v,u) = i\}$$

对一切 $i = 1,2,\cdots,R(v)$。记 $V_0 = \{v\}$。

因为 G 是连通图,故

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{R(v)}$$

从 V_i 的定义可知，对 V_i 中每个顶点 u，V_{i-1} 中至少存在一个顶点 u'，使 $uu' \in E(G)$。现在作 G 的一个生成子图 T：对 V_i 中每一个顶点 u，在 G 中取一条边 $e_u = uu'$，使 $u' \in V_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots,R(v))$。以这些边作为 T 的边集合。

从 T 的构造不难看出 T 含有 $p-1$ 条边，下面证明对 T 中每个不同于 v 的顶点 u，有

$$d_T(u,v) = d_G(u,v)$$

设 $u \in V_i$，当 $i = 1$ 时，则明显地

$$d_T(u,v) = d_G(u,v) = 1$$

归纳假设当 $i < k$ 时结论成立。对 $u \in V_k$，由 T 的构造，存在 $u' \in V_{k-1}$，$uu' \in E(T)$。由归纳假设

$$d_T(u',v) = d_G(u',v)$$

但根据 V_k 的定义以及 $uu' \in E(T)$，我们有

$$d_T(u,v) = d_T(u',v) + 1$$

$$d_G(u,v) = d_G(u',v) + 1$$

所以 $\quad d_T(u,v) = d_G(u,v)$

这就证明了对 T 中每个顶点 $u \neq v$，有 $d_T(u,v) = d_G(u,v)$。因而 T 也是连通图。由定理 3.1.2 知，T 是树，所以 T 就是 G 的关于 v 的保距生成树。　　证毕。

例如，图 3.9 中的 T 是 G 的关于 v 的保距生成树。

给定一个连通图，求它的生成树的数目，这是图论中树的计数问题。这在化学分子结构理论及计算机科学中有重要的应用。

设 $G = (V,E)$ 是一个连通图，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，$T_1$ 与 T_2 是 G 的两个生成树，如果 $E(T_1) \neq E(T_2)$，则认为 T_1 与 T_2 是 G 的两个不同的生成树。G 的生成树个数用 $\tau(G)$ 表示。

要注意的是：$\tau(G)$ 并非是 G 的不同构的生成树个数。例如，

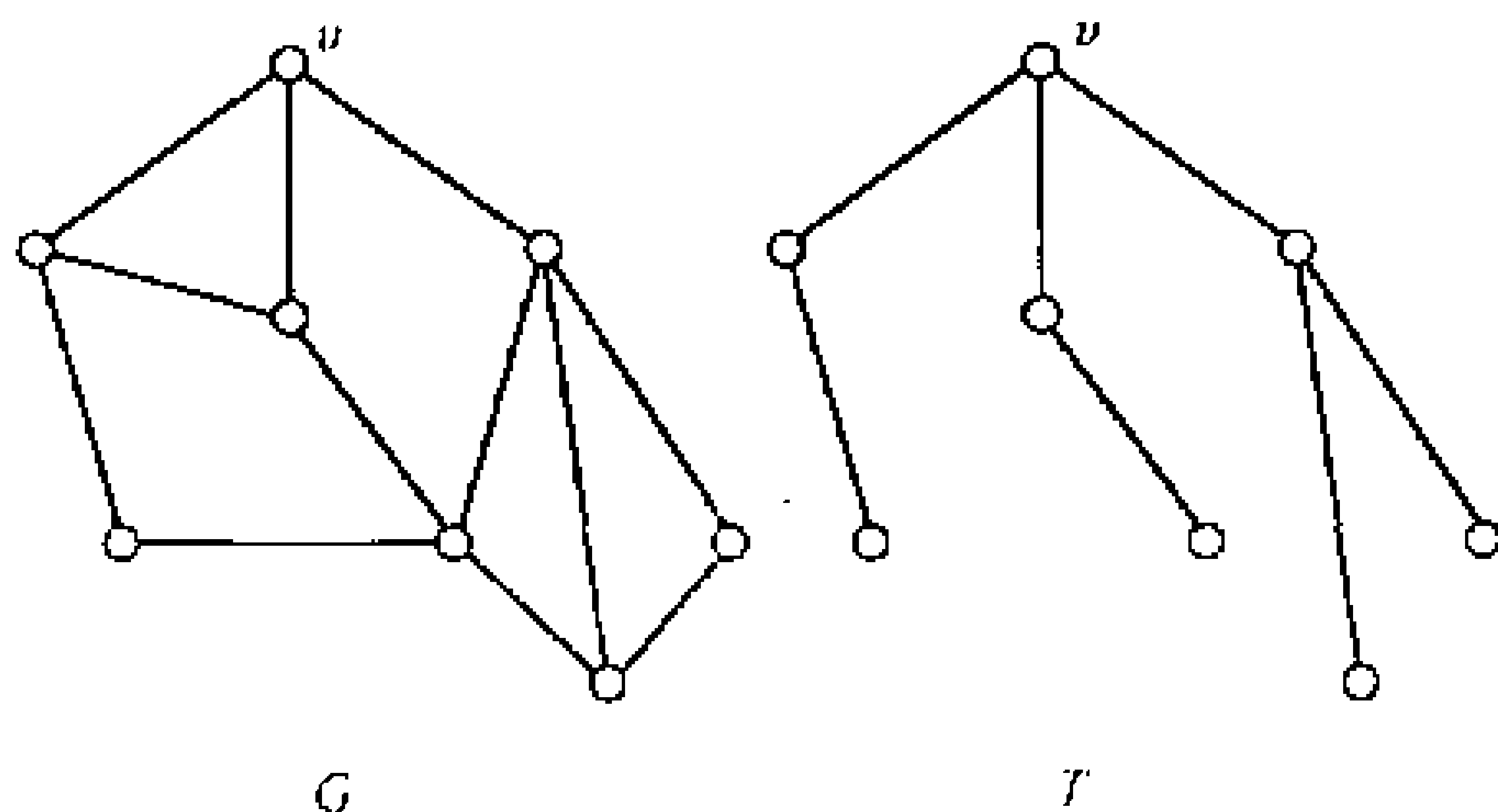


图 3.9

对于 K_6 来说,只有 6 棵互不同构的生成树,如图 3.10 所示。但从下面定理 3.2.5 可知,K_6 却有 $6^4 = 1296$ 棵不同的生成树。

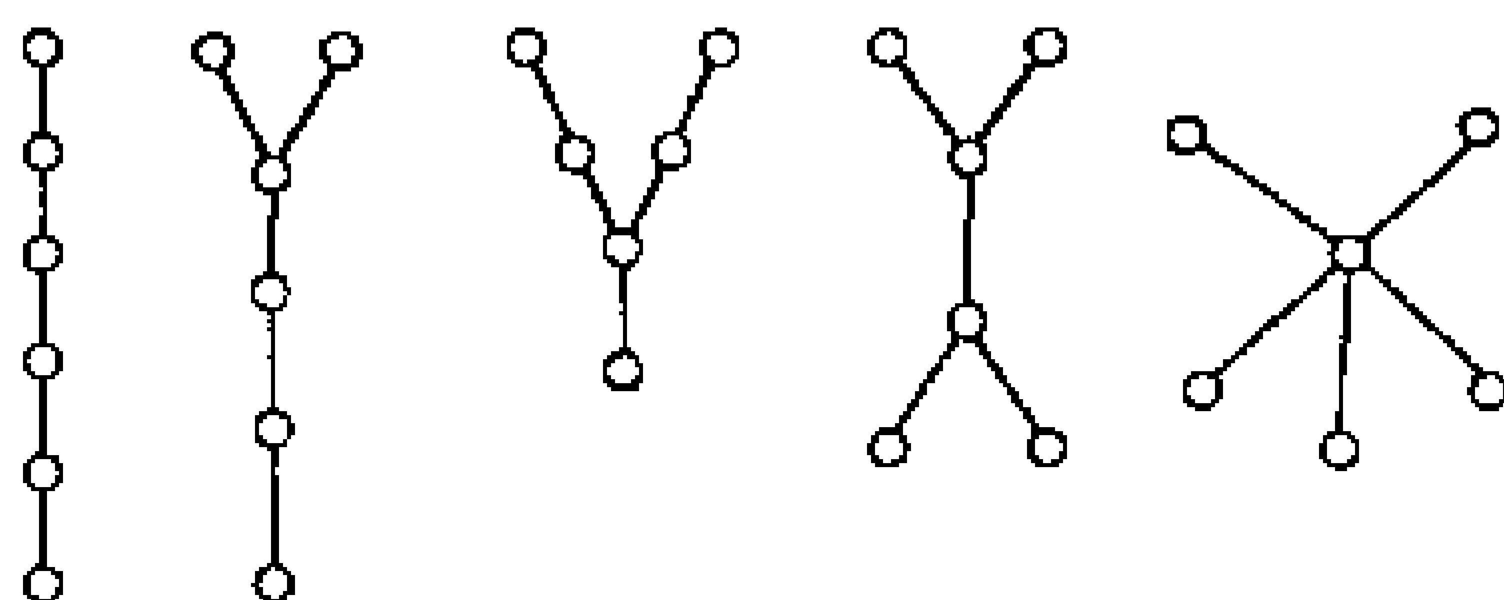


图 3.10

下面介绍一个求 G 的生成树个数 $\tau(G)$ 的递推公式。

首先给出图 G 的一种运算。设 $e = uv$ 是 G 的一条边(不是环),在 G 中删去边 e,再在 $G - e$ 中重合 e 的两个端点 u 和 v 为一个新的顶点 $w(u,v)$。而 G 中除 e 外一切与 u 和 v 关联的边都改成与这个新顶点 $w(u,v)$ 相关联。这样所得到的图称为 G 收缩边 e,记为 $G \cdot e$。图 3.11 给出了这种收缩运算的过程。

定理 3.2.4 设 G 是无环图,e 是 G 的一条边,则

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

证明 我们用 J 表示 G 的所有生成树集合,用边 e 把 J 的元

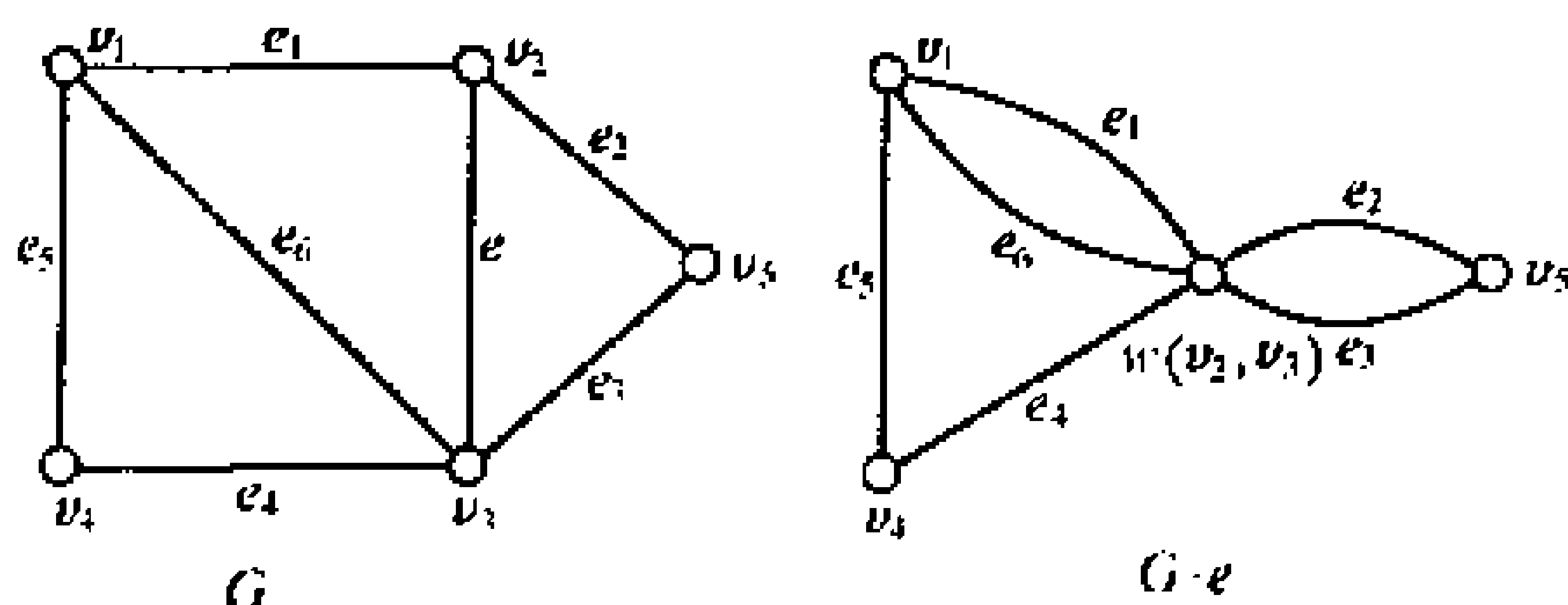


图 3.11

素分成两类:第一类是 G 含 e 的生成树全体,用 J_1 表示;第二类是 G 的不含 e 的生成树全体,用 J_2 表示,则

$$\tau(G) = |J| = |J_1| + |J_2|$$

由于 $G-e$ 是 G 的生成子图,$G-e$ 的每个生成树都是 G 的不含 e 的生成树,因而属于 J_2。而 G 的每一棵不含 e 的生成树显然也是 $G-e$ 的生成树,所以有

$$\tau(G-e) = |J_2|$$

而对于 G 的含 e 的每一棵生成树 T,$T\cdot e$ 就是 $G\cdot e$ 的一棵生成树。反之,对 $G\cdot e$ 的每一棵生成树 T',只要在 T' 中把由 e 收缩而成的新顶点还原,即得 G 的含 e 的生成树,因此 J_1 中的树与 $G\cdot e$ 的生成树之间有一个一一对应关系。故

$$\tau(G\cdot e) = |J_1|$$

因此我们有 $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G\cdot e)$。　　证毕。

图 3.12 说明了用定理 3.2.4 的结果来推算 $\tau(G)$。为了简洁,仍用图本身来表示该图的生成树个数。另外,由于一个图的环不含在任何生成树中,在计算 $\tau(G)$ 过程中,如果出现环,可以去掉。

上述定理虽然给出了计算生成树个数的一个方法。但当给定的图的顶点数和边数都较大时,这个方法非常繁杂,不切实用。当 G 是一个完全图 K_p 时,英国数学家凯莱(Gayley)早在 1889 年就给出了 $\tau(K_p)$ 的一个简单的计算公式。

$\tau(G)=$

$=1+1+2+1+1+2+3=11$

图 3.12

定理 3.2.5 对于 $p\geqslant 2, \tau(K_p)=p^{p-2}$。

证明 设 $V(K_p)=\{1,2,\cdots,p\}$。不难看出集合

$$V_{(K_p)}^{p-2}=\{(a_1,a_2,\cdots,a_{p-2})\mid 1\leqslant a_i\leqslant p, i=1,2,\cdots,p-2\}$$

含有 p^{p-2} 个元素。故我们只需证明由 K_p 的生成树构成的集合与 $V_{(K_p)}^{p-2}$ 能建立一一对应关系。

对 K_p 的每一个生成树 T,按以下方式构造一个长为 $p-2$ 的序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{p-2})$:设 b_1 是 T 中标号最小的悬挂点,a_1 是 T 中与 b_1 相邻的顶点,现从 T 中删去 b_1,$T-b_1$ 仍是一棵树,让 b_2 是 $T-b_1$ 中标号最小的悬挂点,a_2 是在 $T-b_1$ 中与 b_2 相邻的顶点的标号;重复这个过程,直至 a_{p-2} 被确定。留下来恰好是两个顶点的一棵树。这就得到了由 T 惟一确定的长为 $p-2$ 的一个序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{p-2})$。例如图 3.13 的 K_7 的一棵生成树 T 所产生的序列为 $(1,3,1,3,3)$。

反之,任取 $(a_1,a_2,\cdots,a_{p-2})\in V^{p-2}(K_p)$,应用上面的逆过程可求得 K_p 的一棵生成树。首先注意到 T 的每个顶点 u 在 $(a_1,a_2,\cdots,a_{p-2})$ 中共出现 $d_T(u)-1$ 次。于是 T 的悬挂点恰好是在该序列中未出现的那些顶点的标号。现在可按以下方式由 $(a_1,a_2,\cdots,a_{p-2})$ 构

造 K_p 的一个生成树 T:设 b_1 是 $V(K_p)-\{a_1,a_2,\cdots,a_{p-2}\}$ 中的最小值,则连接 b_1 与 a_1,其次令 b_2 是 $V-\{b_1,a_2,\cdots,a_{p-2}\}$ 中的最小值,并连接 b_2 与 a_2;重复这过程,直至确定了 $p-2$ 条边 $b_1a_1,b_2a_2,\cdots,b_{p-2}a_{p-2}$。现在添加这样一条边,它连接 $V(K_p)-\{b_1,b_2,\cdots,b_{p-2}\}$ 中剩下的两个顶点。这样就构成了 K_p 的一个生成树 T。例如,以序列(2,3,2,4,3)为例,依次连接的边是 12,53,62,24,43,37。得到如图 3.14 所示的 K_7 的生成树 T'。

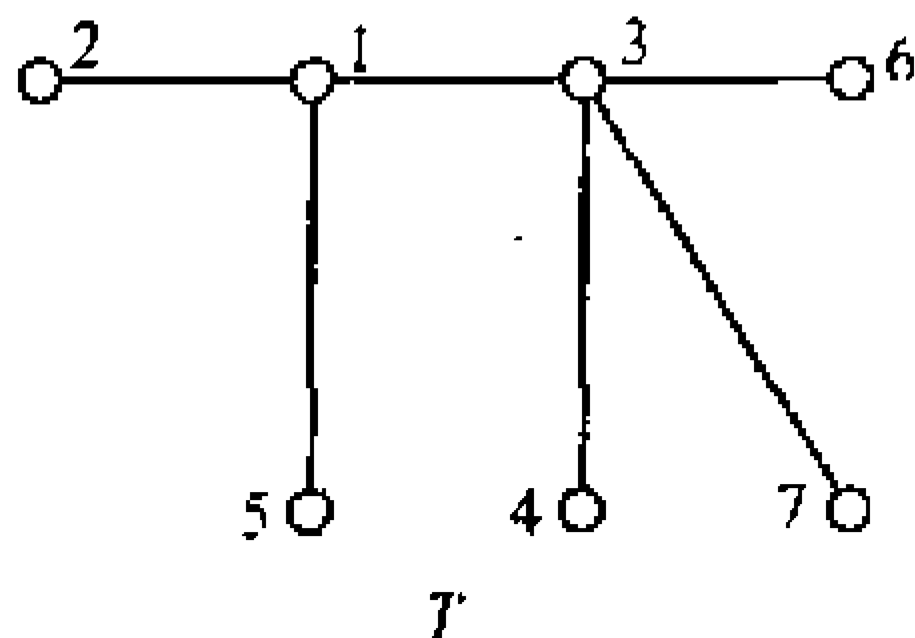


图 3.13

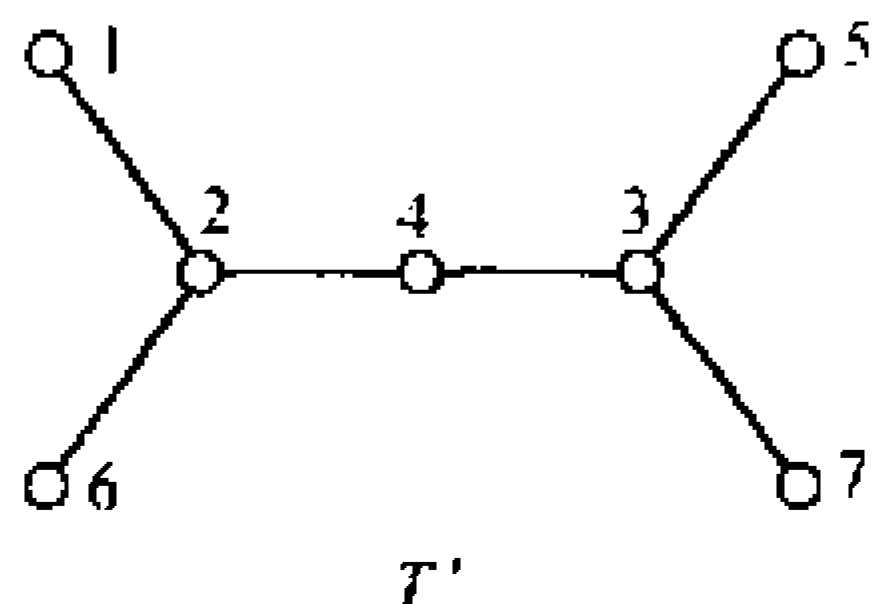


图 3.14

从 K_p 的任一个生成树 T 出发,可以构造出惟一的一个序列;从这个序列出发,按上面的规则又可以构造出与它对应的惟一的一个生成树,显然这个生成树就是原来的生成树 T。所以 K_p 的生成树全体构成的集合与 $V^{p-2}(K_p)$ 能建立一一对应,故

$$\tau(K_p)=|V^{p-2}(K_p)|=p^{p-2}$$

证毕。

3.3 最优生成树

为了给一些乡村联合供水,必须在各村之间建造管线系统,设计规划自然得考虑经济的和其他的因素,往往需画一个略图,用纸上的点表示乡村,用一组边对应于各乡村间的管线,那么这个图必定是连通的简单图。

我们来讨论这个图 G，它的顶点对应于乡村，而边对应于建造各乡村间的管线。计算好一个管线的建造费用并且加注在对应的边旁，边 e 旁边的数字叫做边费用，记为 $w(e)$（即为边 e 的权）。这样我们就得到一个赋权图，则要设计一个总造价最小的管线系统，就归结为在赋权图中找出具有最小权的连通生成子图。由于权表示造价，当然是非负的。所以我们可以断定最小权生成子图是 G 的一棵生成树。

定义 3.3.1 连通赋权图中具有最小权的生成树称为**最优生成树**简称**最优树**。

这样要设计一个总造价最小的管线系统，就归结为在赋权图中找最优生成树。

1956 年克拉斯科（Kruskal）给出了在连通赋权图 G 中求解最优生成树的算法。这个算法称为 Kruskal 算法。

Kruskal 算法

(1) 在 G 中选取边 e_1，使 $w(e_1)$ 尽可能小。

(2) 若已选定边 $e_1, e_2, \cdots, e_i$，则从 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取边 e_{i+1}，使满足以下两条：

① $G[e_1, e_2, \cdots, e_i, e_{i+1}]$ 不含回路；

② 在满足 ① 的前提下，使 $w(e_{i+1})$ 尽可能小；

(3) 当(2) 不能继续执行时，停止。

在这里需要说明的是由 Kruskal 算法得到的图 $T^* = G[e_1, e_2, \cdots, e_k]$ 是 G 的生成树，这是因为算法的每一步都不允许出现回路，故 T^* 中无回路。当 $G\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 不是 G 的生成树时，即 $G[e_1, \cdots, e_k]$ 不是生成子图，可以在 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 中选出边 e_{k+1}，使得 e_{k+1} 的端点至少有一个不在 $G[e_1, e_2, \cdots, e_k]$ 上，因此 $G[e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}]$ 无回路，从而存在满足算法(2) 的边 e_{k+1}，也即 Kruskal 算法在第 k 步后还可以继续。矛盾。若 $G[e_1, e_2, \cdots, e_k]$ 不连通，由于 G 连通，在 G 中可以取一条连接 $G[e_1, e_2, \cdots, e_k]$

的两个连通分支的一条边 e'_{k+1},因而 $G[e_1,e_2,\cdots,e_k,e'_{k+1}]$ 也无回路,此时 Kruskal 算法仍可继续进行,又是矛盾,故 $T^* = G[e_1, e_2,\cdots,e_k]$ 是 G 的生成树。

还需说明的是由 Kruskal 算法求得的生成树 T^* 是 G 的最优树。在证明这一结论之前。先看一个求最优树的具体例子。

考察图 3.15(a) 的赋权图 G,其中顶点 f 表示水源,用水的乡村记为 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,水管只许沿着图的边敷设。边旁侧的数字表示对应水管的建设费用(以 10 000 个货币单位)。图 3.15 从(b) 到(f) 的各个图中的粗边标出来的图表示对 G 施行 Kruskal 算法时逐步得到的图。最后 3.15(f) 中用粗边标出的图就是经 Kruskal 算法而得到的 G 的最优生成树。其费用是 19 个单位。

定理3.3.1 由 Kruskal算法构作的任何生成树 $T^* = G[e_1, e_2,\cdots,e_{p-1}]$ 都是 G 的最优生成树。

证明 前面已经说明了 T^* 是 G 的生成树。设 T^* 不是 G 的最优生成树。对 G 的任何异于 T^* 的生成树 T,定义 T 的函数 $f(T)$ 如下:

$$f(T) = \min\{i \mid e_i \text{不在} T \text{中}\}$$

选取 G 的一棵最优树 T_0,使 $f(T_0)$ 最大。设 $f(T_0) = k$,则 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$ 同时在 T_0 中和 T^* 中,但 e_k 不在 T_0 中。由定理 3.1.2(5) 知 $T_0 + e_k$ 包含惟一的一个回路,记为 C。则 C 中至少有一条边设为 e'_k 不在 T^* 中。取

$$T' = (T_0 + e_k) - e'_k$$

则 T' 是含有 $p(G)-1$ 条边的连通图,因此 T' 也是 G 的生成树,易得

$$W(T') = W(T_0) + w(e_k) - w(e'_k) \tag{1}$$

由于 Kruskal 算法中选取的边 e_k,是使 $G[e_1,e_2,\cdots,e_k]$ 为无回路图的权最小的边,而 $G[e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e'_k]$ 是 T_0 的子图,它也是

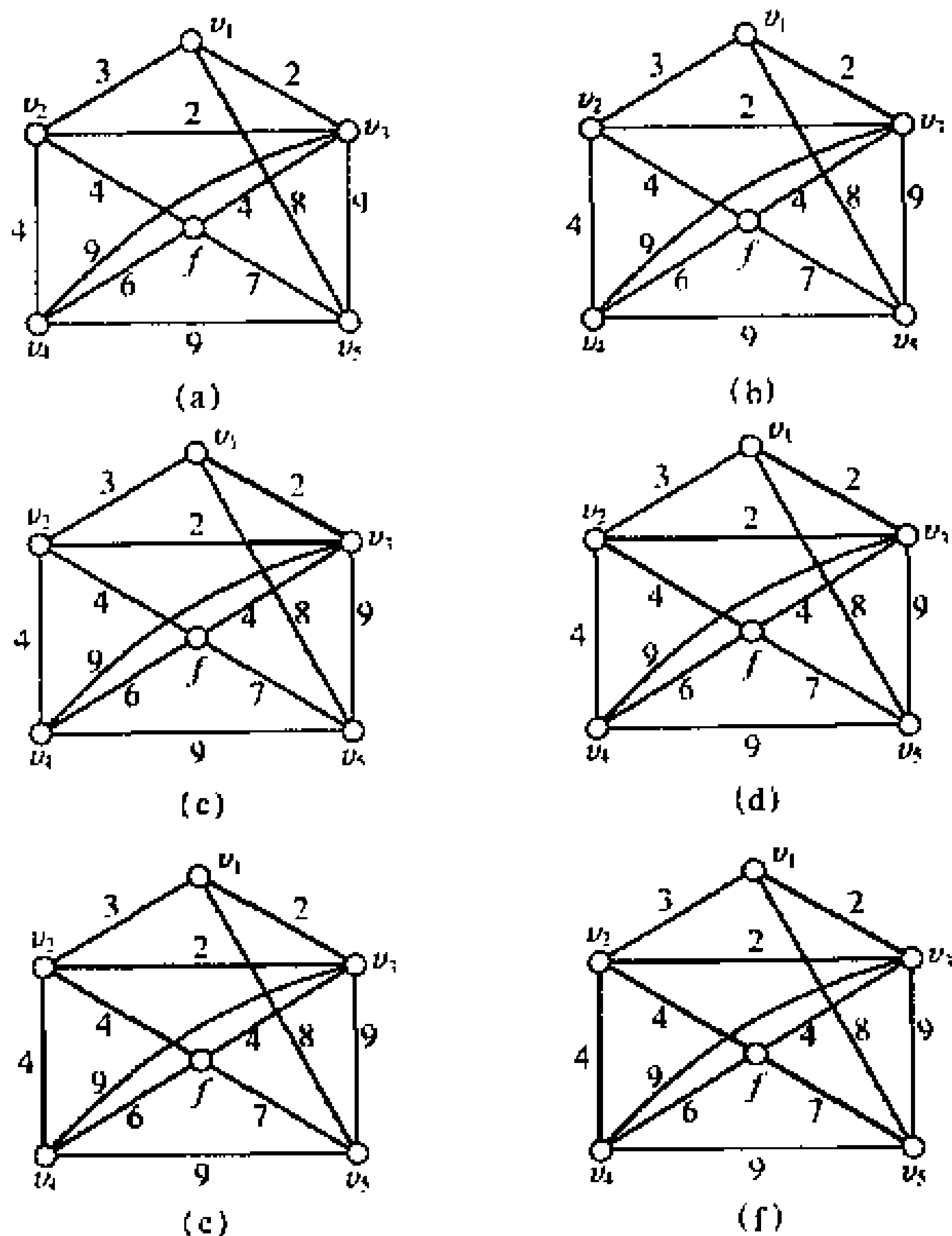


图 3.15

无回路图，于是可得

$$w(e'_k) \geqslant w(e_k) \tag{2}$$

结合式(1) 和式(2) 有

$$W(T') \leqslant W(T_0)$$

所以 T' 也是 G 的一棵最优树。然而，由于 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\} \subseteq E(T')$，我们有

$$f(T') > k = f(T_0)$$

与 T_0 的选取相矛盾。因此 T^* 是 G 的最优生成树。　　　　证毕。

Kruskal 算法的框图如图 3.16 所示。通过对各框图的讨论。易计算出该算法的计算量为 $f(p,q) = 0(n^2)$。因此 Kruskal 算法是一种有效算法。

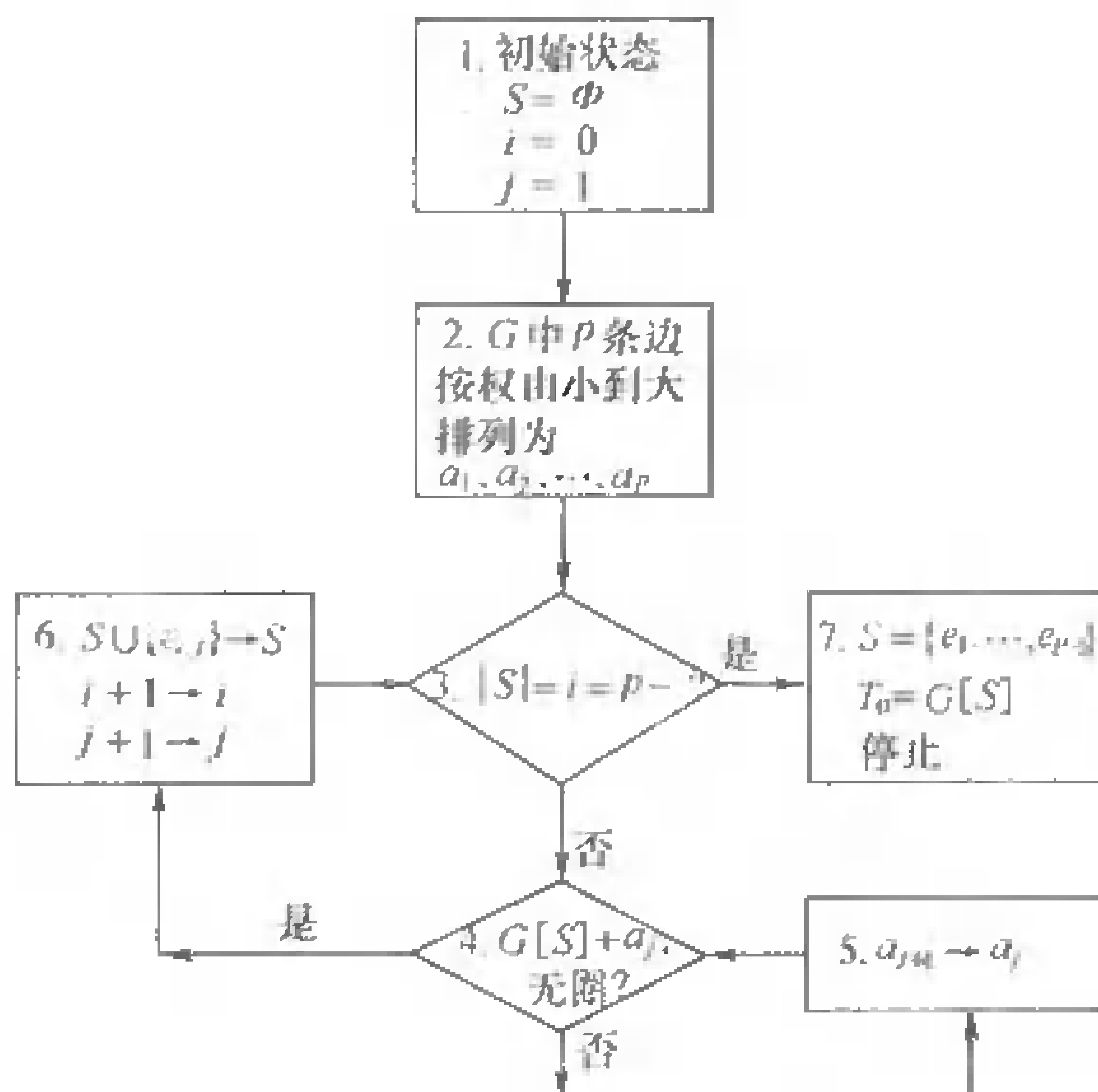


图 3.16

下面再介绍一种求最优生成树的方法，称为破圈法。这个方法是由 Rosenstiehl 和管梅谷各自独立给出的。

设 G 是连通赋权图，若 G 不是树，则 G 中必有回路，我们删去 G 中含于某回路内权最大的一条边，所得图记为 G_1，G_1 是 G 的连通生成子图。下一步，若 G_1 不是树，又从 G_1 的某回路内删去权最大的一条边，如此下去，最后不能按上述方式删边时，得到的图 T^* 便是 G 的一棵生成树，与定理 3.3.1 类似可证 T^* 是 G 的最优生成树。

图 3.17 画出了由上述破圈法逐次去边得到的 G_k。图 3.17(f) 是所得到的 G 的最优生成树,权为 17。

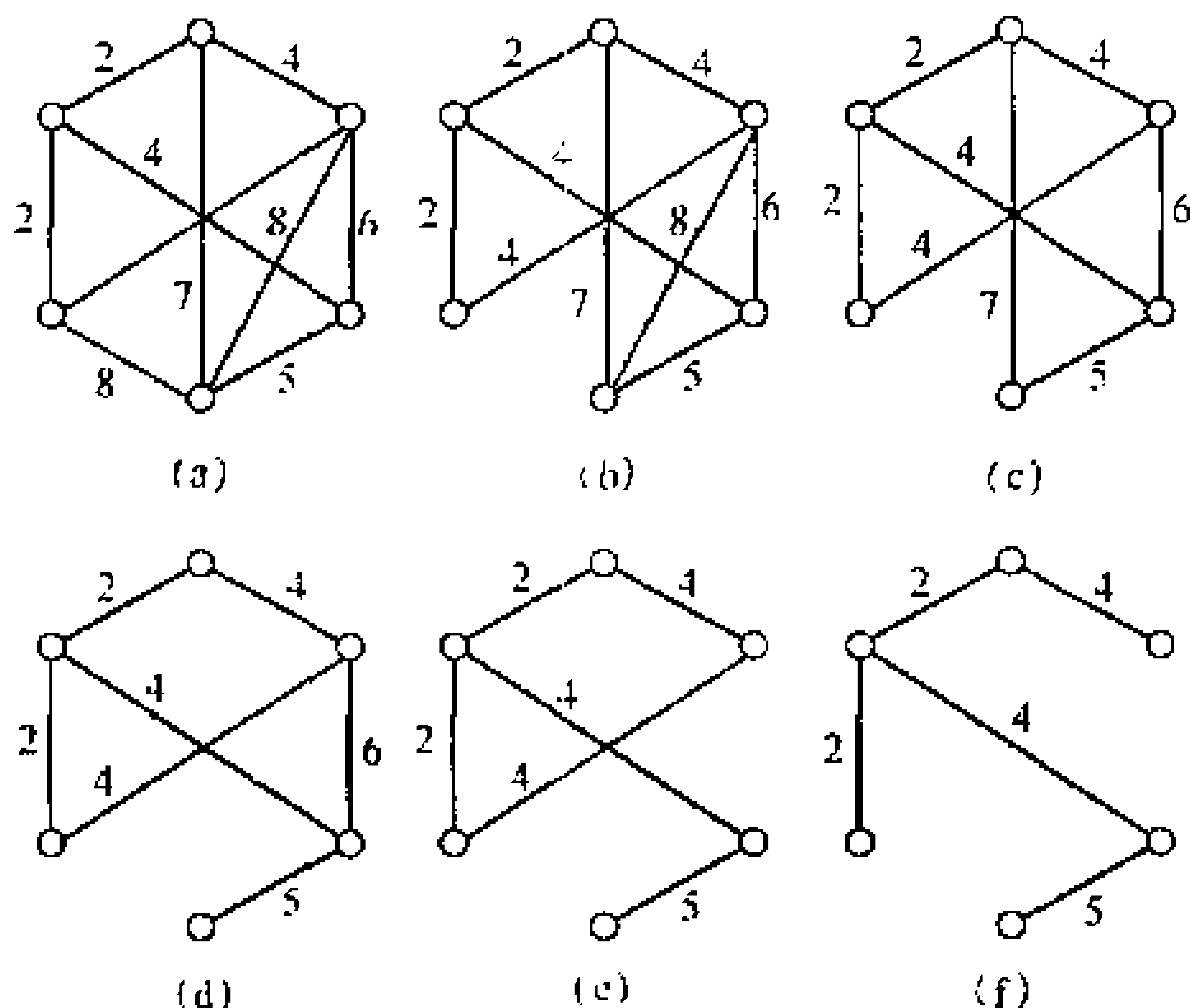


图 3.17

3.4 树形图

在前几节考虑了无向图中树的性质及最优生成树算法,有向图中就要讨论有向树和树形图,它们在计算机算法、计算机程序中有着重要的作用。此外,有向树常用来描述带有"体系"性质的结构,如图书馆的书籍分类等。

定义 3.4.1 一个有向图 D,如果略去每条弧的方向时所得无向图是一棵树,就称 D 为有向树。

在图 3.18 中,(a)、(b)、(c) 所示的有向图均为有向树。现在我们主要讨论一类像(b)、(c) 所示的重要的有向树,即为树形图,定

义如下：

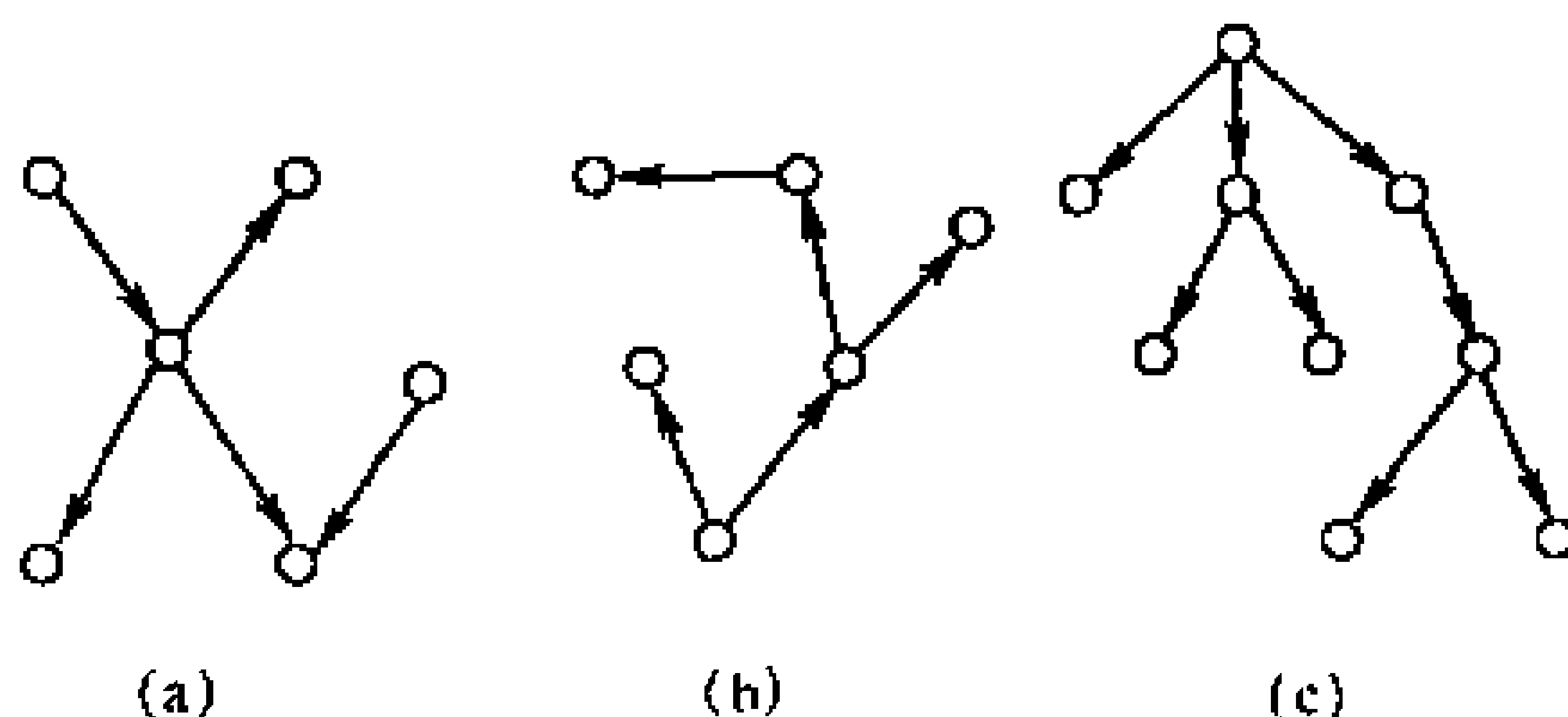


图 3.18

定义 3.4.2 若一棵有向树恰有一个顶点的入度为 0，其余所有顶点的入度为 1，则称为该有向树为**树形图**。入度为 0 的顶点称为树形图的**根**。入度为 1 出度为 0 的顶点称为树形图的**树叶**。入度为 1，出度非零的顶点称为**内点**。又将内点同根统称为**分支点**。

由于树形图具有一根，因而树形图也常称为**根树**。在树形图中，从根 v 到其余每个顶点 u 有惟一的一条有向路，其长度 $l(u)$ 称为该点 u 的**层数**。称层数相同的顶点在同一层上，层数越大的顶点所处的层越高。层数最大的顶点的层数称为树形图的**高**。

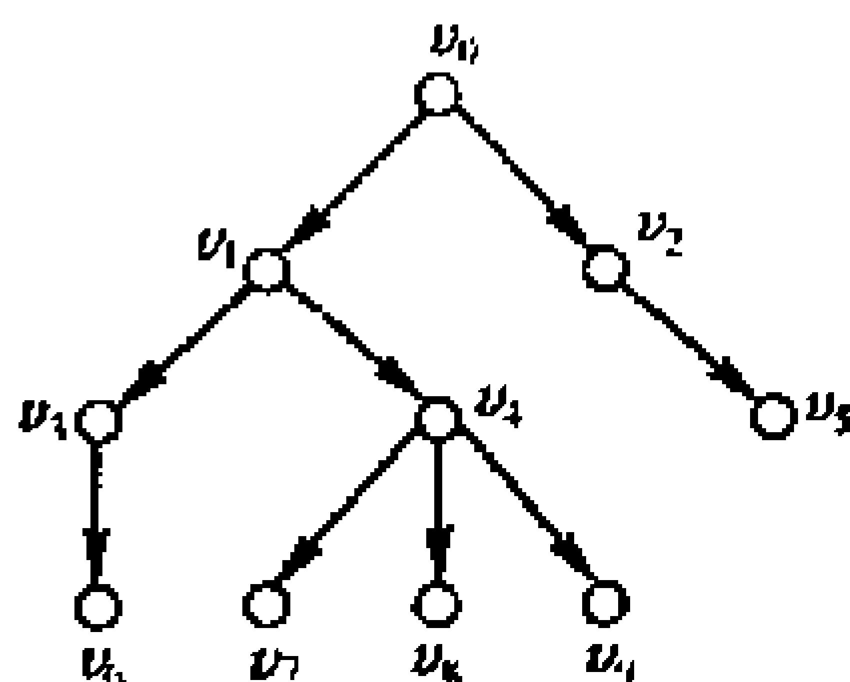


图 3.19

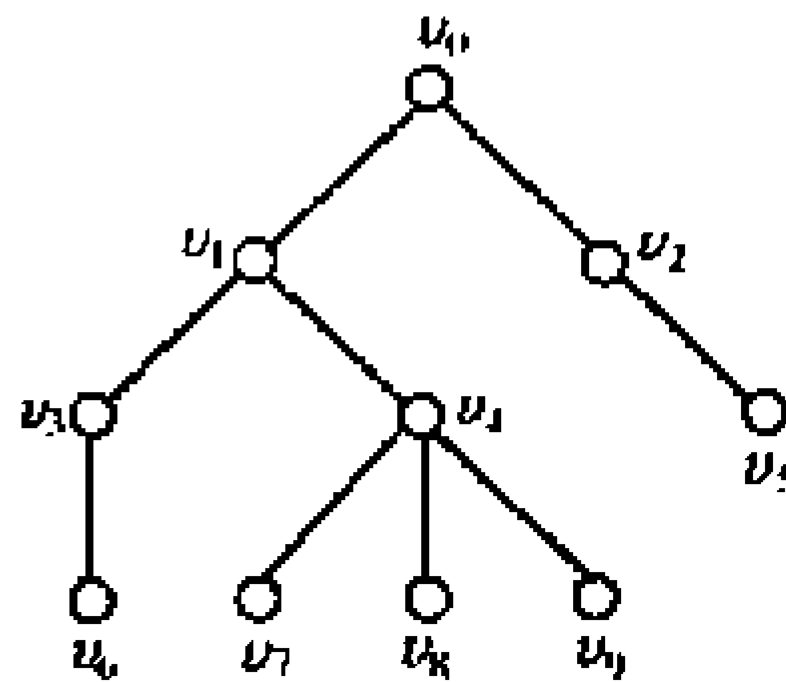


图 3.20

在图 3.19 中，v_0 是根，v_5，v_6，v_7，v_8，v_9 是树叶，v_1，v_2，v_3，v_4 是内点，v_0，v_1，v_2，v_3，v_4 统称为分支点。顶点 v_0 的层数为 0，顶点 v_1，v_2 的层数为 1，顶点 v_3，v_4，v_5 的层数为 2，顶点 v_6，v_7，

v_8, v_9的层数为3,这棵树形图的高为3。

例1 用树形图可以表示家庭之间关系。

设某祖宗a有两个儿子b、c,b与c分别有三个儿子d、e、f及g、h、i,而d及g分别又有一个儿子j及k。这样的家庭关系可以用如下的树形图d表示(图3.21):

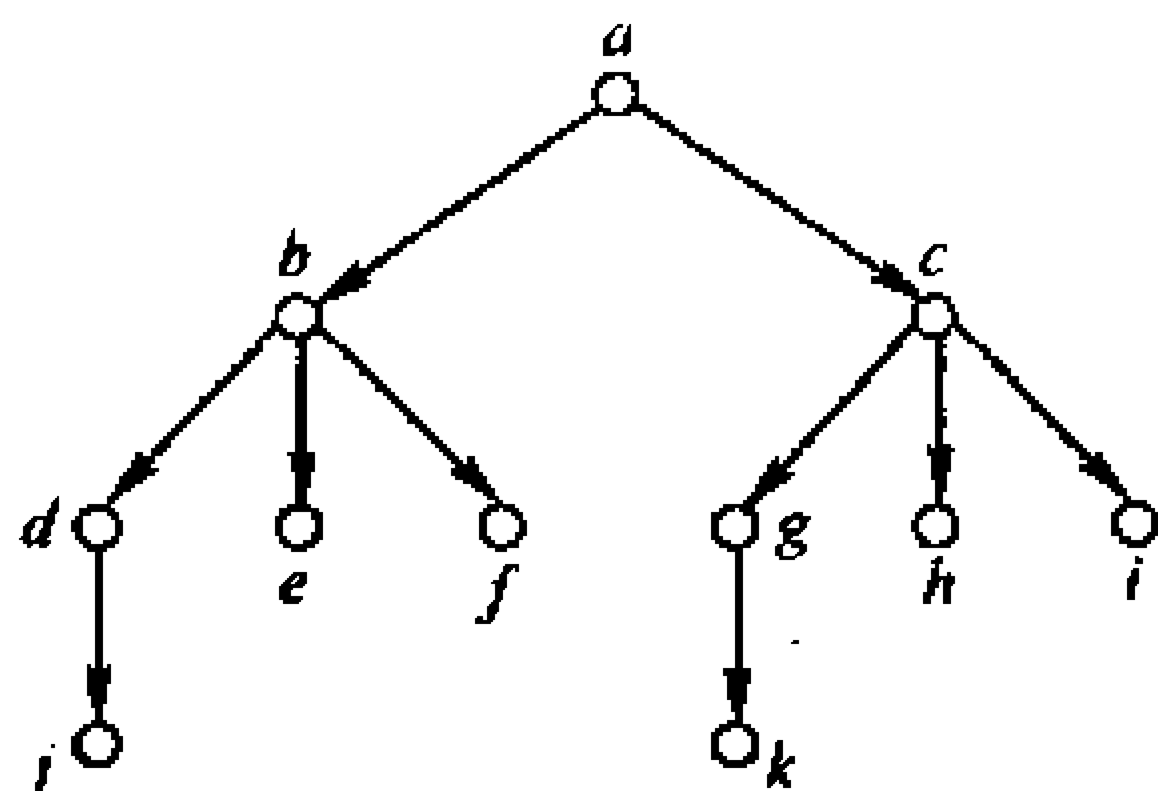


图3.21

我们把树形图也称为家族树。同时也给类似的一些术语。

定义3.4.3 设u是树形图的分支点,若从u到w有一条弧(u,w),则称w为u的儿子或u为w的父亲,若一分支点有两个儿子,则称它们为兄弟。若从u到z有一条有向路,则称z是u的子孙,或称u是z的祖先。

树形图概念非常重要,原因在于它描述了一个离散结构的层次关系,而层次结构是一种重要的数据结构,所以树形结构在相当广泛的领域中有它的应用。有时只要考虑某一层次上某分支点为根的局部层次关系,因此引入下面的概念。

定义3.4.4 设u是树形图T的任一顶点,以u为根,u及其所有子孙所组成的顶点集记V',u到这些子孙的有向路上所有弧组成的弧集记为E',称T的子图$T'(V',E')$为以u为根的子树。

根据树形图的定义,树形图的画法可以是任意的,但人们常常将根画在最上方,这样弧的箭头的方向就均向下,因而可省掉全部箭头,不会发生误解。将图3.19所示的树形图可画成图3.20所示的图。

上面我们讨论树形图时,没有考虑同一分支点连出的弧的次序,例如图3.22(a)、(b)所示的树形图就是这样,它们是相同(同构)的树形图。但是在计算机科学中的许多具体问题(如编码理论

和程序语言等）一定要考虑这种弧的次序。为此，我们来引进有序树的概念。

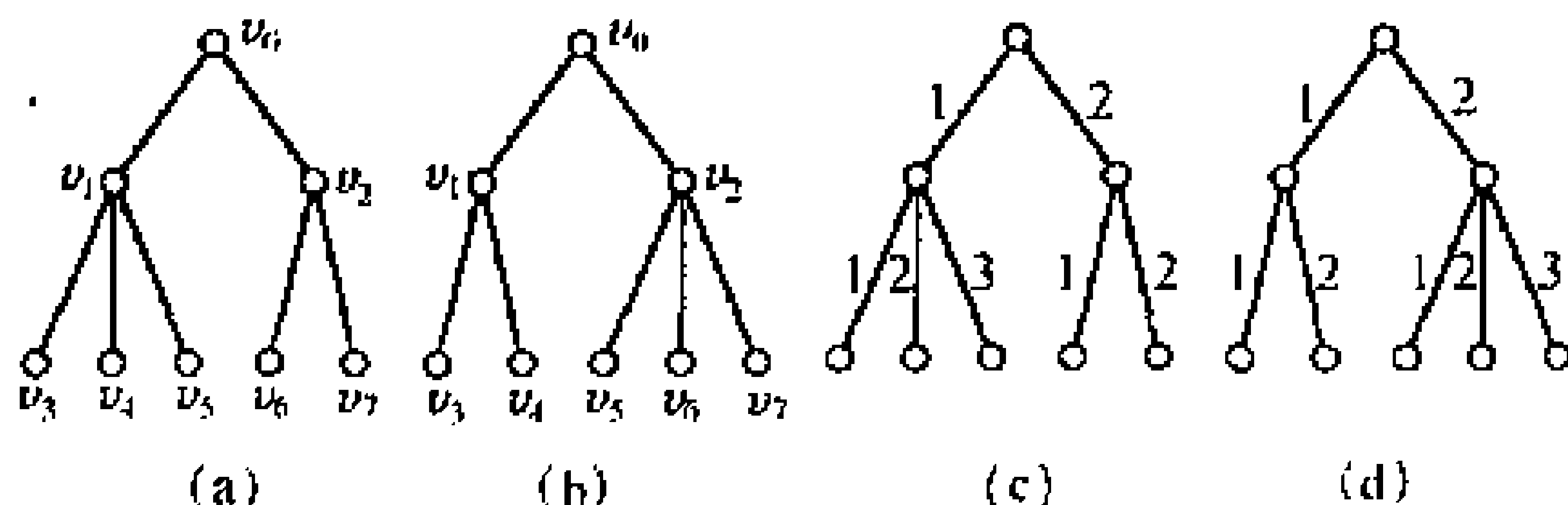


图 3.22

定义 3.4.5 如果在树形图中规定了每一层上顶点的次序，这样的树形图称为**有序树**。

一般地，在画出的有序树中，同一层上顶点的次序为从左到右。也可以用弧的次序来代替顶点的次序。在图 3.22(c)、(d) 中的有序树是不同的，而它们对应的树形图却相同的。

定义 3.4.6 设 T 为一棵树形图。

(1) 若 T 的每个分支点 v，有 $d^+(v) \leqslant m$，称该树形图为 **m 元树**；

(2) 若 T 的每个分支点 v，有 $d^+(v) = m$，称该树形图为 **m 元正则树**；

(3) 若 m 元树 T 是有序的，则称 T 为 **m 元有序树**；

(4) 若 m 元正则树 T 是有序的，则称 T 是 **m 元有序正则树**；

(5) 若 T 是 m 元正则树，且所有树叶的层数均相同，则称 T 为 **m 元完全正则树**。

在图 3.23 中，(a) 是二元树，(b) 是二元有序树，(c) 是二元正则树，(d) 是二元有序正则树。

一类重要的 m 元(有序) 树是二元(有序) 树及二元(有序) 正则树。对于二元有序树，一个分支点的左右两个儿子为根的子树分别称为左子树和右子树。

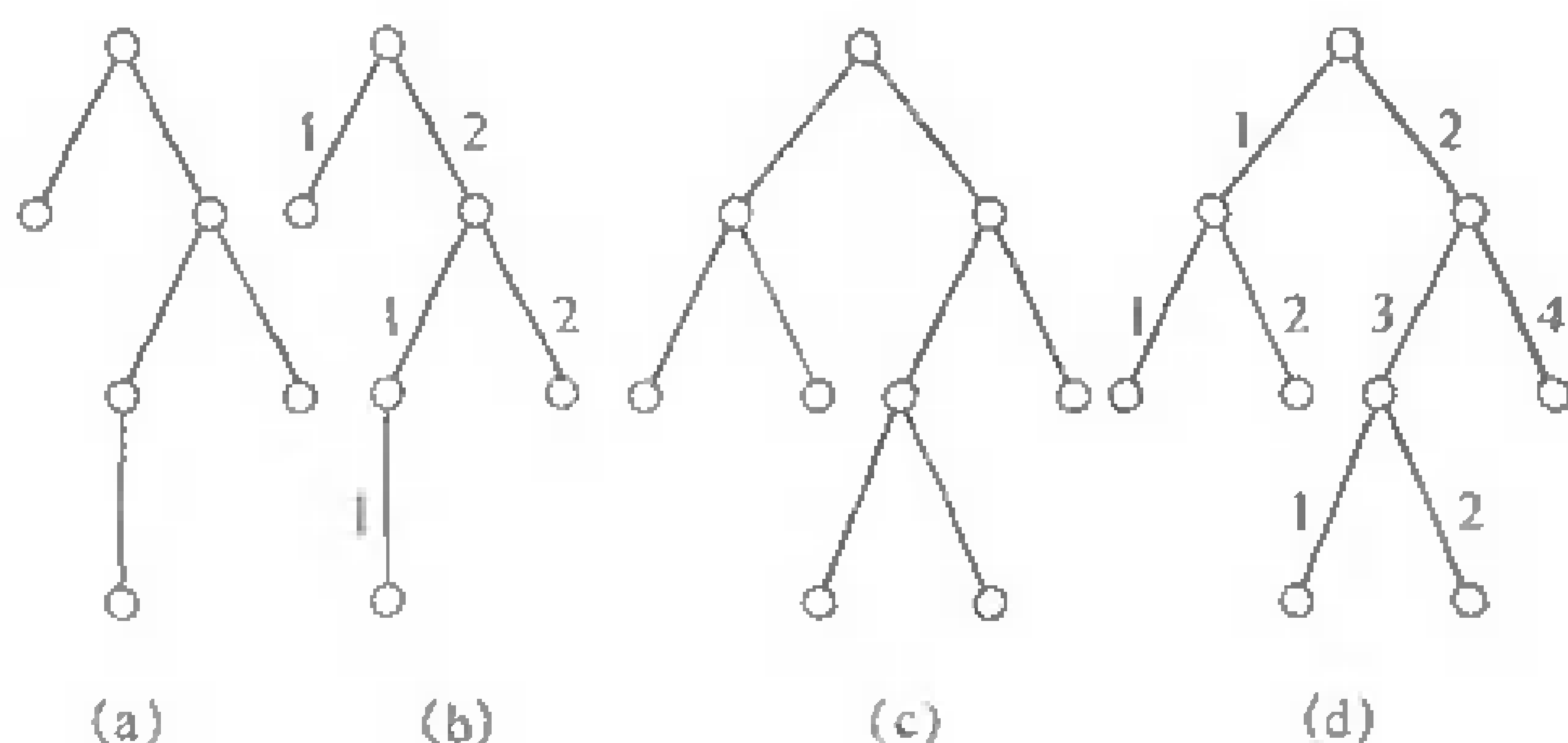


图 3.23

例 2 算术表达式 $a-b+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$ 可以用图 3.24 中的二元有序树来表示。所有运算对象都处于树叶的位置，所以运算符都处于分支点的位置。

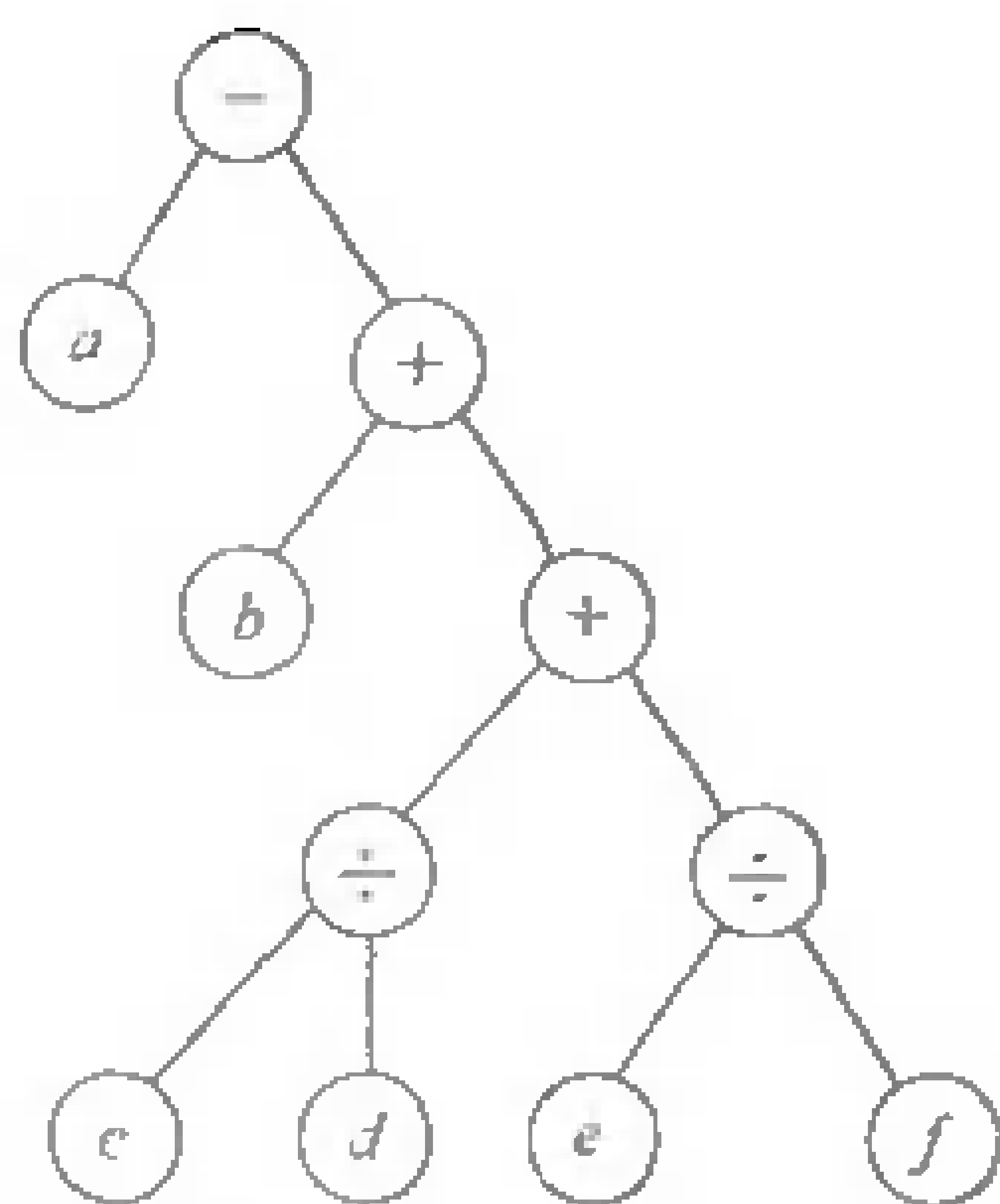


图 3.24

定理 3.4.1 在二元正则树 T 中，它的分支点数 r 和树叶数 t 满足：

$$r = t - 1$$

证明　因为正则二元树 T 的弧数为 $r+t-1$,顶点度数的总和为 $2+3(r-1)+t$。由顶点度数与边数的关系,有

$$2(r+t-1)=2+3(r-1)+t$$

故　　$r=t-1$　　证毕。

类似可证在 m 元正则树中有 $(m-1)r=t-1$。

定理 3.4.2　设 T 是二元正则树,r 为 T 的分支点数,I 为各分支点的层数之和,L 为各树叶的层数之和,则

$$L=I+2r$$

证明　对分支点数 r 进行归纳。

$r=1$ 时,$I=0,L=2,L=I+2r$ 成立。设 $r=k$ 时结论成立,下面证明 $r=k+1$ 时结论也成立。设 T 的高度为 h,存在树叶 v_i,它的层数为 h,因 T 是二元正则树,存在 v_i 的兄弟 v_j,v_j 的层数也为 h。设 v_i 与 v_j 的父亲为 v,删除顶点 v_i,v_j 得树形图 T',则 T' 也是二元正则树,v 为 T' 的树叶,v 的层数为 $h-1$。设 T' 的分支点数为 r',各分支点层数之和为 I',各树叶的层数之和为 L'。易得

$$r'=r-1,\ I'=I-(h-1)$$

$$L'=L-2h+(h-1)=L-h-1$$

由归纳假设,在 T' 中有下面等式成立:

$$L'=I'+2r'$$

即　　$L-h-1=I-(h-1)+2(r-1)$

经过整理有

$$L=I+2r$$　　证毕。

类似可证在 m 元正则树中有 $L=(m-1)I+mr$,留给读者作为习题。

下面我们来讨论树形图的树叶带权的带权树问题。其中最重要的是带权二元树,这概念在编码理论中有重要应用。

定义 3.4.7　设 T 为一棵二元树,共有 t 片树叶 $v_1,v_2,\cdots,v_t$,分别带权 $w_1,w_2,\cdots,w_t$(w_i 为实数),则称 T 为带权二元树。

而称

$$W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$$

为二元树 T 的权，其中 $l(v_i)$ 是叶 v_i 的层数。

在所有的带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的 t 片树叶的二元树中，其中权最小的称为**最优二元树**。

例 3 对于带权 3,5,7,9 的二元树。如图 3.25 所示，其中(b)给出一棵最优树。

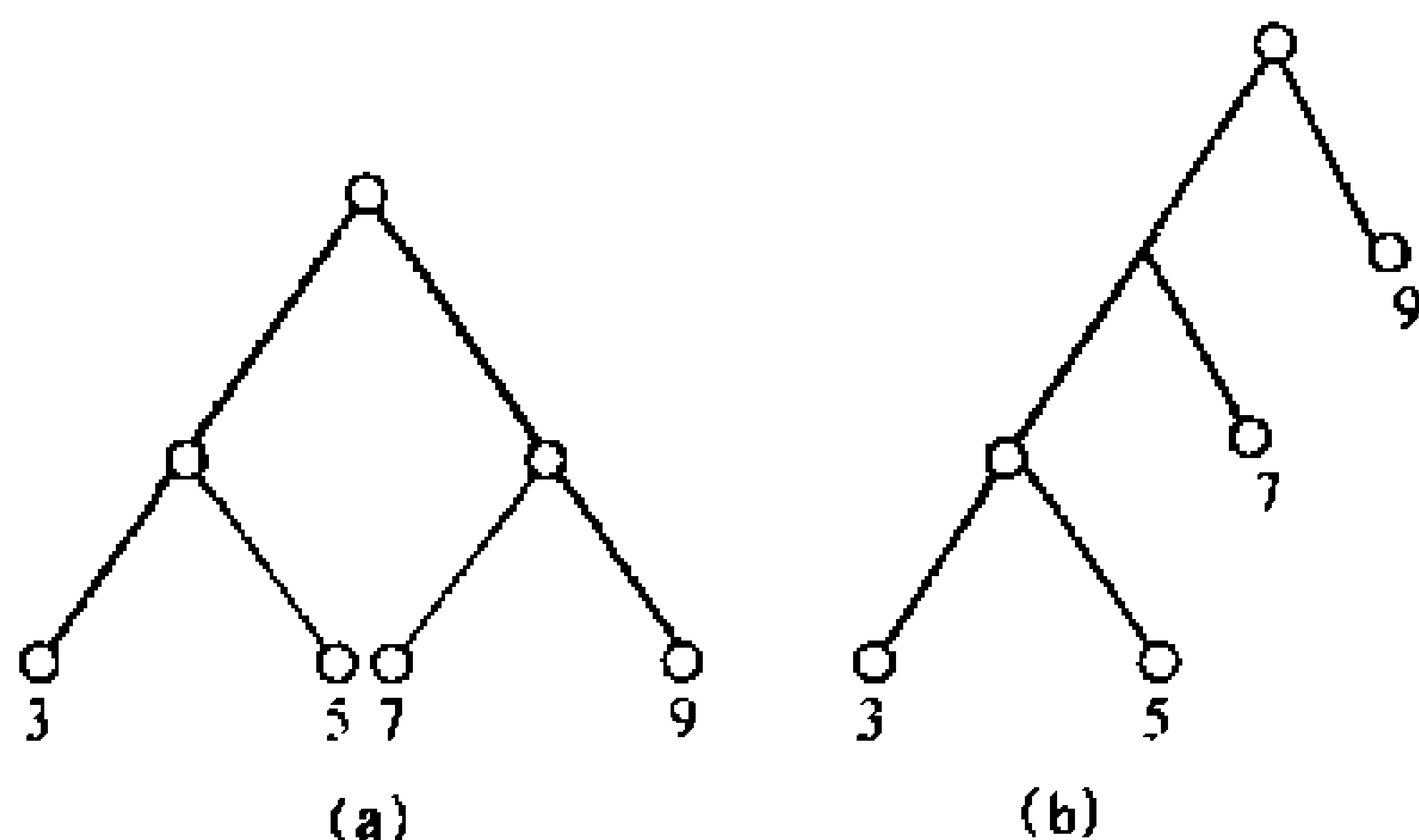


图 3.25

给了 t 个权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$，求 t 片树叶的最优二元树的算法是根据 Huffman 定理给出的，因而，我们先来证明 Huffman 定理。为证明 Huffman 定理，又需要证明下面引理。

引理 3.4.3 存在一棵带权 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$ 的最优二元树 T，使在 T 中，一定能使带权 w_1, w_2 的顶点为兄弟，且它们的层数相同，均为树高。

证明 设 T 是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树，在 T_1 中设 v 是层数最大的分支点之一，它的两个儿子 v_a 和 v_b 都是树叶，分别带权 w_a 和 w_b，而不是 w_1 和 w_2。并且它们的层数分别为 $l_a = l(v_a)$ 和 $l_b = l(v_b)$，$l_a = l_b$。均为 T_1 的高。现在把树叶 v_a 和 v_b 所带权 w_a 和 w_b 分别与 w_1 和 w_2 交换，得到一棵新的带权二元树

T_2。下面证明 T_2 也是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树，且带权 w_1 和 w_2 的树叶是兄弟。因为 w_1, w_2 是最小的两个权。又

$$W(T_1) = w_1 l(v_1) + w_2 l(v_2) + \cdots + w_a l(v_a) + w_b l(v_b) + \cdots$$

$$W(T_2) = w_a l(v_1) + w_b l(v_2) + \cdots + w_1 l(v_a) + w_2 l(v_b) + \cdots$$

于是

$$W(T_1) - W(T_2) = (w_a - w_1)(l(v_a) - l(v_1)) + (w_b - w_2)(l(v_b) - l(v_2)) \geqslant 0$$

所以 $W(T_1) \geqslant W(T_2)$，又因 T_1 是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树，因此 $W(T_2) = W(T_1)$。从而可知 T_2 是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树，且带权 w_1, w_2 的树叶是兄弟，其层数为树高。

证毕。

定理 3.4.4 设有一棵带权 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的最优二元树 T'，其中 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$。在 T' 中，让带权 $w_1 + w_2$ 的树叶产生两个儿子，分别带权 w_1 和 w_2，则得到的是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树 T^*。

证明 由定理中的条件可知：

$$W(T^*) = W(T') + w_1 + w_2 \tag{5}$$

设 T 是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树，由引理 3.4.3 知道，在 T 中，总可以认为带权 w_1、w_2 的树叶 v_a 和 v_b 为兄弟，且它们的层数为树高。设 v_a、v_b 的父亲为 v。在 T 中，删除顶点 v_a 和 v_b，让它们的父亲带权 $w_1 + w_2$，得二元树 $\hat{T}$，显然

$$w(T) = w(\hat{T}) + w_1 + w_2 \tag{6}$$

T^* 和 T 都是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的二元树，而 T 是最优二元树，因而如若 $W(T^*) \neq W(T)$，必有

$$W(T) < W(T^*) \tag{7}$$

由式(5)、(6)、(7)可推知

$$W(T') > W(\hat{T}) \tag{8}$$

但式(8)与 T' 是带权 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的最优二元树矛盾，因而 $w(T^*) = w(T)$，即 T^* 是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树。证毕。

由 Huffman 定理可知，可由一棵带权 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的最优二元树，导出一棵带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树。又可以从 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 中找出两个小的加起来，得 $t-2$ 个权，求一棵带 $t-2$ 个权的最优二元树，可导出带 $t-1$ 个权的最优二元树，进而可导出带 t 个权的最优二元树。依次类推，最后归结为求带二个权的最优二元树，由定理保证得一棵带 t 个权的最优二元树。

给实数 $w_1, w_2, \cdots, w_t$，且 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$。求作一棵带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树的算法如下：

(1) 初始：令 $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_t\}$。

(2) 从 S 中取两个最小的权 w_a 和 w_b，画顶点 v_a，带权 w_a；画顶点 v_b，带权 w_b。画 v_a、v_b 的父亲 v，连接 v_a 和 v，v_b 和 v，令 v 带权 $w_a + w_b$。

(3) 令 $S \leftarrow (S - \{w_a, w_b\}) \cup \{w_a + w_b\}$。

(4) 判 S 是否只含一个元素？若是，则停止，否则转(2)。

由 Huffman 定理可知 T 是一棵带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树。

例 4 构造带权 3,4,7,8,10,12 的最优二元树。构造的过程如图 3.26 所示。这棵最优二元树的权为

$$W(T) = 3 \times 4 + 4 \times 4 + 7 \times 3 + 8 \times 2 + 10 \times 2 + 12 \times 2 = 109$$

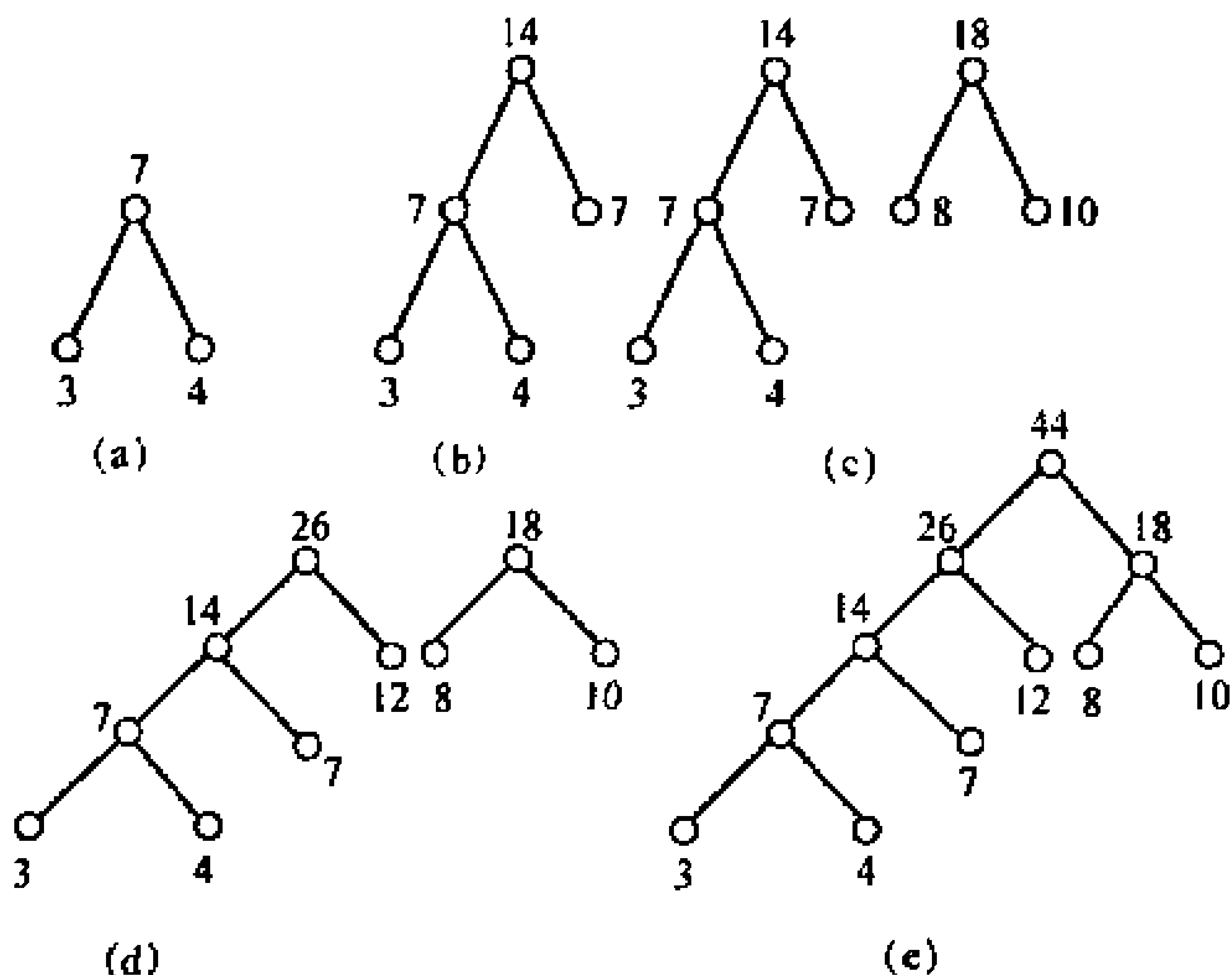


图 3.26

一般来说，带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树不一定是惟一的。

下面我们给出最优二元树在编码中的一个具体应用。

在计算机及通迅事业中，常用二进制编码来表示符号。例如，可用00,01,10,11 分别表示字母 A, B, C, D(称为等长表示法)。如果字母 A, B, C, D 出现的频率是相同的，传送 100 个字母需用 200 个二进制位。但实际上字母出现的频率是不同的，如 A 出现的频率为50%，B 为25%，C 为20%，D 为5%。在这种情况下能否用非等长的二进制序列表示字母 A, B, C, D，使传递的信息的二进制位尽可能地少？实际上，若用000 表示 D，001 表示 C，01 表示 B，1 表示 A，这样，同样传送 100 个字母所用的二进制位为

$$3 \times 5 + 3 \times 20 + 2 \times 25 + 1 \times 50 = 175$$

这种表示法比等长的二进制数表示法节省二进制位。但如果

我们用 1 表示 A,00 表示 B,000 表示 C,001 表示 D 时,当接收到的信息是 001000 时,就无法辨别它是 DC 还是 BAC。因此不能用这种二进制序列表示 A,B,C,D。这就需引进前缀码概念。

定义 3.4.8 设 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ 为长度是 n 的符号串,称其子串 $a_1,a_1a_2,\cdots,a_1a_2\cdots a_{n-1}$ 分别是 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ 的长度为 $1,2,\cdots,n-1$ 的前缀。

如 1,10,101,1011,10110 是 101101 的前缀。

定义 3.4.9 设 $A=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 为一个符号串集合,若对于任意的 β_i、$\beta_j \in A$, $i \neq j$, β_i、β_j 互不为前缀,则称 A 为**前缀码**。若符号串 $\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是由 0 与 1 组成的,则称 A 为**二元前缀码**。

如{1,01,001,000}是一个二元前缀码,而{1,01,111,0111}不是前缀码,因为 1 是 111 的前缀,01 是 0111 的前缀。

下面介绍用二元树来构造二元前缀码。

给定一棵二元树 T,设有 t 片树叶。对 T 的每一个分支点 v, v 至多有两个儿子。若 v 有两个儿子,在由 v 引出的两条弧上,左边标上 0,右边标上 1。若 v 只有 1 个儿子,在由 v 引出的弧可标上 0 也可以标上 1。设 v_i 是 T 的任意一片树叶,从根到 v_i 的有向路上各边的标号组成的字符串放在 v_i 处。由 t 片树叶的 t 个字符串组成的集合为一个二元前缀码。

一般情况下由二元树 T 产生的二元前缀码不一定惟一。但当 T 为二元正则树时,由 T 所产生的前缀码是惟一的。

由图 3.27(a) 的二元树 T 产生的二元前缀码为

$$A=\{10,000,010,011,111\}$$

由图 3.27(b) 所示的二元树产生的二元的前缀码为

$$B=\{10,001,010,011,110\}$$

当我们知道了要传送的符号的频率时,如何选择二元前缀码,使传送的二进制位最少(这种前缀码称**最优前缀码**)?这可利用最

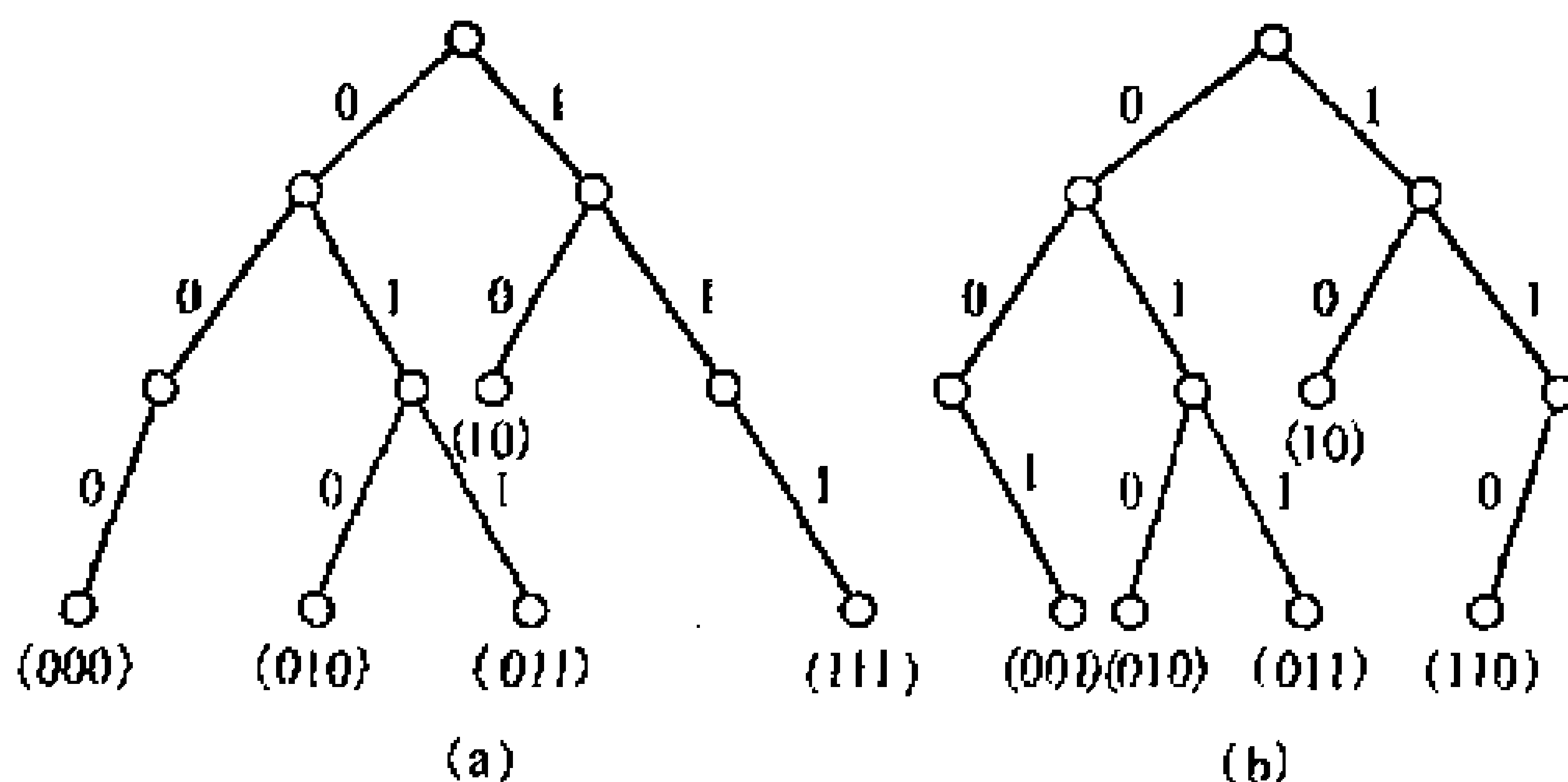


图 3.27

优二元树来产生最优前缀码。先用各符号出现的频率(或 100 乘各频率)当权,用 Huffman 算法求最优二元树 T,由 T 产生的二元前缀码,能使传送的二进制位最少,即为最优前缀码。下面通过例题说明最优前缀码的产生过程。

例 5 在通讯中,已知字母 A,B,C,D,E,F 出现的频率如下:

A—30% B—25% C—20%

D—10% E—10% F—5%

求传送它们的最优前缀码。

解 用100乘各频率,并由小到大排序,得 $w_1=5,w_2=10,w_3=10,w_4=20,w_5=25,w_6=30$ 为8个权(记住它们与数字的对应关系)。用 Huffman 算法求得带权为 5,10,10,20,25,30 的最优二元树 T,如图 3.28 所示。

在 T 上求一个二元前缀码

$$A=\{01,10,11,001,0000,0001\}$$

传送这六个字母的最优二元前缀码为:

11 表示 A,10 表示 B,01 表示 C,001 表示 D,0001 表示 E,0000 表示 F。

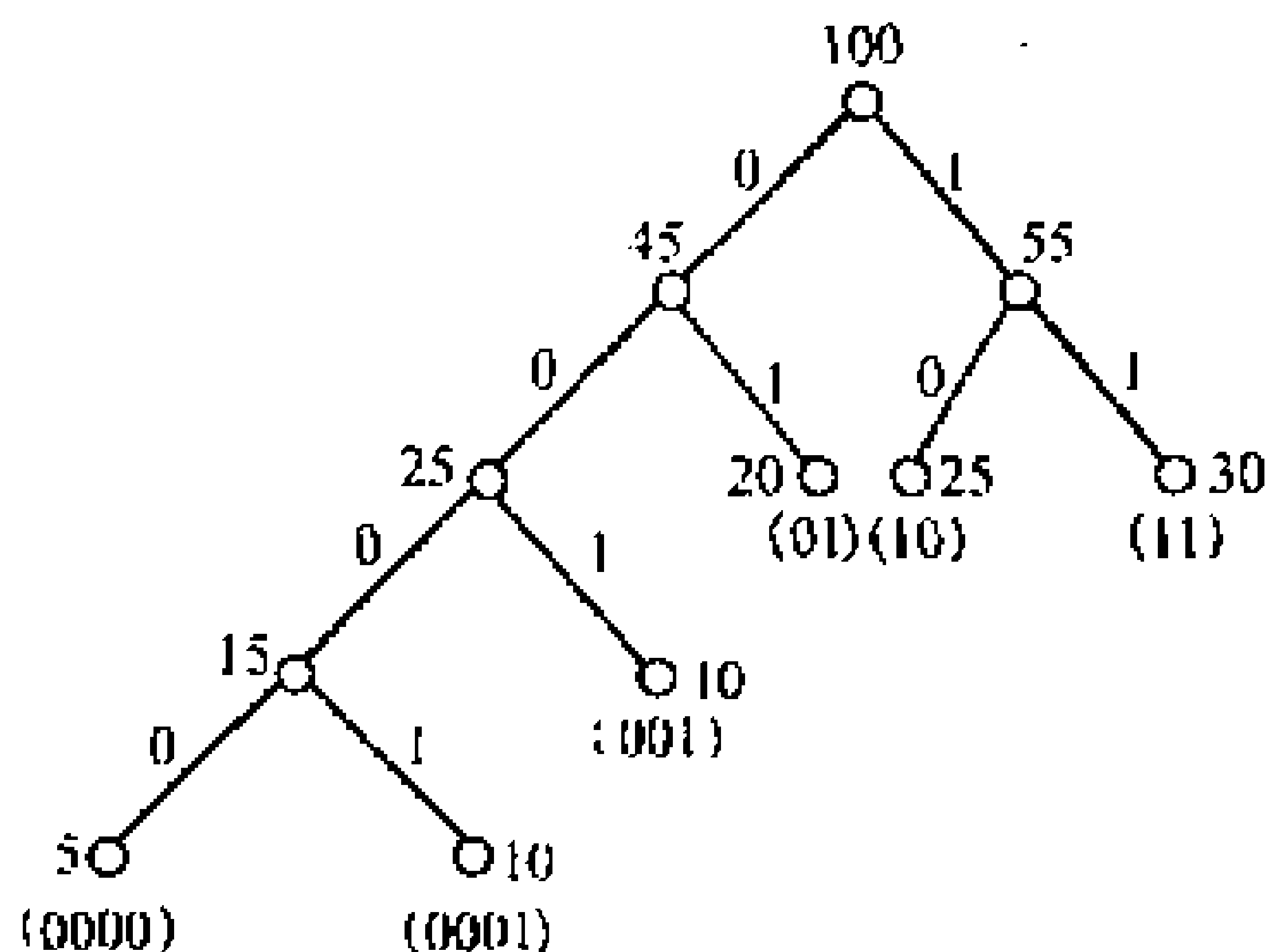


图 3.28

除了等长的码子可互换(如 A,B,C 的码子;E,F 的码子)外,其余的码子不可互换。

用以上方法构造的 A,B,C,D,E,F 的最优前缀码传送1000个这样的字母所用二进制位为

$$[4\times(5+10)+3\times10+2\times(20+25+30)+30]\times\frac{1}{100}\div100=2\,400$$

而如用等长码子传送由1 000个 A,B,C,D,E,F 组成字母,需用二进制位为3 000。

习　题　三

3.1　证明：简单图 G 是树当且仅当 G 中存在一个顶点 u，u 到 G 中其余每个顶点有且只有一条路。

3.2　设图 G 有 k 个连通分支，$q(G) > p(G) - k$。证明 G 含有回路。

3.3　证明：正整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 是某棵树的度序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{p} d_i = 2(p-1)$。

(提示：由推论 1.3.3，存在一个图 G，它的度序列为 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$，并且 $q(G) = p - 1$。考虑以 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 为度序列，连通分支数目最少的一个图 G。如果 G 不连通，其中一定有回路，设 $e = uv$ 是 G 中的一个回路上的一条边，又 $e_1 = u_1v_1$ 是与 e 不在同一个连通分支内的一条边，作 $G_1 = G - \{uv, u_1v_1\} + \{uu_1, vv_1\}$，$G_1$ 与 G 有相同的度序列，但 G_1 的连通分支数比 G_1 少 1，矛盾。)

3.4　设 T 是一棵树，它有 n_i 个度为 i 的顶点 $(i = 3, 4, \cdots, \Delta(T))$，求 T 中悬挂点个数。

3.5　设 T_1、T_2 是连通图 G 的两棵生成树，e 是在 T_1 中而不在 T_2 中的一条边，证明存在一条在 T_2 但不在 T_1 中的边 e'，使 $(T_1 - e) + e'$ 和 $(T_2 - e') + e$ 都是 G 的生成树。

3.6　在乒乓球单打比赛中采用淘汰制。即一名选手如果在一场比赛中失败就被淘汰。现在 n 名选手参加比赛，决出冠军，共需进行多少场比赛？

3.7　如果 T 是树且 $\Delta(T) \geq k$，证明 T 中至少有 k 个悬挂点。

3.8　设 T 是阶为 $k+1$ 的树，G 是满足 $\delta(G) \geq k$ 的任一简单图。证明 G 中一定存在一个与 T 同构的子图。

3.9　如果 p 阶图 G 的每个顶点的度数均不超过 Δ，那么图 G 的半径

$$R(G) \geqslant \frac{\ln(p\Delta - p + 1)}{\ln\Delta} - 1$$

3.10　不利用定理3.1.5的结果证明：树要么只有一个中心，要么恰好有两个彼此相邻的中心。

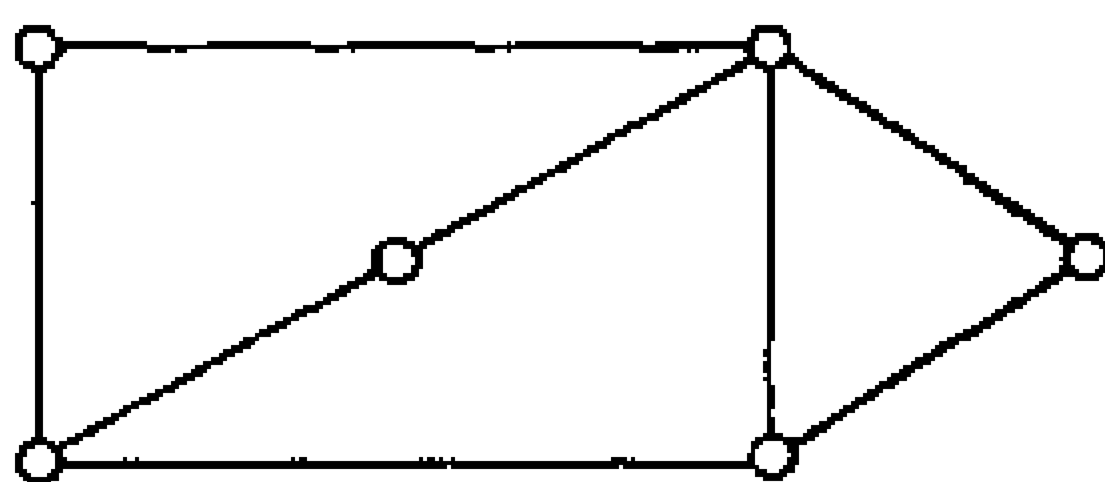
（提示：让 T 是阶 $p \geqslant 3$ 的树，T_1 是去掉 T 中的悬挂点之后所得到的树，可证明 T 与 T_1 有相同的中心。）

3.11　e 是连通简单图 G 的一条边。证明 e 在 G 的每个生成树中当且仅当 e 是 G 的割边。

3.12　设 G 是至少有三个顶点的连通图，证明 G 中存在两个顶点 u 和 v，使 $G - \{u, v\}$ 仍是连通图。

3.13　设 G 是连通的简单图，证明 G 中存在 $\Delta(G)$ 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{\Delta(G)}$，使 $G - \{v_1, v_2, \cdots, v_{\Delta(G)}\}$ 仍是连通图。

3.14　求图 G 的生成树个数。



习题 3.14

3.15　设 e 是 K_p 中的一条边，证明 $\tau(K_p - e) = (p - 2)p^{p-3}$.

（提示：K_p 中共有 p^{p-2} 个生成树，每个树有 $p - 1$ 条边，共用了 $(p - 1)p^{p-2}$ 次，再利用其对称性）

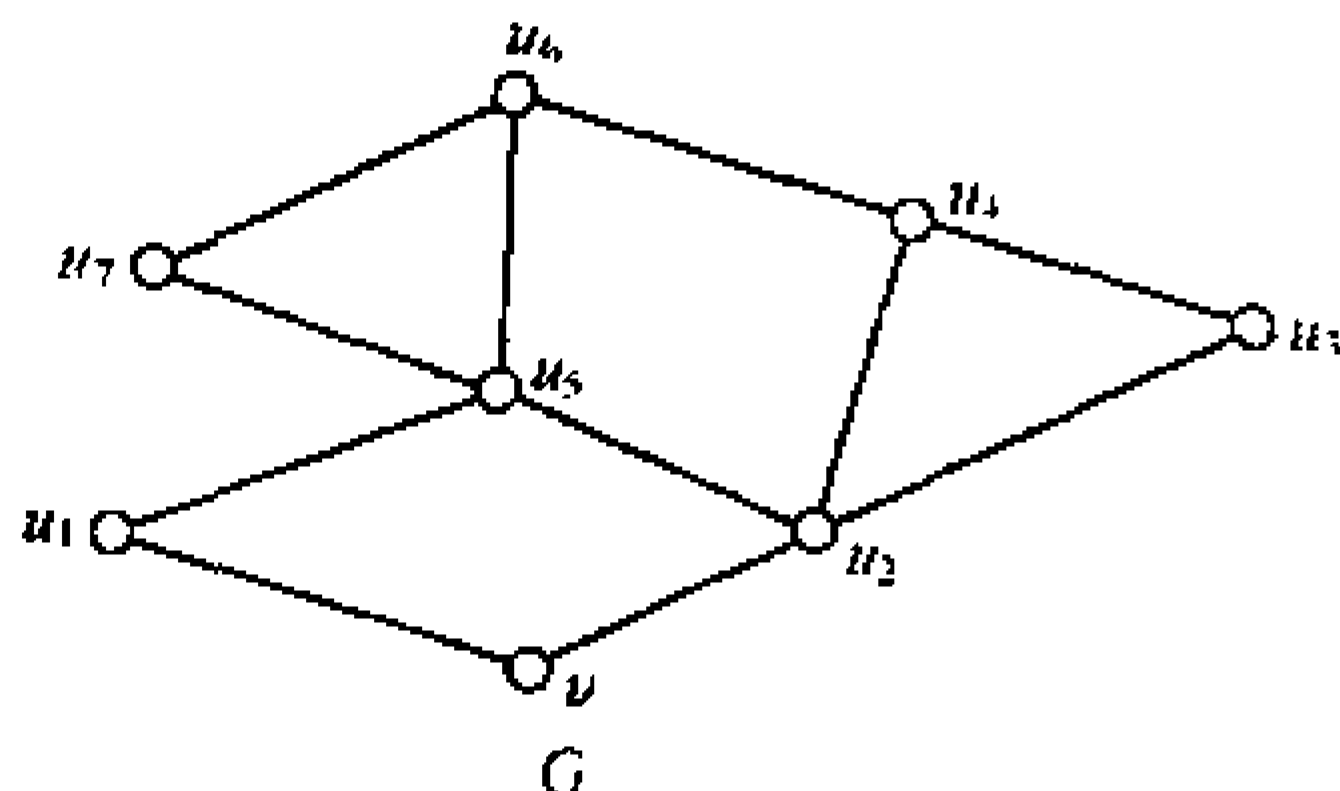
3.16　考察世界上六大城市：伦敦(L)、墨西哥城(MC)、纽约(NY)、巴黎(Pa)、北京(Pe)和东京(T)之间的航线距离(以百英里计算)表

	L	MC	NY	Pa	Pe	T
L	—	56	35	21	51	60
MC	56	—	21	57	78	70
NY	35	21	—	36	68	68
Pa	21	57	36	—	51	61
Pe	51	78	68	51	—	13
T	60	70	68	61	13	—

此表可确定一个顶点为 L, MC, NY, Pa, Pe, T 的赋权完全图。求 G 的一个最优生成树。

3.17 坐标纸上的 11 条水平线与 11 条竖直线构成一个图，以它们的交点（格点）为顶点。问应当去掉多少条边才能使每个点的度数 < 4? 至多可以去掉多少条边还能使图保持连通?

3.18 求下面这个图 G 关于 v 的保距生成树。



习题 3.18

3.19 Kruskal 算法能否用来：

(1) 在赋权连通图中求最大权的生成树?

(2) 在非连通图中求最小权的生成森林?

如果能，怎样求?写出算法来。

注：非连通图 G 的极大无圈生成子图称为 G 的生成森林。

3.20　证明二元正则树有奇数个顶点。

3.21　设 T 是 m 元正则树，r 为 T 的分支点数，I 为各分支点的层数之和，L 为各树叶的层数之和，t 是树叶数。则

$$L = (m-1)I + mr$$

$$(m-1)r = t-1$$

3.22　设 T 是二元正则树，试证明 T 中边数为 $2t-2$，这里 t 为树叶数。

3.23　试画一棵带权 1,3,8,9,12,15,16 的最优二元树，并计算它的权。

3.24　设七个符号在通讯中出现的频率如下：

a:35%　b:20%　c:15%　d:10%

e:10%　f:5%　g:5%

编一个最优前缀码，画出相应的最优二元树。问传送 1 000 个符号，需要多少个二进制位？

4 Euler 环游和 Hamilton 回路

中国邮递员和旅行售货员这两个问题是网络或图中的两种环游问题，一是对所有边的环游，另一个是对所有点的环游。而问题所要寻找的环游要求总权和最小，这样的环游就是最优环游。本章主要讨论这两个问题。

4.1 Euler 环游

在本书的开头我们曾提到七桥问题，其答案就是对应的图的图是否存在经过每条边一次且仅一次的闭迹，也即环游所有边一次且仅一次的闭迹。数学家欧拉(Euler) 解决了这个问题，由此开创了图论的研究。在这一节我们将要讨论欧拉是如何解决这个问题的。

定义 4.1.1 经过 G 的每条边的迹称为 G 的 **Euler 迹**，如果这条迹是闭的，则称这条闭迹为 G 的 **Euler 环游**。

例如，图4.1的图 G 中，$v_1e_1v_2e_2v_3e_6v_1e_5v_4e_3v_3e_4v_4$ 是 G 的一条 Euler 迹。$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_3e_5v_1$ 是图 H(图 4.1) 的一条 Euler 环游。

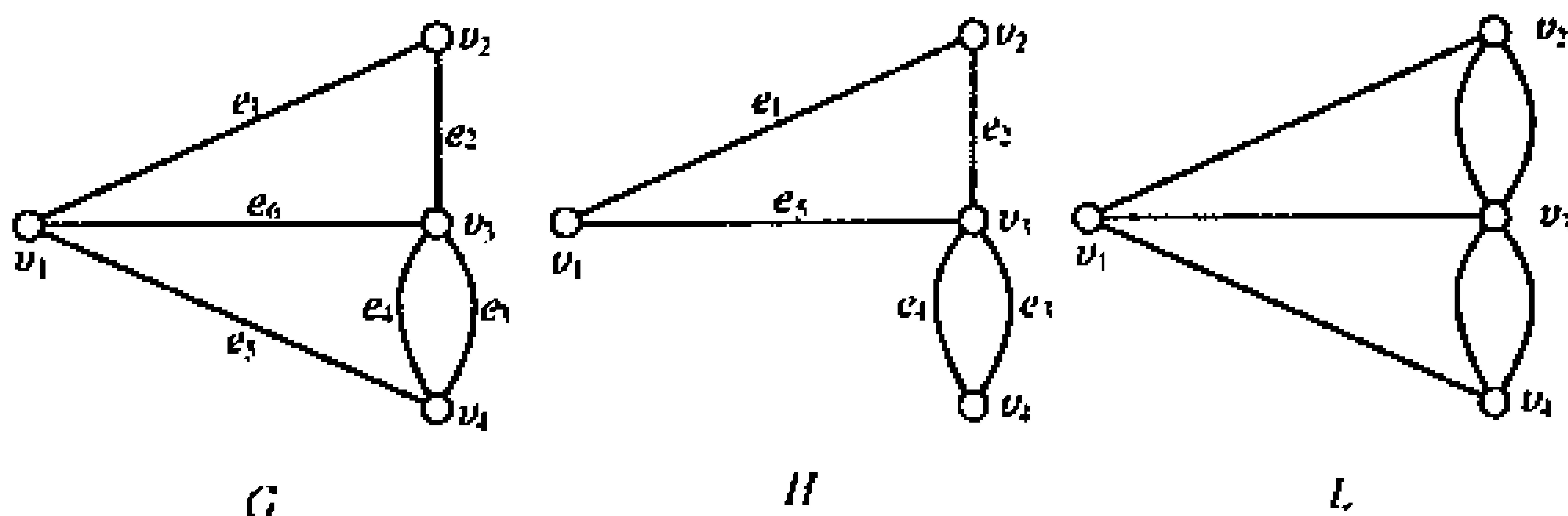


图 4.1

在一般情况下，我们把不是 Euler 环游的 Euler 迹称为 G 的 **Euler 通路**，而把含有 Euler 环游的图称为 **Euler 图**。如图 4.1 中的 G 不是 Euler 图，H 是 Euler 图，而 L 既不存在 Euler 迹，也不存在 Euler 环游。研究 Euler 通路或 Euler 环游的问题称为 Euler 问题。

在平常所碰到的判别一个图形是否能一笔画成(即把一个图形不重复地一笔画成)，就相当于判别把这个图形中各线段的交叉点和端点作为顶点，线段本身作为边的图是否有 Euler 环游或 Euler 通路。例如，要判别图形 K(见图 4.2 所示)是否能一笔画成，就只要判别这图形所对应的图 $G(K)$ 是否存在 Euler 环游或 Euler 通路。显然，若对应的图存在 Euler 迹、那么原图形存在不封闭的一笔画法。若对应的图存在 Euler 环游，则原图形存在封闭的一笔画法。

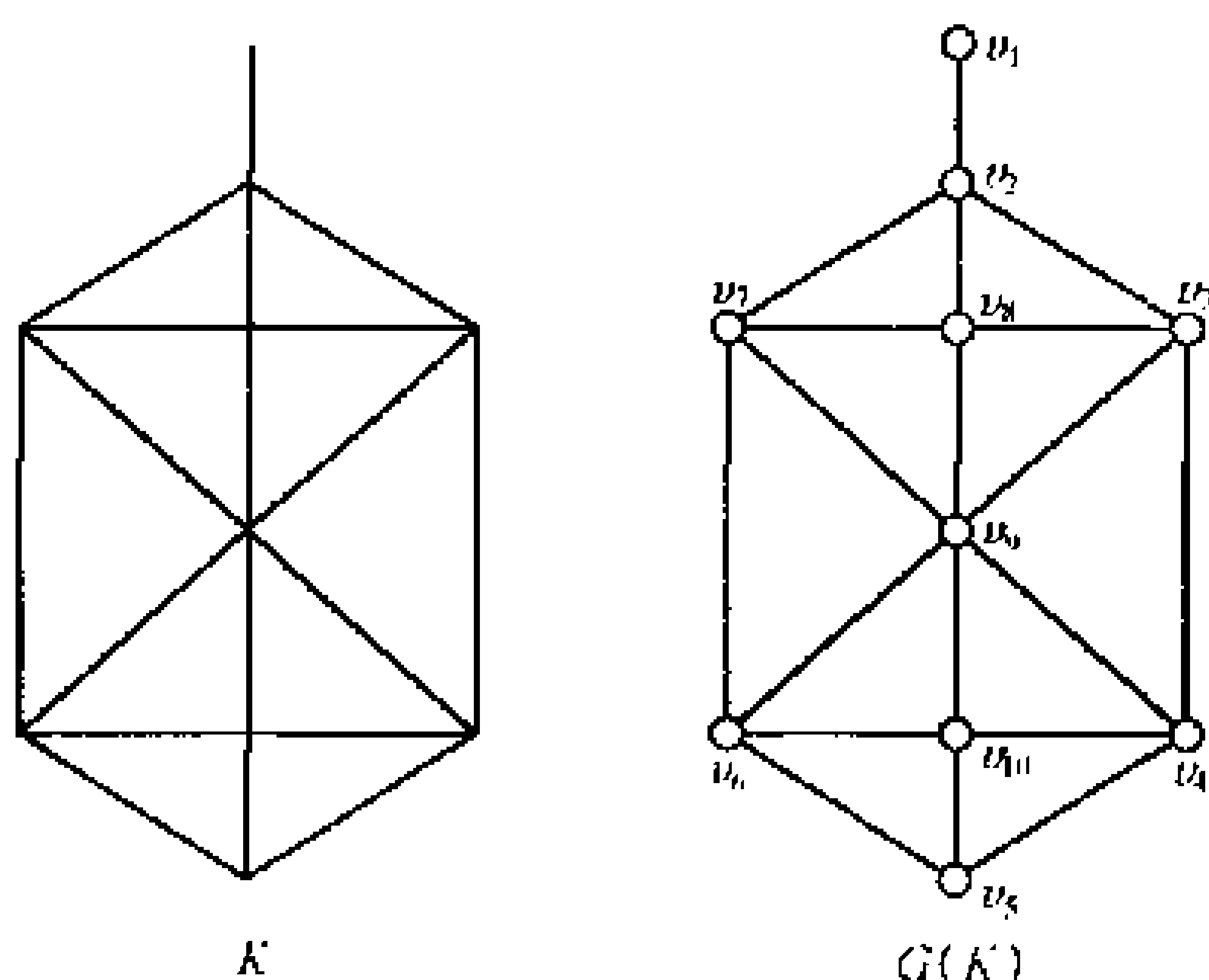


图 4.2

从图 4.1 的三个图 G，H 和 L 可以知道，并不是每个连通图都存在 Euler 迹或 Euler 环游的。

下面我们来讨论它们存在的两个充要条件。利用充要条件就

可以解决哥尼斯堡七桥问题及一笔画成问题。

定理 4.1.1 一个非平凡连通图 G 是 Euler 图当且仅当图 G 没有奇点。

证明 假设 G 是 Euler 图,C 是 G 的一条 Euler 环游,u 为 C 的起点(也是终点)。当沿 C 前进时,每通过一个顶点必是一进一出,而每一条边在 C 中恰好出现一次,所以对 G 中所有不同于 u 的顶点的度来说必是偶数。而对于 u,由于 C 起始于 u 且终止于 u,所以 u 的度也是偶数,因此 G 无奇点。

反之,设 G 是连通且无奇点的图。我们对图的边数进行归纳来证明 G 有 Euler 环游。

当 $q(G)=1$ 时,G 只能是一个顶点其边为环的图,G 显然是 Euler 图。归纳假设在边数 $q(G)<m$ 时定理成立。现在证明 $q(G)=m$ 时定理的充分性也成立。

由于 G 连通且无奇点,故 G 中每个顶点的度至少是 2。由定理 2.1.1 知 G 中存在回路 C。现将 G 中属于 C 的边全删去,再除去孤立顶点得图 G'。显然 G' 中每个顶点的度仍为偶数,设 G' 的连通分支为 $G'_1,G'_2,\cdots,G'_k$,则每个连通分支是无奇点的连通图,由归纳假设 G'_i 是 Euler 图,令 C'_i 是 G'_i 的 Euler 环游($i=1,2,\cdots,k$)。

再回到原来这个图 G,由于 G 连通,所以每个 C'_i 与 C 至少有一个公共顶点,设其中之一为 v_i($i=1,2,\cdots,k$)。现在我们可以利用这些闭迹 C'_1、$C'_2,\cdots,C'_k$ 及这些顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 来构造 G 的一条 Euler 环游。

由 C 中的某个点 v_0 出发沿 C 前进,每行至一个顶点 v_i 就先走完 C'_i 再回到 v_i,继续沿 C 前进,这样可以走遍每条边一次且仅一次回到出发点 v_0,这样的行走轨迹就是 G 的一条 Euler 环游。 证毕。

由此定理很容易判断一个图是否是 Euler 图。例如,图 4.1 的 G 和 L 存在奇点,所以不是 Euler 图,H 无奇点,所以 H 是 Euler 图。上面定理的证明其实也给出了在一个 Euler 图中具体求 Euler

环游的一个方法。下面我们具体给出一种求 Euler 图的 Euler 环游的 Fleury 算法。

Fleury 算法:

(1) 任意选取一个顶点 v_0,置 $W_0 = v_0$;

(2) 假定迹 $W_i = v_0 e_1 v_1 \cdots e_i v_i$ 已经选出,那么用下列方法从 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1}:

1° e_{i+1} 与 v_i 关联;

2° 除非没有别的边可选择,e_{i+1} 不是 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 的割边。

(3) 当(2)不能执行时,停止。否则让 $i + 1 \to i$,转(2)。

根据算法的要求,Fleury 算法作出的是 G 的一条迹。

定理 4.1.2 若 G 是 Euler 图,则 G 的任何用 Fleury 算法构成的迹都是 Euler 环游。

证明 设 G 是 Euler 图,$W_n = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_n v_n$ 是 G 的用 Fleury 算法构成的一条迹,现在证明 W_n 就是 G 的一条 Euler 环游。

先证明 W_n 是闭的。在 $G_n = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 中,必有 $d_{G_n}(v_n) = 0$,否则存在 $e_{n+1} \in E(G_n)$ 与 v_n 关联,因而算法到第 n 步时还可继续进行,矛盾。如果 $v_0 \neq v_n$,则在 W_n 中与 v_n 关联的边数为奇数,即 $d_{W_n}(v_n) \equiv 1 \pmod 2$,但 $d_{G_n}(v_n) = 0$,故

$$d_G(v_n) = d_{G_n}(v_n) + d_{W_n}(v_n) = d_{W_n}(v_n) \equiv 1 \pmod 2$$

这与 G 是 Euler 图矛盾,所以 $v_0 = v_n$,因此 W_n 是 G 的一条闭迹。

下面证 W_n 是 G 的 Euler 环游,即证明 $E(G) = E(W_n)$

反之,如果 W_n 不是 G 的 Euler 环游,则 $G_n = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 含有非平凡连通分支。因为 G 是 Euler 图,而 W_n 是闭迹,G_n 中没有奇点,设 G'_n 为 G_n 的一个非平凡连通分支,则由定理 4.1.1 知 G'_n 是 Euler 图,设 C'_n 就是 G'_n 的一条 Euler 环游。

由于 G 连通,可推得 W_n 与 C'_n 有公共顶点(否则 C'_n 就是 G

的一个连通分支，与 G 连通矛盾)，设 v_m 是沿着 W_n 而又在 C'_n 中下标最大的一个点(因为 v_n 不在 $C'n$ 中，故这种顶点必存在，并且 $v_n \neq v_m$)。明显地 e_{m+1} 就是 G_m 的一条割边(见图 4.3 所示)。

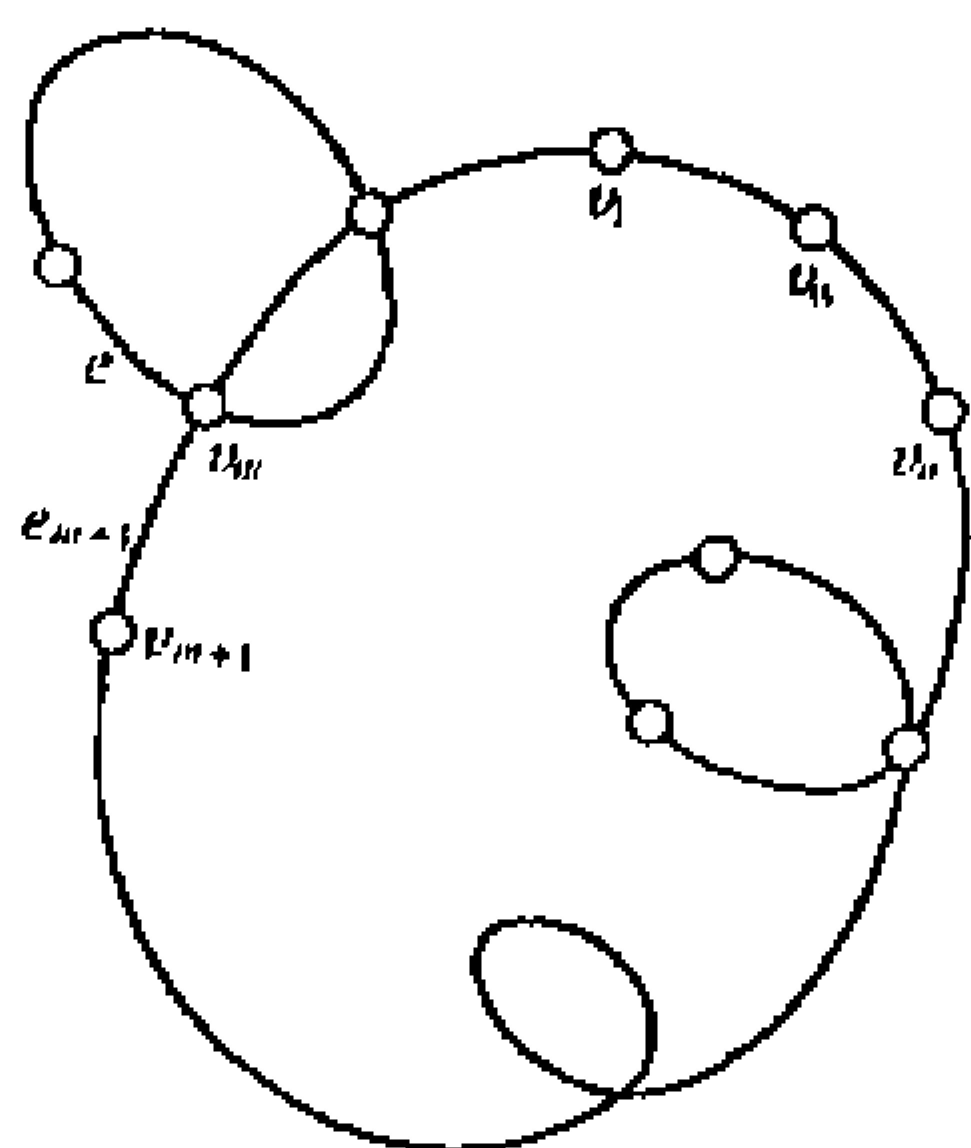


图 4.3

设 e 是 C'_n 中与 v_m 关联的一条边，由于 G'_n 是 Euler 图，因而 G'_n 没有割边，所以 e 不是 G'_n 的割边，因而也不是 G_n 的割边。另一方面，由于 $m < n$，G_n 是 G_m 的生成子图，所以 e 也不可能是 G_m 的割边。

由于 Fleury 算法构造 W_m 的过程是：尽可能不取割边，但在构作 W_{m+1} 时没有取非割边 e(与 v_m 关联)而取了割边 e_{m+1}(也与 v_m 关联)。矛盾！故 $E(G_n) = \emptyset$，即 W_n 是包含 G 的所有边的闭迹，即 W_n 就是 G 的 Euler 环游。 证毕。

定理 4.1.3 一个连通图 G 有 Euler 通路的充分必要条件是 G 中恰好有两个奇点。

证明 设 G 有 Euler 通路 W，以 u 为起点，v 为终点。与定理 4.1.1 的必要性一样可证 G 中除 u、v 之外，其余顶点的度为偶数，而 u 与 v 的度为奇数。

充分性 设 u 与 v 是 G 中仅有的两个奇点。在 G 中增加一条新边 e 连接 u 与 v，所得图记为 $G'(= G + e)$，则 G' 无奇点。由于 G 连通，故 G' 也连通。由定理 4.1.1，G' 中存在一条 Euler 环游，记为

$$C = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 \cdots e_{q+1} u_0$$

这里 $u_0 = u, u_1 = v, e_1 = e$。则迹

$$W = u_1 e_2 u_2 \cdots e_{q+1} u_0$$

就是 G 的一条 Euler 通路。 证毕。

图 4.1 中的 G 恰有两个奇点 v_1 和 v_4，所以根据定理 4.1.3，G 存在 Euler 通路。

定理 4.1.3 的证明同时也给出了求 Euler 通路的方法。假设 G 是恰有两个奇点 u_0, v_0 的连通图，则 $G + u_0v_0$ 为 Euler 图，再由 Fleury 算法求得一条 Euler 环游，然后将此环游上的边 u_0v_0 去掉即得 G 的一条开始于一个奇点而结束于另一个奇点的 Euler 迹。

定理 4.1.1 和定理 4.1.3 给出了判别一个图形 K 能否一笔画成的充要条件，对于一笔画问题即只要检查这个图形所对应的图 $G(K)$ 中奇点个数是否不超过 2，而由 Fleury 算法给出了一笔画成的具体方法。例如，图 4.2 中 $G(K)$ 恰好有两个奇点 v_1 与 v_5，故存在一条从 v_1 与 v_5 的 Euler 通路，因此图形 K 能一笔画成（起笔从 v_1（或 v_5）开始，最后落笔在 v_5（或 v_1）处）。

比一笔画问题更一般的问题是 K 笔不重复画问题，下面我们来讨论这个问题。

定理 4.1.4 若连通图 G 恰好有 $2k(k > 0)$ 个奇点，则在 G 中存在 k 条边不交的迹 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$，使得

$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \cdots\cdots \cup E(Q_k)$$

证明 设 G 的 $2k$ 个奇点为 $x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_k$，在 G 中增加 k 条分别连接 x_i 与 y_i 的新边 e_i，$i = 1, 2, \cdots, k$，所得图记为 G'，则 G' 是一个 Euler 图。记 G' 的一条 Euler 环游为 C'，然后在 C' 中删去新加的 k 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$，就将 C' 分成 k 段，这 k 段即为 G 的 k 条边不交的迹。 证毕。

利用这个定理我们可以给出一个图形能 k 笔不重复画成的判别。

推论 4.1.5 设图形 K 所对应的图 $G(K)$ 是连通的，并且恰有 $2k$ 个奇点。那么图形 K 可以用 k 笔不重复画成，并且至少要用 k 笔画成。

证明 设图形 K 可以 h 笔不重复画成，那么 $G(K)$ 有 h 条边

不交的迹包含 $G(K)$ 的所有边。因对每一条迹来说，只有 2 个奇点，所以

$$2h \geqslant 2k$$

即 $h \geqslant k$，所以图形 K 至少要 k 笔不重复画成。

而由定理 4.1.4 知，$E(G(K))$ 可划分为 k 条边不交的迹，而每一条迹所对应的图形能一笔画出，故图形 K 能用 k 笔不重复画成。 证毕。

例如，图 4.4 所示的图形 K 所对应的图 $G(K)$ 恰有 4 个奇点，故图形 K 能用 2 笔不重复画成。

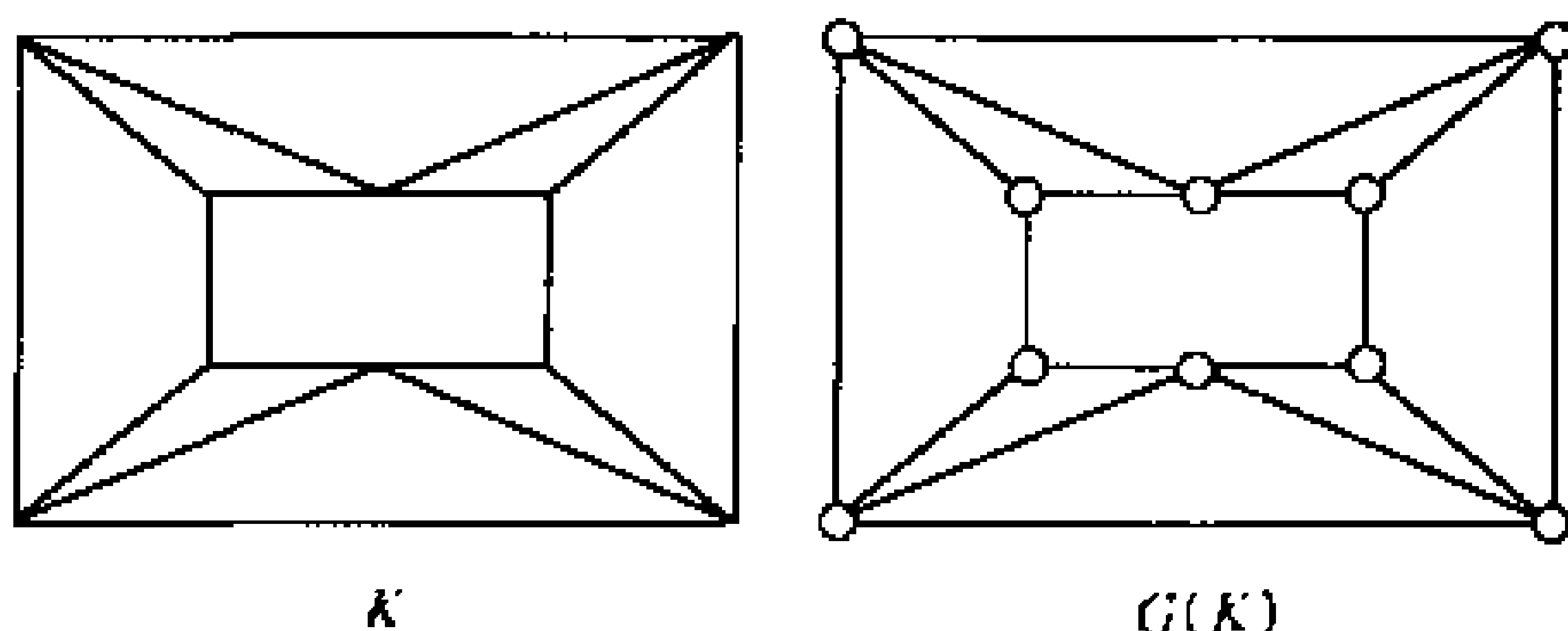


图 4.4

下面考虑两个国外数学竞赛中的题目。

例 1 给定一个由 16 条线段构成的图形（见图 4.5）。证明：不能引一条折线与每一线段恰好相交一次。（折线可以是不封闭的和自由相交的，但它的顶点不在给定的线段上，而边也不通过线段的公共端点，即不允许折线从图 4.5 的缺口处穿过。）

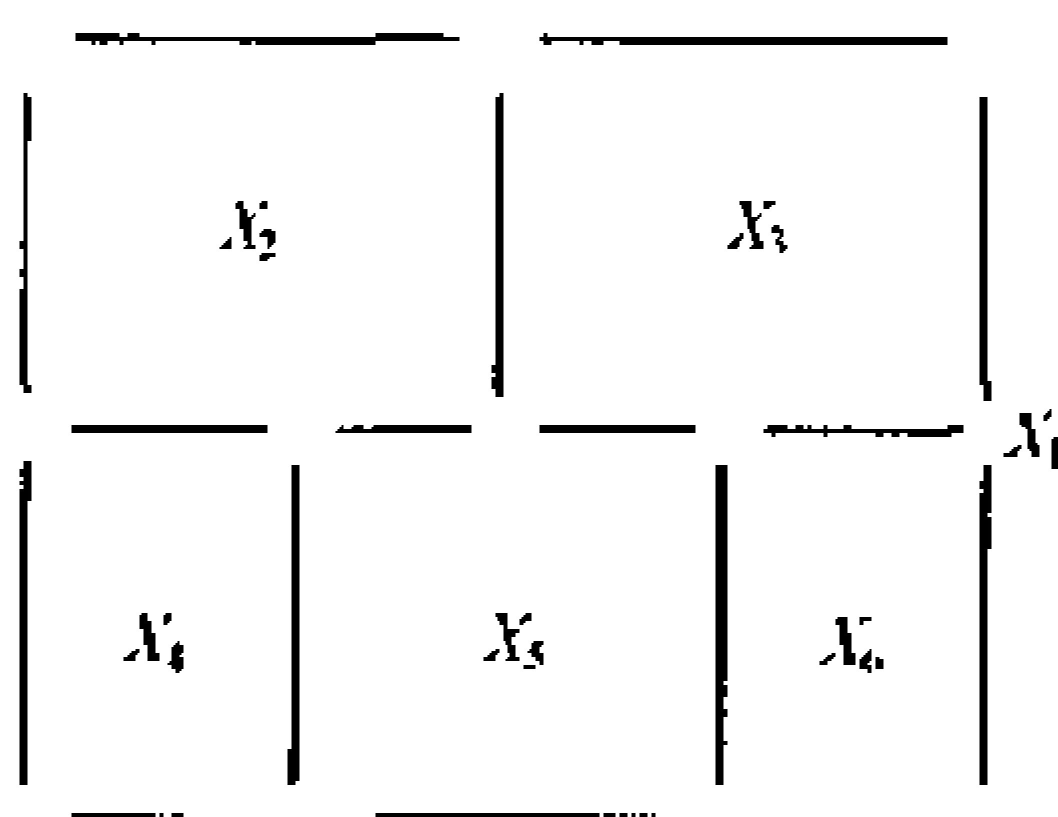


图 4.5

证明 我们先来建立一个图 G。图 G 中的顶点 x_i 代表这个图形的区域 $X_i(i = 1,2,3,4,5,6)$。顶点

x_i 与 x_j 之间连接的边数等于区域 X_i 与 X_j 公共线段的数目(如图 4.6 所示)。这样建立的图 G 中的每一条边对应这个图形的一条线段。存在满足条件的折线当且仅当 G 中存在一条 Euler 环游或 Euler 通路。由于 G 中有四个奇点,故 G 不存在 Euler 环游及 Euler 通路,也即证明了在图形中不能引一条满足要求的折线。

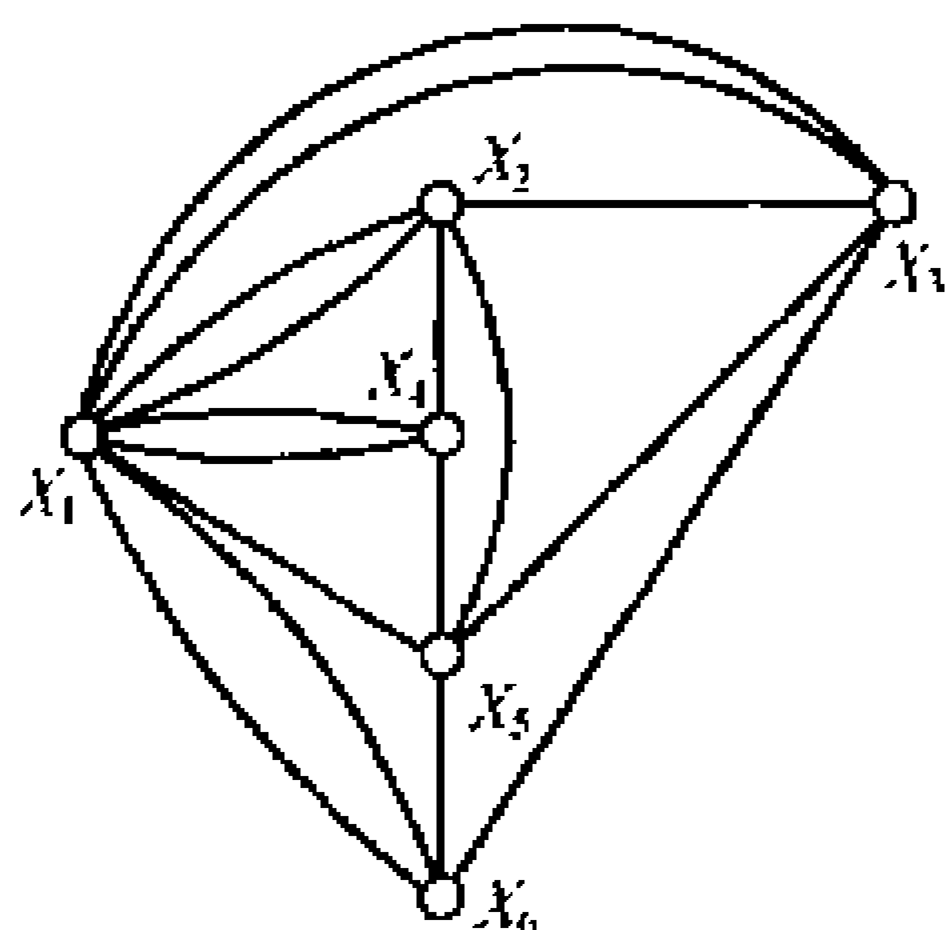


图 4.6

例 2 某编辑部收到由 n 个人所寄的一些问题的解,他们发现每个人寄来 4 个不同问题的解,每个问题的解恰好由二个人同时给出。问他们共收到几个不同问题的解,并证明编辑部可以分二次发表这些问题的解,使每人每次恰好被提到两次。

解 首先建立图 $G=(V,E)$,G 的 n 个顶点代表 n 个人。两个不同的顶点 v_i 和 v_j 之间连接的边数等于这两个点所对应的两个人同时给出相同问题解的个数。根据给定的条件,G 的每一条边对应一个问题的解,每个顶点的度为 4。因而编辑部一共收到 $q(G)=2n$ 个不同问题的解。

为解决第二个问题,我们不妨假设 G 是连通图,则由定理 4.1.1 知 G 是 Euler 图,设

$$C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 \cdots\cdots e_{2n} v$$

是 G 的一条 Euler 环游,则不同于 v_0 的每个顶点在 C 内部各出现二次,而 v_0 在 C 内部出现一次。现在我们沿着 C 交错地给边染上红、蓝两色,则除 v_0 外,其他每个顶点有两条红边和两条蓝边与之关联。而对于 v_0,由于 $q(G)$ 为偶数,故也有两条红边和两条蓝边与 v_0 关联。则我们只要将红边所对应的 n 个问题的解安排在第一次发表,蓝边所对应的 n 个问题的解安排在第二次发表,就能使每

人每次恰好被提到两次。

4.2 中国邮路问题

邮递员的工作是每天在邮局里选出邮件，然后送到他所管辖的邮区的客户手中，再返回邮局。自然地，若他要完成当天的投递任务，则他必须要走过他所投递邮件的每一条街道至少一次。问采取怎样的走法使他的投递总行程为最短？这个问题就称为中国邮路问题，因为它是首先由中国数学家管梅谷教授领导的运筹小组于 1960 年研究而获得成果的。

为解决这个问题，首先根据问题的要求建立一个非负赋权图 G，G 的顶点是街与街之间的交叉路口和终端，两个顶点相邻当且仅当这两点所对应的路口有直通街道而中间不通过其他路口，每条边的权是这条边所对应街道的长度。G 的通过每条边至少一次的闭途径称为 G 的环游。G 的一条环游

$$C = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots\cdots e_kv_0$$

的权 $w(C)$ 定义为 $\sum_{i=1}^{k}w(e_i)$。$w(C)$ 包含两部分权和，一部分是 $\sum_{e\in E(G)}w(e)$，即邮递员必须走过每条街道一次的总行程；还有一部分是重复走的街道 $E'\subset E(G)$（如果邮递员需要重复走某些街道的话）的总行程，即 $\sum_{e\in E'}w(e)$。因此，对于 G 的任一条环游 C，$w(C)\geqslant \sum_{e\in E(G)}w(e)$。具有最小权的环游称为 G 的**最优环游**。则中国邮路问题就是要在赋权图 G 中找一条最优环游。

若 G 是 Euler 图，则 G 的任何 Euler 环游都是最优环游。因为 Euler 环游是 G 的通过每条边恰好一次的环游。在这种情况下中国邮路问题是容易解决的。因此此时容易由 Fleury 算法求出 G 的一条 Euler 环游。此 Euler 环游就是最优环游，因为邮递员不需要重复

走任何街道。

如果 G 不是 Euler 图，则 G 的任意一条环游必有某些边重复出现。例如，图 4.7 中的环游 $xuywvzwyxuwvxzyx$ 是该图的一条最优环游，而四条边 ux，xy，yw，wv 都被这条环游通过两次。

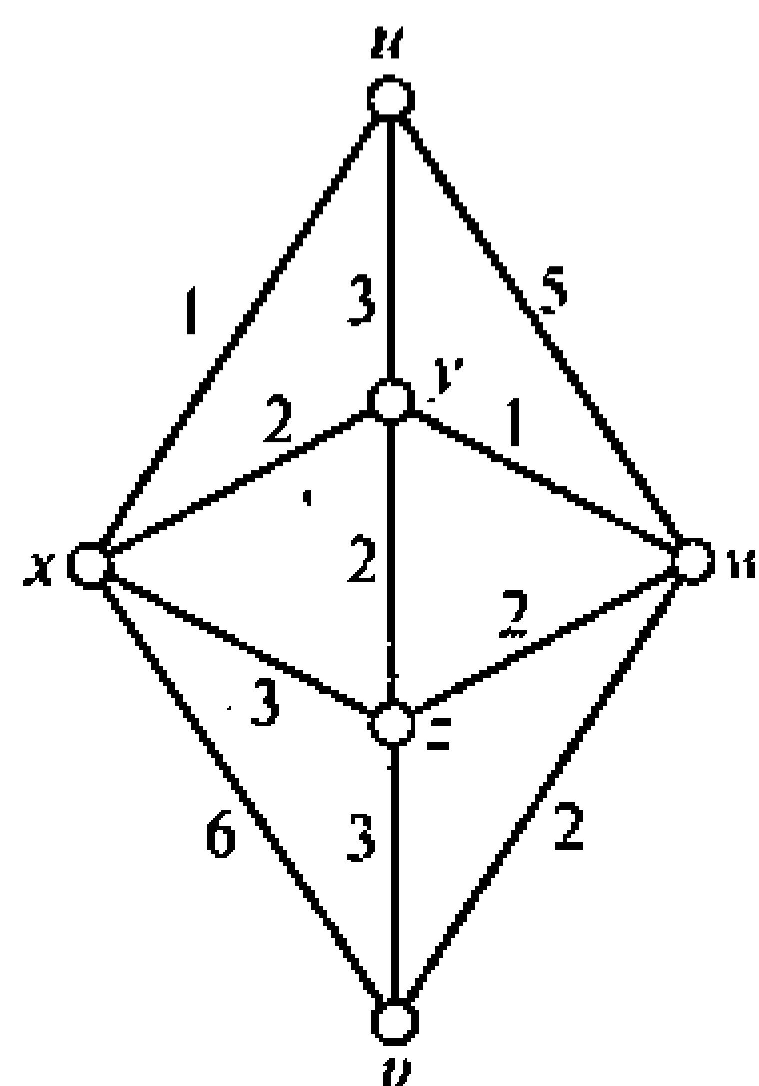


图 4.7

现在我们用双倍边的方法来讨论非 Euler 连通的图中求最优环游的方法。

设赋权图 G 是连通的非 Euler 图，G 的奇点个数必是偶数。任取其中的两个奇点 u 与 v，在 G 中存在 $(u-v)$ 路 P，将这条路上的每一条边添加一条边，其权与原来这条边的权相同。经过如此加边，u 与 v 的度均增加 1 而成为偶点，P 上其他顶点的度各增加 2 其度数的奇偶性不变。如果还有奇点，可继续这过程，直到没有奇点。最后所得到的图 $\overline{G}$ 是一个 Euler 图，而 G 是 $\overline{G}$ 的生成子图（也称 $\overline{G}$ 是 G 的生成母图）。如果在 $\overline{G}$ 中某两个点 x 和 y 之间连接的边数多于 2，则可去掉其中的偶数条多重边，最后剩下连接 x 与 y 的 1 或 2 条边，这样得到的图仍是 Euler 图。

总结以上过程，可得寻找非 Euler 图的最优环游的基本思路：

(1) 用双倍边方法求 G 的一个 Euler 赋权母图 $\overline{G}$，使

$$\sum_{e\in E(\overline{G})-E(G)} w(e)$$

达到最小；

(2) 用 Fleury 算法求得 $\overline{G}$ 的 Euler 环游 $\overline{C}$，所得 $\overline{C}$ 就是 G 的环游。

前面我们已经提供了求解(2) 的方法，即 Fleury 算法。而对于(1)，我们有如下定理。

定理4.2.1(管梅谷,1960)　设 G 是一个连通的赋权图,$\overline{G}$ 是 G 的一个 Euler 赋权生成母图,则

$$\sum_{e \in E(\overline{G})-E(G)} w(e) = \min\left\{ \sum_{e \in E(G^*)-E(G)} w(e) \,\middle|\, G^* \text{ 是 } G \text{ 的一个 Euler 赋权生成母图} \right\}$$

当且仅当 $\overline{G}$ 没有重复数大于 2 的边。并且 G 的每一个长度至少是 3 的回路中多重边的权和不超过此回路权和的一半。

证明　必要性　首先可以肯定 $\overline{G}$ 中不存在重复数大于 2 的边。其次,若 $\overline{G}$ 中有一个长度大于 2 的回路 C,C 中多重边的权和大于 C 的权和的一半,则将 C 上原来无重边的边各添加一条重边,而将 C 上的各多重边分别删去一条边。所得图 $\overline{G}'$ 的每个顶点的度仍为偶数,因而是 G 的 Euler 生成母图,但 $\overline{G}'$ 的权比 $\overline{G}$ 的权小,与 $\overline{G}$ 的假设相矛盾。

充分性　设 $\overline{G}$ 是满足定理条件的 G 的一个 Euler 生成母图。根据必要性,我们只要证明对于每一个满足定理条件的 G 的 Euler 生成母图 G^*,均有

$$\sum_{e \in E(\overline{G})-E(G)} w(e) = \sum_{e \in E(G^*)-E(G)} w(e)$$

设 $E_1 = E(\overline{G}) - E(G)$,$E_2 = E(G^*) - E(G)$,并且 $E_1 \neq E_2$,则对于 G 的每个顶点 v,在与 v 关联的边中,属于 E_1 的边数与属于 E_2 的边数有相同的奇偶性,所以 $G[E_1 \Delta E_2]$ 中没有奇点。从而,存在回路 $C_1, C_2, \cdots, C_k$,使 $E_1 \Delta E_2$ 中的每一条边属于其中一个且仅一个回路。对每个 $C_i (i = 1, 2, \cdots, k)$,由于 $\overline{G}$ 与 G^* 满足定理的充分条件。并注意到 $\overline{G}$(或 G^*)中,属于且只属于 E_1(或 E_2)的边是 $\overline{G}$(或 G^*)的重复边。故有

$$\sum_{e \in E_1 \cap E(C_i)} w(e) \leqslant \sum_{e \in E(C_i)-E_1} w(e) = \sum_{e \in E_2 \cap E(C_i)} w(e) \quad (1)$$

和

$$\sum_{e\in E_2\cap E(C_i)} w(e) \leqslant \sum_{e\in E(C_i)-E_1} w(e) = \sum_{e\in E_1\cap E(C_i)} w(e) \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可得

$$\sum_{e\in E_1\cap E(C_i)} w(e) = \sum_{e\in E_2\cap E(C_i)} w(e) \quad i = 1,2,\cdots,k$$

于是 $W(E_1) = W(E_2)$，即

$$\sum_{e\in E(\overline{G})-E(G)} w(e) = \sum_{e\in E(G^*)-E(G)} w(e)$$

证毕。

根据上面的讨论以及定理 4.2.1，我们可以设计出求非 Euler 赋权连通图的最优环游的算法。此算法称为最优环游的**奇偶点图上作业法**：

(1) 把 G 中度为奇数的顶点两两配对，记为 $x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_k$。对每个 $i(i = 1,2,\cdots,k)$，G 中取一条$(x_i - y_i)$路 P_i，将 P_i 上的每一条边都添加一条边，从而得到 G 的一个赋权 Euler 生成母图 G^*。

(2) 如果 G^* 中关于 G 的某一对相邻顶点有多于 2 条边连接它们，则去掉其中的偶数条边，留下 1 条或 2 条边连接这两个顶点。直到每一对相邻顶点至多由 2 条边连接。

(3) 检查 G 的每一个回路，如果某一个回路 C 上多重边的权和超过此回路权和的一半，则将 C 按定理 4.2.1 必要性的证明过程进行调整。重复这一过程，直至对 G 的所有回路，其多重边的权和不超过此回路的权和的一半，得 $\overline{G}^*$。

(4) 用 Fleury 算法求 $\overline{G}^*$ 的 Euler 环游。

按定理 4.2.1，最后所得的环游就是 G 的最优环游。

例 1 图 4.8(a) 给出赋权图 G，v, x, l 和 m 是 G 的四个奇点。根据上述算法(1)，把 x 和 m 配对，v 和 l 配对，取 $P_1 = xtlkzm$。并对 P_1 中每条边各添加一条边；又取 $P_2 = vwzkl$，并对 P_2 上每条边也各添加一条边。这就得到图 4.8(b)。因 4.8(b) 中的

边 lk 和 kz 上各添加了2条边。根据算法(2),各删去其中的2条边，得图4.8(c);再按算法(3),对图4.8(c)中的回路 $C_1 = xyltx$ 和 $C_2 = vwzyv$ 按定理 4.2.1 必要性的证明过程进行调整，得图 4.8(d);对图 4.8(d) 中回路 $uvyxu$ 再进行调整,得图 4.8(e) 所示的 $\overline{G}$。$\overline{G}$ 符合定理 4.2.1 的充分性条件，可得 G 的最优环游 $uvwzmzkltxuxylyzyvu$。

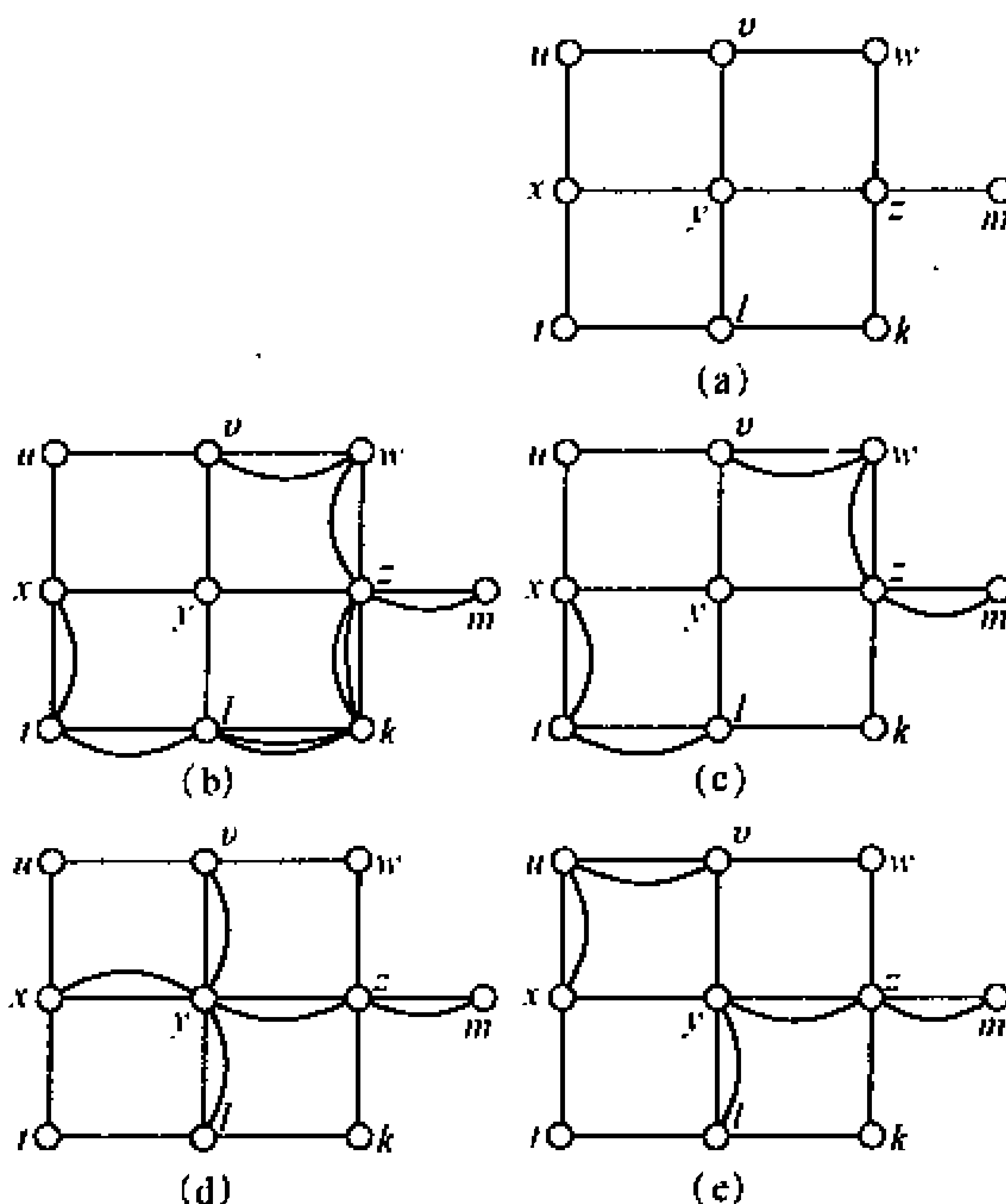


图 4.8

奇偶点图上作业法需检查图中的每一个回路。随着顶点个数和边数的增加,回路个数增加很快。例如图 4.9 所示的图超过 150 个回路。而图 4.10 所示的图,估计其中的回路个数至少有上千个。因此,对一般的图要施行奇偶点图上作业法是很难行得通的。然

而，J.Edmonds 和 E.L.Johnson 在 1973 年给出求解最优环游的更有效的算法。但这个算法不在此介绍。在这里我们介绍赋权图恰好有两个奇点的特殊情况下最优环游的求法。

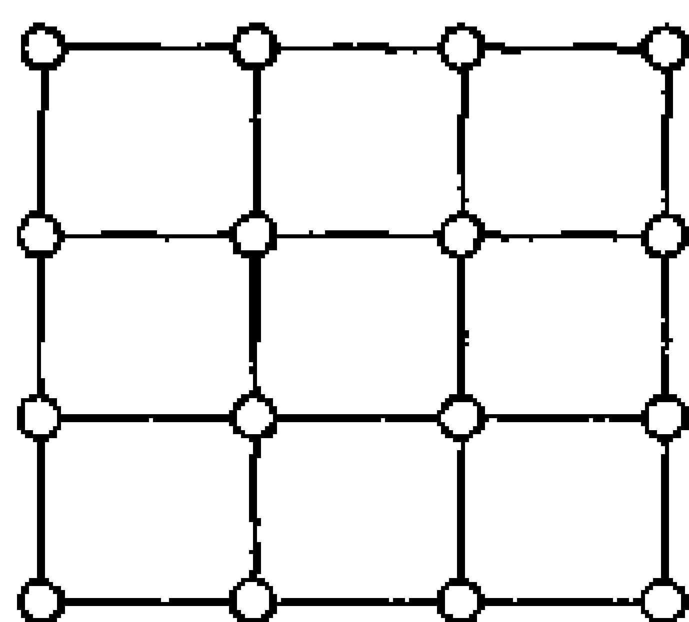


图 4.9

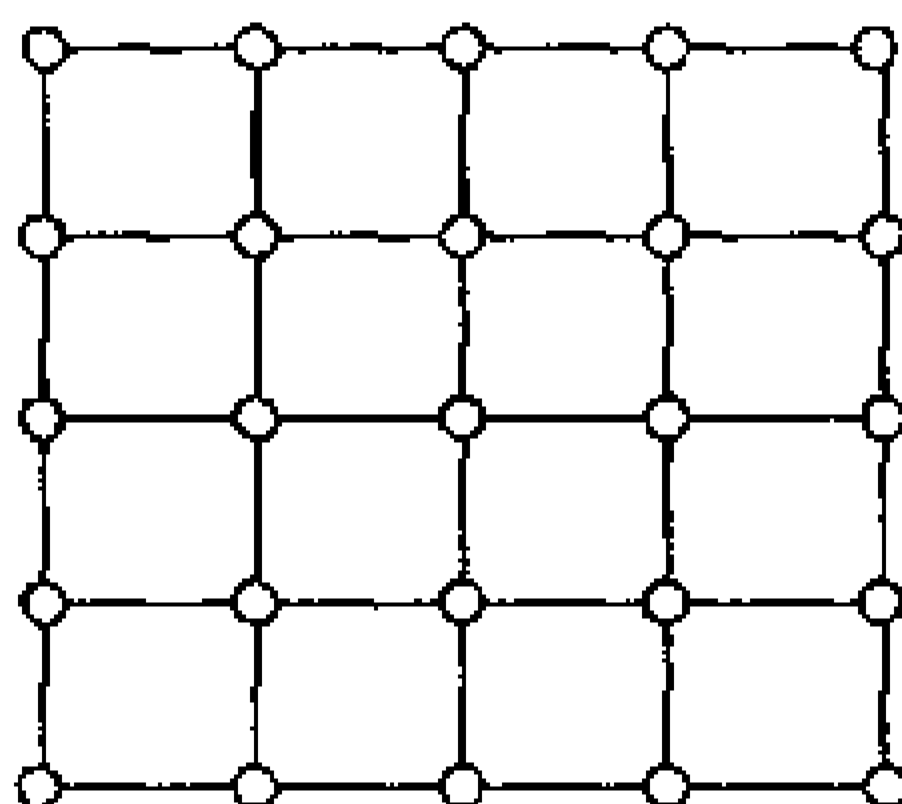


图 4.10

设 G 恰有两个奇点 u 与 v，则可以利用 2.2 节求出 G 的一条最短$(u-v)$路 P，在 G 中只要把 P 中的每一条边中再添加一条边，加上权就可得 Euler 图 $\overline{G}$。可以证明 $\overline{G}$ 的 Euler 环游就是 G 的最优环游。

事实上，设 G^* 是从 G 上重复某些边而得到的 G 的 Euler 生成母图，则在 $G^*-E(G)$ 中只有 u 与 v 是奇点，而其他顶点都是偶点。因此，由推论 1.3.2 知，u 和 v 在 $G^*-E(G)$ 的同一个连通分支中，即在 $G^*-E(G)$ 中存在一条$(u-v)$路 P^*，但 P 是 G 中的最短$(u-v)$路，故

$$\sum_{e\in E(G^*)-E(G)} W(e)\geqslant W(P^*)\geqslant w(P)=\sum_{e\in E(\overline{G})-E(G)} w(e)$$

因此对 G 的所有 Euler 生成母图来说，$E(\overline{G})-E(G)$ 的权和达到最小。即证得 $\overline{G}$ 的 Euler 环游就是 G 的最优环游。

例如，图 4.11(a) 所示的图中，u 与 v 是 G 中仅有的两个奇点，最短$(u-v)$路是 $P=uxyuv$。将 G 中属于 P 的边都改为多重边并加上权，就得图 $\overline{G}$(见图 4.11(b))。易得 $\overline{G}$ 的一个 Euler 环游是

$uxuwyxywzxvwvzyu$，即为 G 的最优环游。

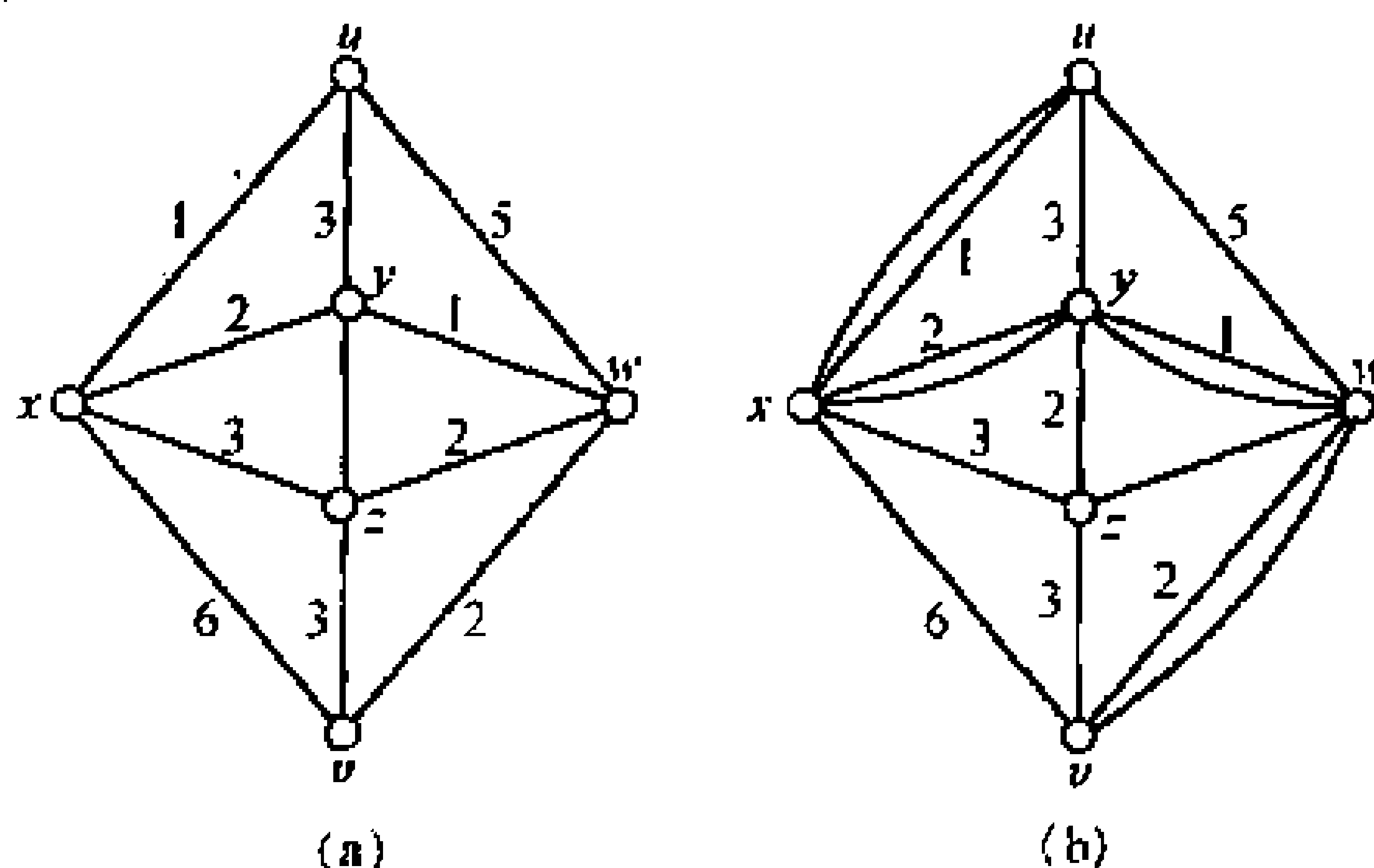


图 4.11

4.3 Hamilton 图

Hamilton 问题是图论中一直悬而未解的一大问题。它起源于 1856 年，当时英国数学家 Hamilton 设计了一种名为周游世界的游戏。他在一个实心的正十二面体的十二个顶点上标以世界上有名的二十座城市的名字，要求游戏者沿十二面体的棱从一个城市出发，经过每座城市恰好一次，然后返回到出发点，即"绕行世界"。

正十二面体的顶点与棱的关系可以用平面上的图来表示：把正十二面体的顶点与棱分别对应图的顶点与边，就得到图 4.12 中的正十二面体图。

上面所提的问题相当于在图 4.12 中找一个回路，它通过图中一切顶点。图 4.12 中按自然顺序用数字标示的顶点就是这样的一个回路。当然这种回路未必是惟一的。

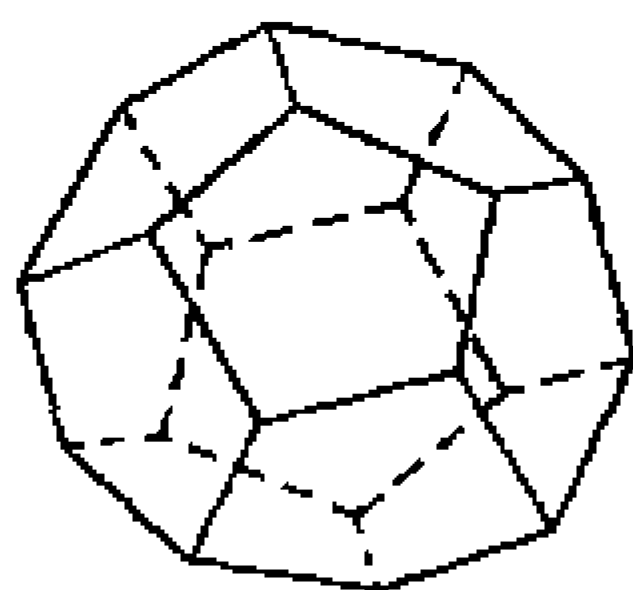


图 4.12

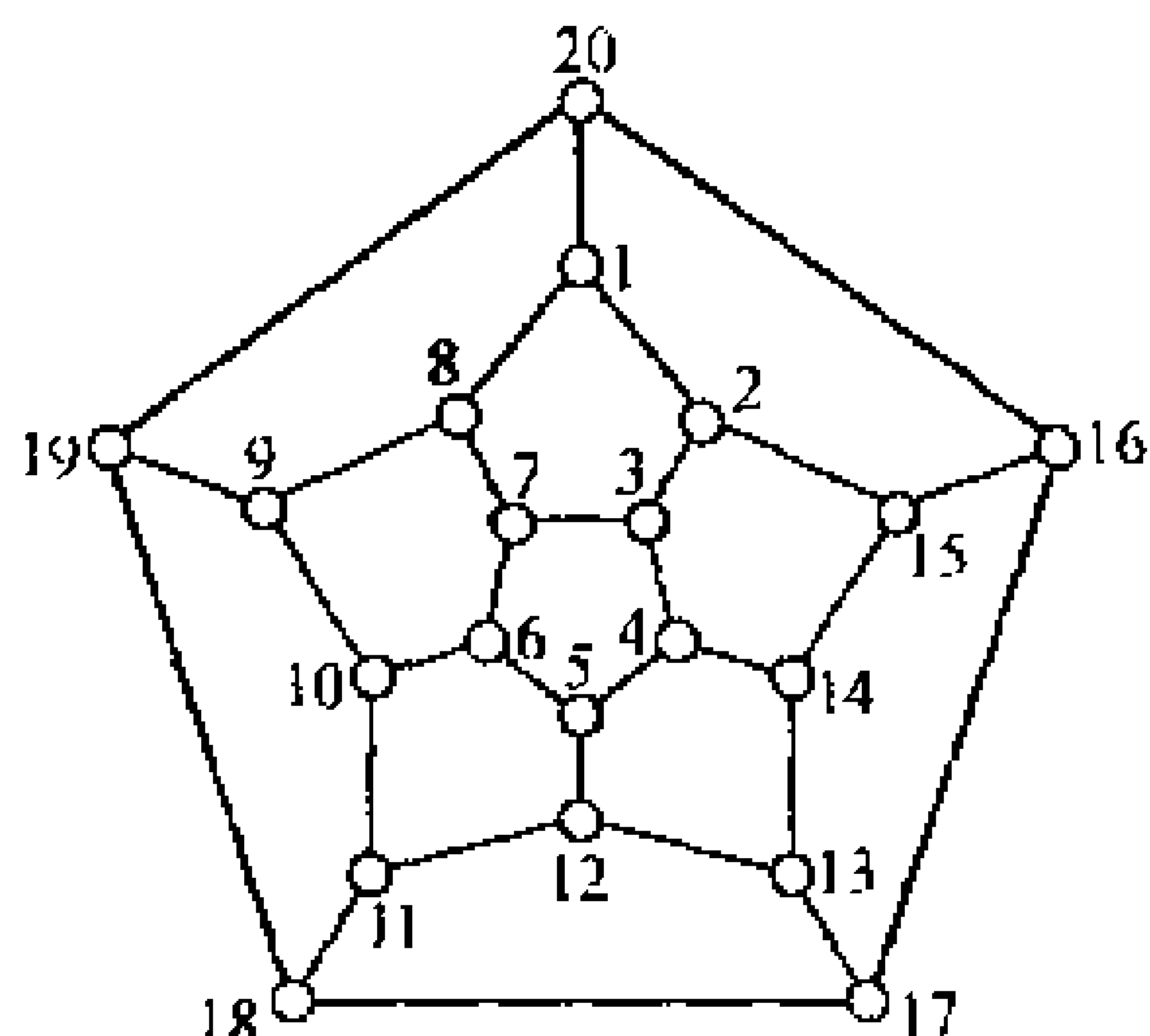


图 4.13

下面我们来给出图中 Hamilton 回路的确切定义。

定义 4.3.1 图 G 中的一个回路 C 称为 G 的一个 **Hamilton** 回路，如果 C 含有 G 的所有顶点。Hamilton 回路简称为 ***H* - 回路**。包含 G 的所有顶点的路称为 **Hamilton** 路。而称含有 Hamilton 回路的图为 **Hamilton** 图，简称为 H - 图。

例如图 4.12 中图的回路 $C = 1,2,3,\cdots,201$ 是正十二面体图的一条 Hamilton 回路。故十二面体图是 Hamilton 图。

从定义可知，一个图的 Hamilton 回路与 Euler 环游是很相似的，差别在于 Hamilton 回路是环游 G 的所有顶点回路，而 Euler 环游是环游 G 的所有边的闭迹。对于一个图是否存在 Euler 环游存在一个非常简洁的判别法。那么判断一个图是否有 Hamilton 回路也存在这样一个简单明了的判别法吗？遗憾的是直到现在还没有找到，也就是说到目前为止还没有找到 Hamilton 图的充要条件。事实上寻找 Hamilton 图的充要条件几乎是无望的。但是人们希望找到 Hamilton 图的简明有效的充分条件，这就是图论中一个著名的问题：Hamilton 问题。

现在我们分别来讨论图存在 Hamilton 回路的充分条件与必要条件。由于一个图 G 有 Hamilton 回路当且仅当 G 的基础简单图

有 Hamilton 回路，所以下面我们只考虑简单图。

定理 4.3.1　若 G 是 Hamilton 图，则对 $V(G)$ 的每一个非空真子集 S，均有

$$w(G-S)\leqslant|S|$$

证明　设 C 是 G 的一个 Hamilton 回路，则对 $V(G)$ 的每一个非空真子集 S，均有

$$w(C-S)\leqslant|S|$$

由于 $C-S$ 是 $G-S$ 的生成子图，故

$$w(G-S)\leqslant w(C-S)\leqslant|S|$$

证毕。

这个定理是图存在 Hamilton 回路的必要条件，它虽然较为简单，但利用此结论可判别许多没有 Hamilton 回路的图。例如，图 4.14 所示的图 G 中，如果删去三个顶点 v_1，v_2 和 v_3，就产生四个连通分支，故 G 不是 Hamilton 图。

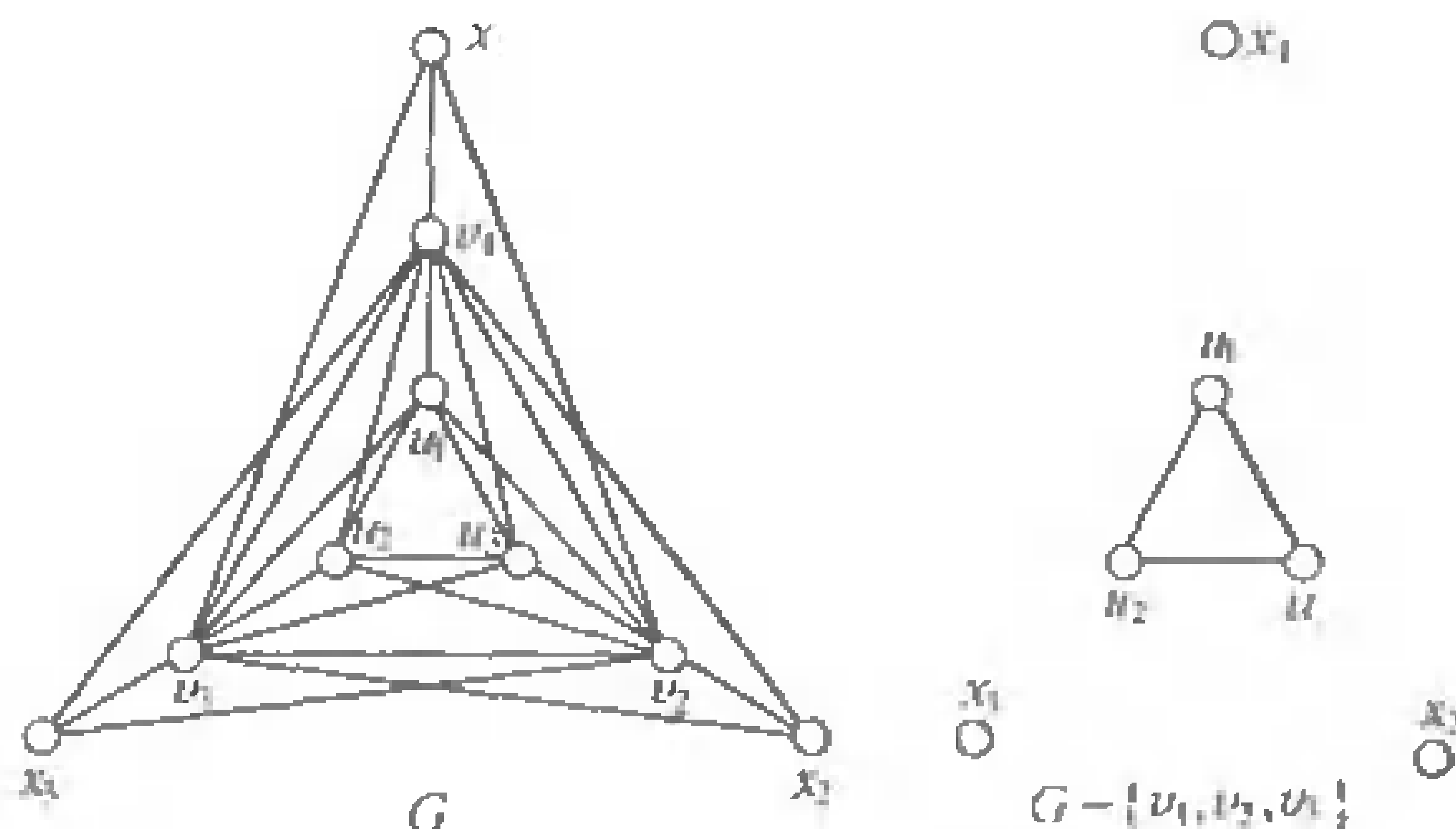


图 4.14

例 1　图 4.15 是某个展览馆的平面图。其中每个相邻的展览室有门相通。证明不存在一条从 A 进入，经过每个展览室恰好一次再从 A 处出来的参观路线。

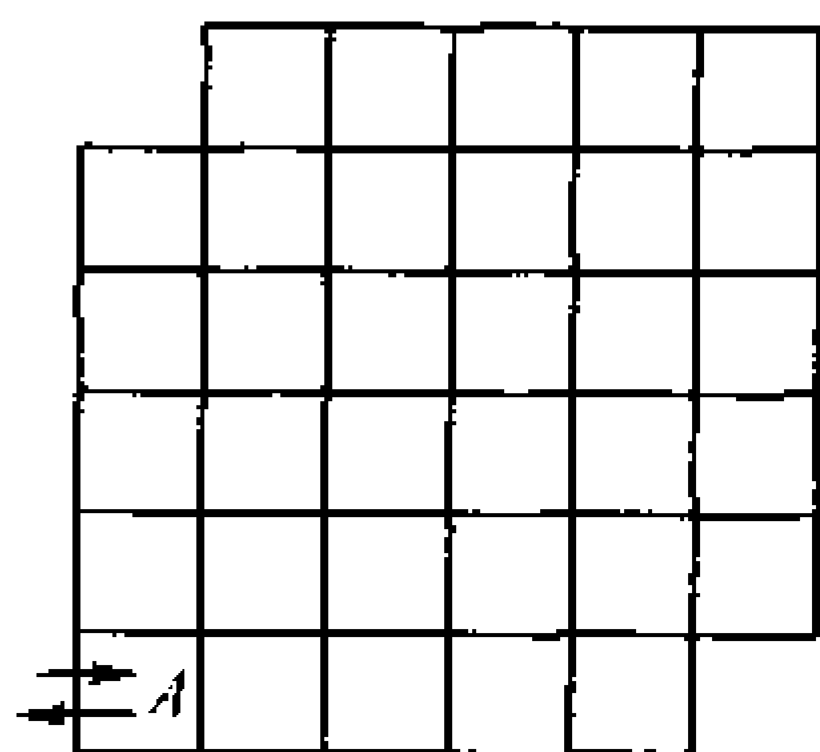


图 4.15

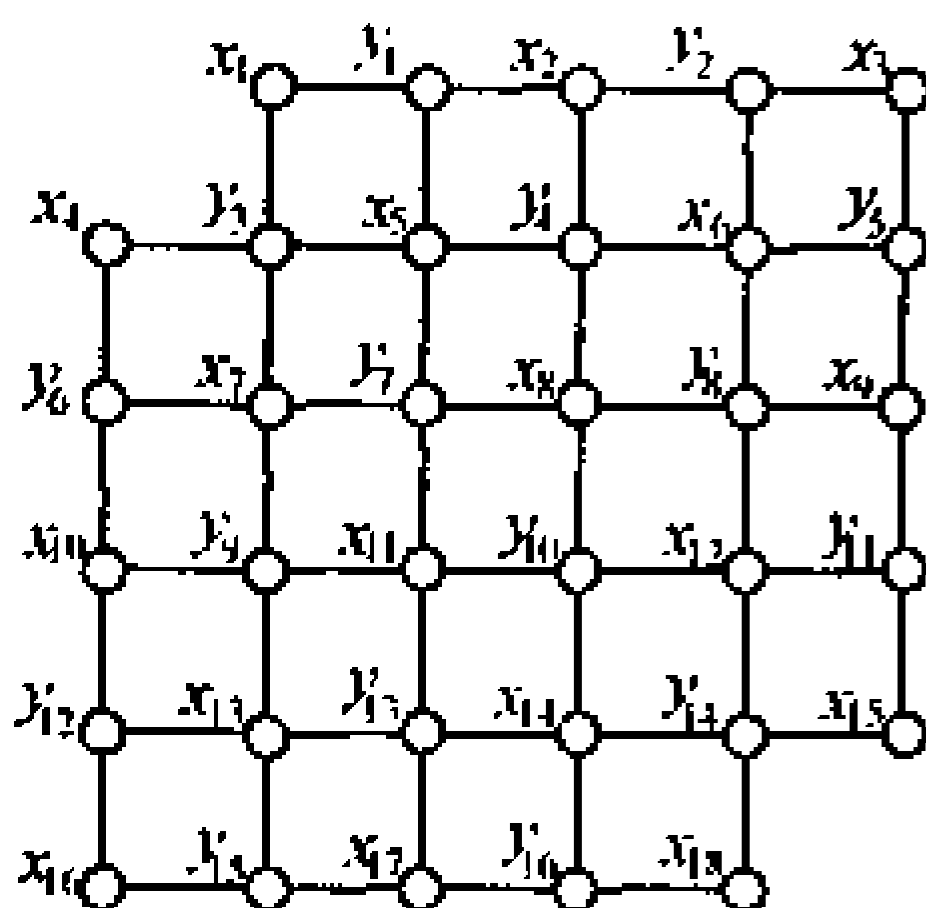


图 4.16

证明　用顶点代表展览室，两顶点相邻当且仅当这两顶点所对应的展览室有门相通。可得一个连通简单图 G(见图 4.16)，则只要证明 G 中不存在 Hamilton 回路即可。

从图 4.16 可知，顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_{18}$ 互不相邻，故 $G-\{y_1,y_2,\cdots,y_{16}\}$ 的连通分支由 18 个孤立顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_{18}$ 组成，即

$$w(G-\{y_1,y_2,\cdots,y_{16}\})=18>|\{y_1,y_2,\cdots,y_{16}\}|$$

由定理 4.3.1 知，G 无 Hamilton 回路。即满足条件的参观路线不存在。

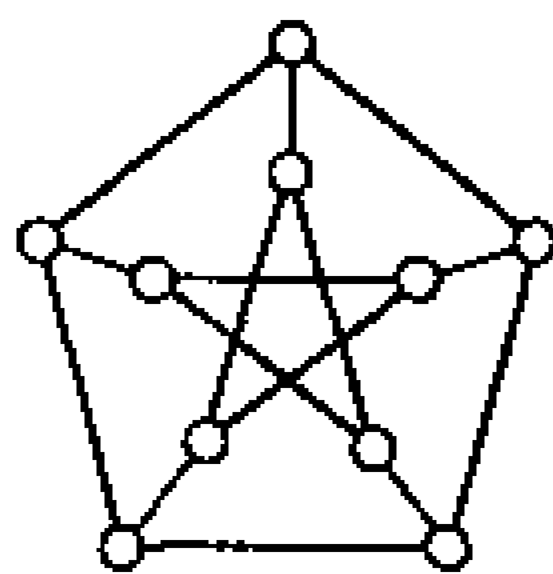


图 4.17

必须指出的是定理 4.3.1 仅给出了 Hamilton 图的必要条件，而不是充分条件，如著名的 Petersen 图(见图 4.17)，尽管满足：对 $V(G)$ 的每个非空真子集 S，均有

$$w(G-S)\leqslant|S|$$

但 Petersen 图不是 Hamilton 图(见习题 4.10)。

例 2　(1971 年波兰数学奥林匹克试题) 证明任一个有限集合的全部子集可以这样排列顺序，使任何相邻的两个子集仅相差一个元素。

证明 设此有限集为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，其中的子集用 n 个 0 或 1 的数列来表示：当此子集中含 A 的第 i 个元素时，0—1 数列的第 i 个数码写 1，否则写 0。于是全部子集共计 2^n 个，以这 2^n 个数列为顶点，当且仅当两个数列仅一个同位数码相异时，此两顶点间连一条边，得一个图 G。这种图叫做 n 维立方体，它可由两个 $n-1$ 维立方体($n\geqslant 2$)对应顶点(在 $n-1$ 维立方体中标号一致的顶点)连上边所得到。于是用数学归纳法易证它是 Hamilton 图，按照 Hamilton 回路的顺序排列对应子集即可。

图4.18是 n 维立方体 $n=3$ 的情形，上底下底是两个2维立方体。对应顶点连线后(同时把上底中顶点标号末位加号 0，下底中顶点标号末位加号 1)得到3维立方体。粗线表示出一个 Hamilton 回路：(100)(000)(010)(110)(111)(011)(001)(101)(100)。对应的子集排列为 $\{a_1\}$，$\varnothing$，$\{a_2\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{a_3\}$，$\{a_1,a_3\}$。

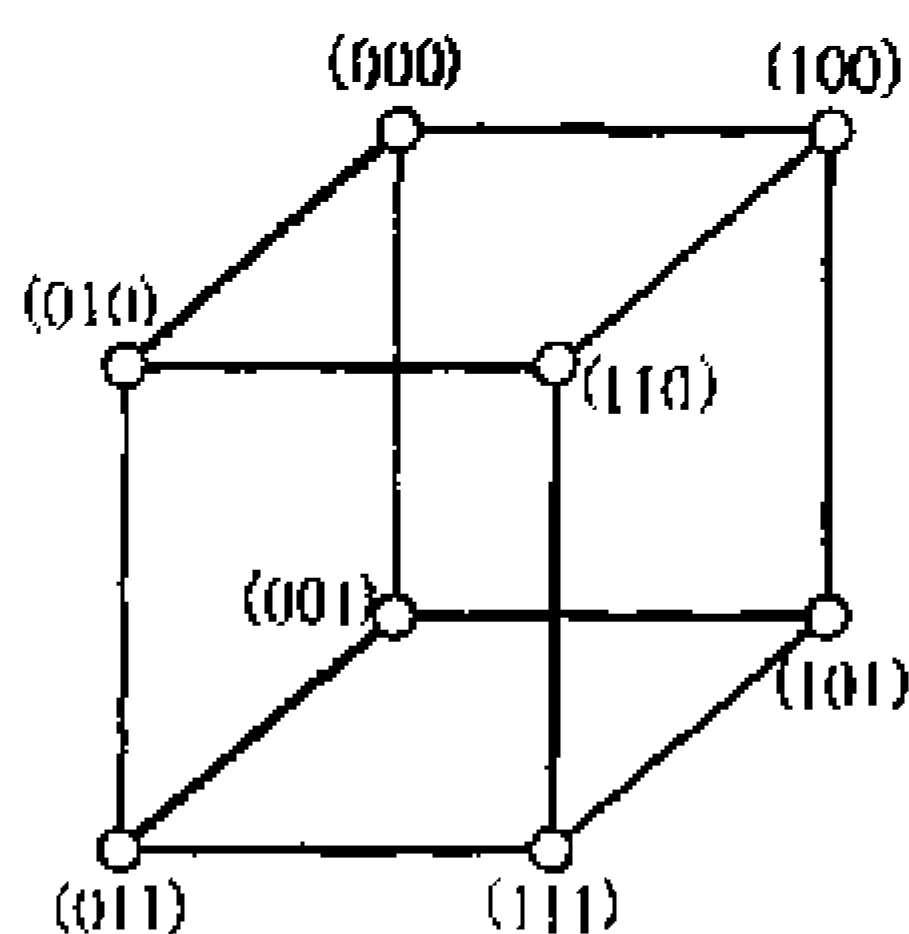


图 4.18

更高维的情形与此类似，图 4.19 给出了 4 维立方体。粗线为 Hamilton 回路。

下面讨论 Hamilton 图的充分条件，首先证明由 *O.Ore* 在 1960 年得到的一个充分条件。

定理 4.3.2 设 G 中任意两个不相邻的顶点 u 与 v，均有

$$d_G(u)+d_G(v)\geqslant p(G)$$

则 G 是 Hamilton 图($p(G)\geqslant 3$)。

证明 首先 G 是连通的，否则在 G 的两个不同的分支中各取一个顶点 u 和 v，有

$$d_G(u)+d_G(v)\leqslant p(G)-2$$

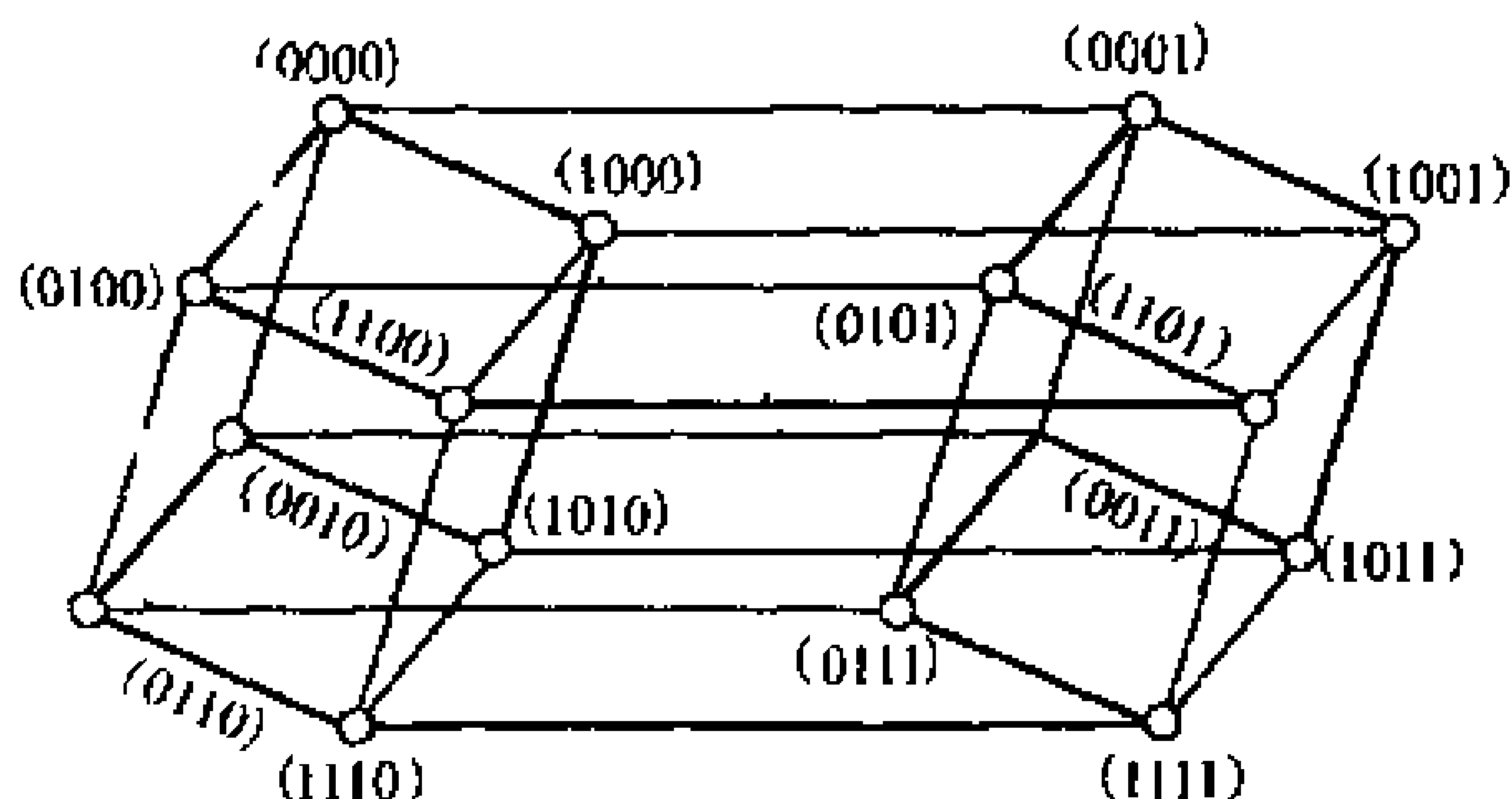


图 4.19

这与给定的条件相矛盾。

在 G 中取一条最长路

$$P = v_0 v_1 \cdots v_k$$

可以证明 G 中存在一条长为 $k+1$ 的回路，并且 $k = p(G) - 1$。

如果 v_0 与 v_k 在 G 中相邻，则在 P 中加上边 $v_0 v_k$，就得到一个长为 $k+1$ 的回路。

如果 v_0 与 v_k 不相邻，由给定的条件

$$d_G(v_0) + d_G(v_k) \geqslant p(G)$$

置

$$A = \{v_i \mid v_0 v_{i+1} \in E(G), 1 \leqslant i \leqslant k-1\}$$

$$B = \{v_i \mid v_i v_k \in E(G), 1 \leqslant i \leqslant k-1\}$$

由于 P 是 G 的最长路，G 中与 v_0 和 v_k 相邻的顶点全在 P 内。故

$$|A| = d_G(v_0) \text{ 和 } |B| = d_G(v_k)$$

易看出 $v_k \notin A, v_k \notin B$，于是

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |A| + |B| - |A \cup B| \\ &= d_G(v_0) + d_G(v_k) - |A \cup B| \\ &\geqslant p(G) - (p(G) - 1) = 1 \end{aligned}$$

因此 $A \cap B \neq \varnothing$。设 $v_{i_0} \in A \cap B$。则由 $v_{i_0} \in A$ 知，$v_0 v_{i_0+1} \in$

$E(G)$，而又由 $v_{i_0} \in B$ 知 $v_{i_0}v_k \in E(G)$。这样我们可得到 G 的一条长为 $k+1$ 的回路(见图 4.20)

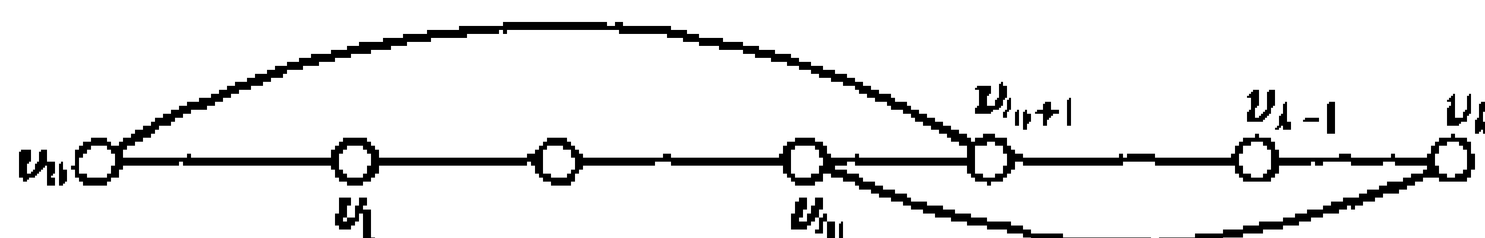


图 4.20

$$C = v_0 v_1 \cdots v_{i_0} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_0+1} v_0$$

如果 $k+1 < p(G)$，设 u 是 G 中不含在 C 上的一个顶点，由于 G 连通，故存在 (v_0-u) 路 L，不妨 L 中除 v_0 外均不含有 C 中的顶点，则把 C 中 v_0 关联的一条边删去，再加上 (v_0-u) 路 L，就可得一条长度至少是 $k+1$ 的路，与 P 是 G 的最长路的假设矛盾。所以 $k+1 = p(G)$，即 C 就是 G 的 Hamilton 回路。　　证毕。

有了这个定理的结果，下面的命题就成了此定理自然推论。

推论 4.3.3(G.A.Dirac 1952)　若 G 是具有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的简单图，每个顶点的度至少是 $p/2$，则 G 是 Hamilton 图。

例 3　有一个 n 人的团体($n \geq 3$)，这 n 个人中互相认识的对数(两个人认识就算作一对)至少是 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$。证明这 n 个人可以围桌而坐，使每个人与他相邻座位上的 2 个人认识。

证明　以顶点代表人，两顶点相邻当且仅当 2 个人互相认识，则 G 是至少有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ 条边的简单图。现在证明 G 是 Hamilton 图。

假若不然，则 G 无 Hamilton 回路，由定理 4.3.2 知，G 中存在两个不相邻的顶点 u 与 v。使 $d_G(u)+d_G(v) < n$。因而 G 中至多有 $n-1$ 条边关联于 u 和 v。作 $G_1 = G - \{u, v\}$，由于 u 和 v 不相邻，故

$$q(G) = q(G_1) + d_G(u) + d_G(v) \leqslant \binom{n-2}{2} + (n-1)$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

这与 $q(G) \geqslant \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ 相矛盾。所以 G 有 Hamilton 回路 C。现在只需按 C 的顺序安排人员围桌而坐，就能使每个人与相邻座位的两个人认识。

定理 4.3.4 设 G 是连通图，u 与 v 是 G 中两个不相邻的顶点，满足

$$d_G(u) + d_G(v) \geqslant n$$

则 G 是 Hamilton 图当且仅当 $G+uv$ 是 Hamilton 图。

证明 若 G 是 Hamilton 图，$G+uv$ 显然也是 Hamilton 图。

反之，如果 $G+uv$ 是 Hamilton 图，设 C 为 $G+uv$ 的 Hamilton 回路。当新增加的边 uv 不在 C 上时，C 就是 G 的 Hamilton 回路。如果新增加的边 uv 在 C 中，则 $C-uv$ 是 G 的一条 Hamilton 路。并且起点 u 与终点 v 的度数之和至少是 $p(G)$，与定理 4.3.2 同样可证明 G 中含有一条包含 $C-uv$ 所有顶点的回路，此回路就是 G 的 Hamilton 回路。所以 G 是 Hamilton 图。　　证毕。

根据这个定理，若 $uv \overline{\in} E(G)$ 且 $d_G(u)+d_G(v) \geqslant p(G)$，则 $G_1 = G+uv$ 与 G 有相同的 Hamilton 性。再考虑 G_1，若存在顶点 x 和 y，$xy \overline{\in} E(G_1)$ 且 $d_{G_1}(x)+d_{G_1}(y) \geqslant p(G_1) = p(G)$，则 $G_2 = G_1 + xy$ 是 Hamilton 图当且仅当 G_1 是 Hamilton 图。依次进行这一过程；即从 G 出发，相继地连接所得图中度数之和至少是 $p(G)$ 的不相邻顶点对，直到不能进行为止。最后所得图记为 $C(G)$，称 $C(G)$ 为 G 的闭包。图 4.21 表明了图 G 的闭包的构造过程。

根据 $C(G)$ 的构造及定理 4.3.4，易得以下定理。

定理 4.3.5 图 G 是 Hamilton 图当且仅当 $C(G)$ 是 Hamilton 图。

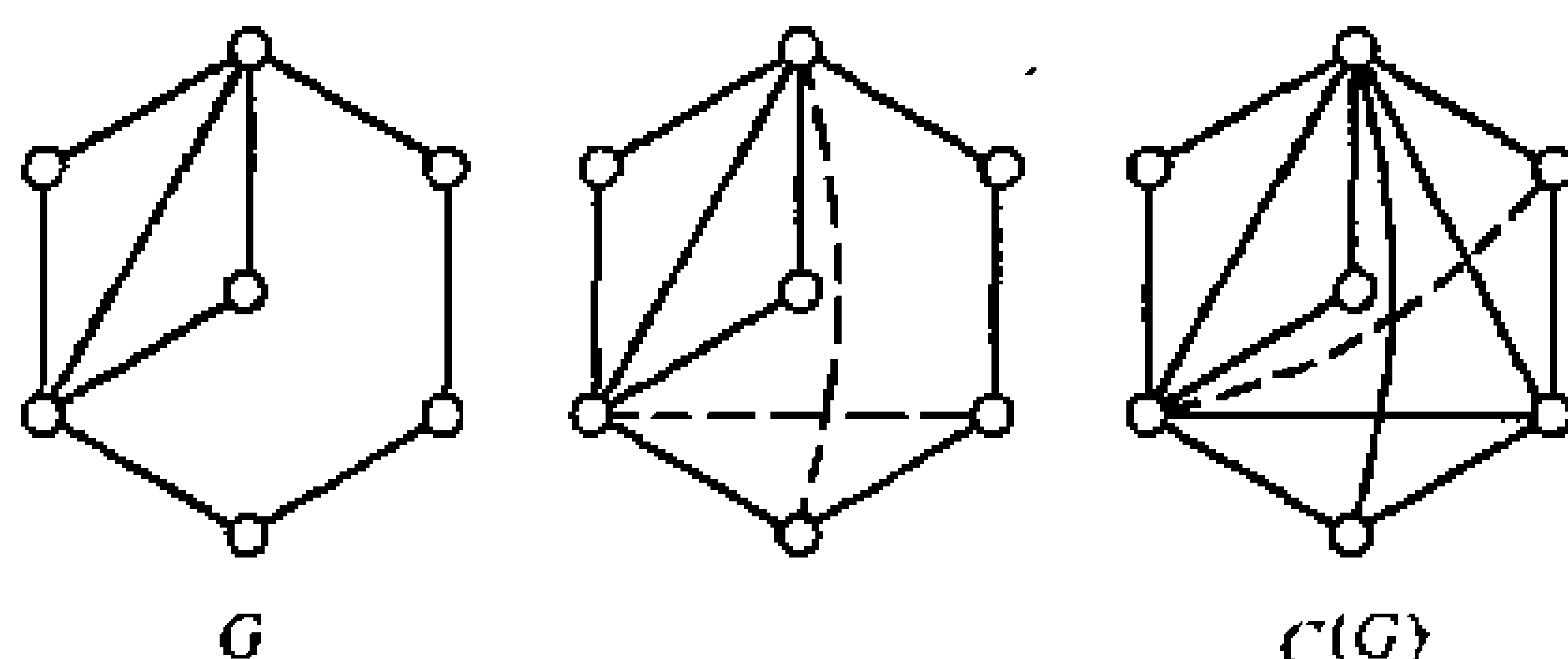


图 4.21

推论 4.3.6 若图 G 的闭包 $C(G)$ 是完全图，则当 $p(G)\geqslant 3$ 时，G 是 Hamilton 图。

例如，将图 4.14 中的边 x_1v_1 换为 x_1u_1 得图 G'（见图 4.22），这个图的闭包是完全图，因而 G' 是 Hamilton 图，有趣的是图 4.14 所示的这个图 G 并不是 Hamilton 图。但从 G' 有 Hamilton 回路可知，G 含有一条从 x_1 到 u_1 的 Hamilton 路。

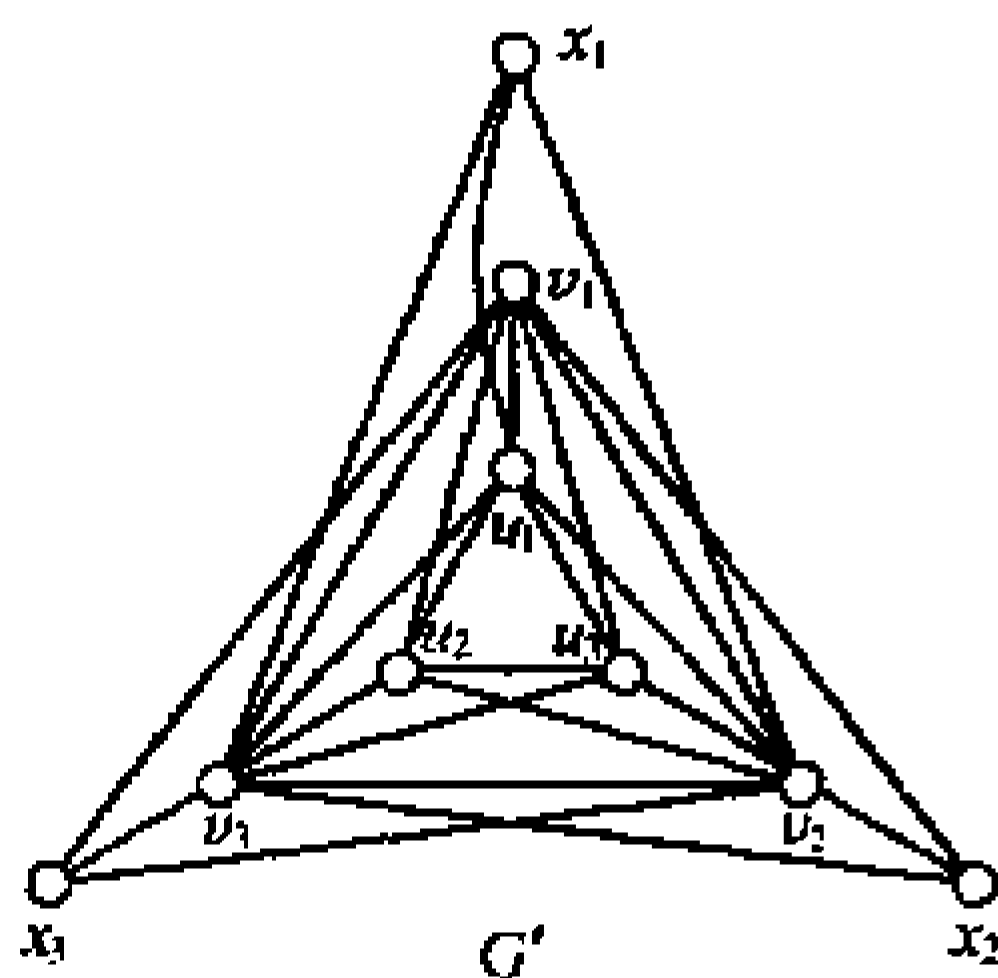


图 4.22

从定理 4.3.5 可知，判断一个图 G 是否为 Hamilton 图就转化为判断 $C(G)$ 是否为 Hamilton 图。从 $C(G)$ 的构造不难发现；若 x 和 y 是 $C(G)$ 中两个不相邻的顶点，则

$$d_{C(G)}(x)+d_{C(G)}(y)<p(G)$$

另外我们还有以下结论：

定理 4.3.7 图 G 的闭包 $C(G)$ 是惟一的。

证明 设 G_1 和 G_2 是 G 的两个闭包，由 G 得到 G_1 所添加的边依次为 $e'_1,e'_2,\cdots,e'_k$，由 G 得到 G_2 所添加的边依次为 $e''_1,e''_2,\cdots,e''_l$。我们要证明 $e'_1,e'_2,\cdots,e'_k$ 均是 G_2 的边。如果不是这样，设

$e'_{n+1} = vv'$ 为其第一条不属于 G_2 的边。令

$$H = G + \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$$

则在构作 G 的闭包 G_1 的过程中的下一步是在 H 中连接 v 与 v'，即在 H 中添加边 e'_{n+1}，故

$$d_H(v) + d_H(v') \geqslant p(G)$$

而由 e'_{n+1} 的假设，$H \subseteq G_2$，所以

$$d_{G_2}(v) + d_{G_2}(v') \geqslant p(G) \tag{3}$$

但 v 与 v' 在 G_2 中不相邻，而 G_2 是 G 的一个闭包。故

$$d_{G_2}(v) + d_{G_2}(v') < p(G)$$

这与式(3)相矛盾，所以 $e'_1, e'_2, \cdots, e'_k$ 均是 G_2 的边。同理可证 $e''_1, e''_2, \cdots, e''_l$ 也是 G_1 的边。由此推得 $G_1 = G_2$。　　证毕。

我们可以利用推论 4.3.6 来推导一个图是 Hamilton 图的几个以顶点度表达的充分条件。例如，当 $\delta(G) \geqslant p(G)/2$ 时，$C(G)$ 显然是完全图，故当 $p(G) \geqslant 3$ 时，G 是 Hamilton 图。当 G 满足定理 4.3.2 的条件时，$C(G)$ 也是完全图，故 G 是 Hamilton 图。一个比 Ore 定理更一般的结论是由 Chvátal 在 1972 年给出的定理。

定理 4.3.8　设图 G 的度序列为 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$，$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_p$，$p \geqslant 3$。若对任何 $k < \frac{p}{2}$，或有 $d_k > k$，或有 $d_{p-k} \geqslant p - k$，则 G 是 Hamilton 图。

证明　由推论 4.3.6 知，只要证明 G 的闭包是完全图。假设 $C(G)$ 不是完全图。在 $C(G)$ 中取两个不相邻的顶点 u 和 v，使对 $C(G)$ 中任何两个不相邻的顶点 u'、v'，有

$$d_{C(G)}(u) + d_{C(G)}(v) \geqslant d_{C(G)}(u') + d_{C(G)}(v') \tag{4}$$

不妨设 $d_{C(G)}(u) \leqslant d_{C(G)}(v)$。因为 $C(G)$ 是 G 的闭包，而 u 和 v 是 $C(G)$ 中两个不相邻的顶点，故有

$$d_{C(G)}(u) + d_{C(G)}(v) < p \tag{5}$$

记 $k = d_{C(G)}(u)$,则有

$$k \leqslant \frac{1}{2}(d_{C(G)}(u) + d_{C(G)}(v)) < p/2 \qquad (6)$$

下面我们要证明对这个正整数 k,定理的条件不满足。令

$$S = \{x \mid x \in V(G) - \{v\}, xv \overline{\in} E(C(G))\}$$

$$T = \{x \mid x \in V(G) - \{u\}, xu \overline{\in} E(C(G))\}$$

则由 S、T 的定义以及式(5)

$$|S| = p - d_{C(G)}(v) - 1 \geqslant d_{C(G)}(u) = k$$

$$|T| = p - d_{C(G)}(u) - 1 = p - k - 1$$

此外,根据 u 和 v 的选取,S 中每个点在 $C(G)$ 上的度数不超过 $d_{C(G)}(u) = k$,而 $T \cup \{u\}$ 中的每个顶点在 $C(G)$ 上的度数不超过 $d_{C(G)}(v) < p - k$。因此,在 $C(G)$ 中至少有 $|S|(\geqslant k)$ 个顶点的度小于或等于 k,同时至少有 $p - k(= |T \cup \{u\}|)$ 个顶点的度小于 $p - k$。由于 G 是 $C(G)$ 的生成子图,因而在 G 中更有 k 个点的度小于或等于 k 以及至少有 $p - k$ 个顶点的度小于 $p - k$。从而 $d_k \leqslant k, d_{p-k} < p - k$,而由(6)式有 $k < \frac{p}{2}$,这与定理的条件相矛盾。 证毕。

需要注意的是,定理 4.3.8 也只是一个 Hamilton 图的充分条件而不是必要条件。另外由定理 4.3.8 可直接推得定理 4.3.2 和推论 4.3.3。而且定理 4.3.8 比这两个充分条件更强。例如,图 4.22 中的图满足定理 4.3.8 的条件,所以它是 Hamilton 图。但这个图不满足定理 4.3.2 和推论 4.3.3 的条件。

推论 4.3.9 设图 G 的度序列为$(d_1, d_2, \cdots, d_p)$, $d_1 \leqslant d_2 \cdots \leqslant d_p$, $p \geqslant 3$。若对任何 k, $1 \leqslant k < \frac{p-1}{2}$,均有 $d_k > k$。若 p 为奇数,更有 $d_{\frac{1}{2}(p+1)} > \frac{1}{2}(p-1)$,则 G 是 Hamilton 图。

证明 若 p 为偶数,对任何正整数 $k < \frac{p}{2}$,必有 $k < \frac{p-1}{2}$,

故有定理的条件得 $d_k > k$,则由定理 4.3.8 知,G 是 Hamilton 图。

若 p 为奇数,对 $k < \frac{1}{2}(p-1)$,有 $d_k > k$,而对 $k = \frac{1}{2}(p-1)$,有 $p-k = \frac{1}{2}(p+1)$,按定理条件

$$d_{p-k} = d_{\frac{1}{2}(p+1)} \geqslant \frac{1}{2}(p-1)+1 = p-k$$

故由定理 4.3.8 知,G 是 Hamilton 图。　　证毕。

4.4　旅行售货员问题

设有 p 个城镇,已知每两个城镇之间的距离,一个售货员自某一城镇出发巡回售货,问这个售货员应如何选择路线,能使每个城镇经过一次且仅一次,最后返回到出发地,而使总的行程最短。这个问题称为旅行售货员问题。容易看出,旅行售货员问题就是在一个赋权完全图中,找一个具有最小权的 Hamilton 路。我们称这种回路为**最优 Hamilton 回路**。

除售货员问题之外,邮局中负责到各个信箱取信的邮递员,以及去各个分局送邮件的汽车等都会类似地遇到这种问题。还有一些问题表面上似乎与之无关,而实质上却可以归结为售货员问题来解决。既然这个问题有着如此广泛的应用,那么找一个求解最优 Hamilton 回路的有效算法(称一个图论算法是有效算法,如果在任何图 G 上施行这个算法所需要的计算总步数都可由 $p(G)$ 和 $q(G)$ 的一个多项式为其上界)就成为一件很重要的事。遗憾的是,目前还没有一个求解最优 Hamilton 回路的有效算法,所以希望有一个方法以获得相当好(但不一定是最优)的解。下面我们给出一个较好的近似算法:最邻近算法,以及一个修改方法。

设 $G=(V,E)$ 是一个赋权完全图,根据实际问题,我们可作如下规定:对 $V(G)$ 中任何三个顶点 u、v 和 x,满足

$$w(uv) + w(vx) \geqslant w(ux)$$

求近似最优 Hamilton 回路的最邻近算法：

(1) 任选一个点 v_0 作起点，找一条与 v_0 关联其权最小的一条边 e_1，e_1 的另一个端点记为 v_1，得一条路 v_0v_1；

(2) 设已选出路 $v_0v_1\cdots v_i$，在 $V(G) - \{v_0, v_1, \cdots, v_i\}$ 中取一个与 v_i 最近的相邻顶点 v_{i+1}，得 $v_0v_1\cdots v_iv_{i+1}$；

(3) 若 $i + 1 < p(G) - 1$，用 i 代 $i + 1$ 返回(2)。否则记

$$C = v_0v_1\cdots v_pv_0$$

停止。

最后所得的 C 就是 G 的一条近似最优的 Hamilton 回路。例如，在图 4.23 中，粗边表示了起点选 a 并用最邻近法求得的一条 Hamilton 回路

$$C = a\ d\ b\ c\ e\ a$$

该 Hamilton 回路的长度为 40。

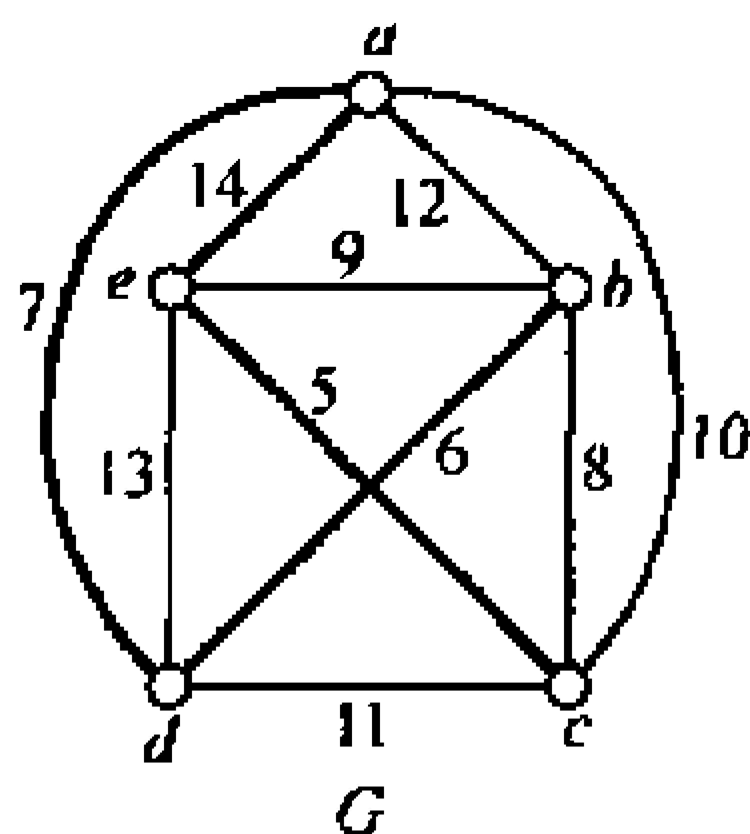


图 4.23

用最邻近法求得的 Hamilton 回路一般不是最优的。但通过以下的修改，可获得更短的 Hamilton 回路。

其修改方法：

设 $C = v_1v_2\cdots v_pv_1$ 是 G 的一个 Hamilton 回路，若存在 i、j 适合 $1 < i + 1 < j < p$，并且

$$w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < w(v_iv_{i+1}) + w(v_jv_{j+1})$$

则 Hamilton 回路 $C_{ij} = v_1v_2\cdots v_iv_jv_{j-1}\cdots v_{i+1}v_{j+1}\cdots v_pv_1$（它是由 C 删去边 v_iv_{i+1} 和 v_jv_{j+1} 添加边 v_iv_j 和 $v_{i+1}v_{j+1}$ 而得到的。见图 4.24 所示）的权和

$$W(C_{ij}) = W(C) - w(v_iv_{i+1}) - w(v_jv_{j+1}) + w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < W(C)$$

因而 Hamilton 回路 C_{ij} 将是 C 的一个改进。

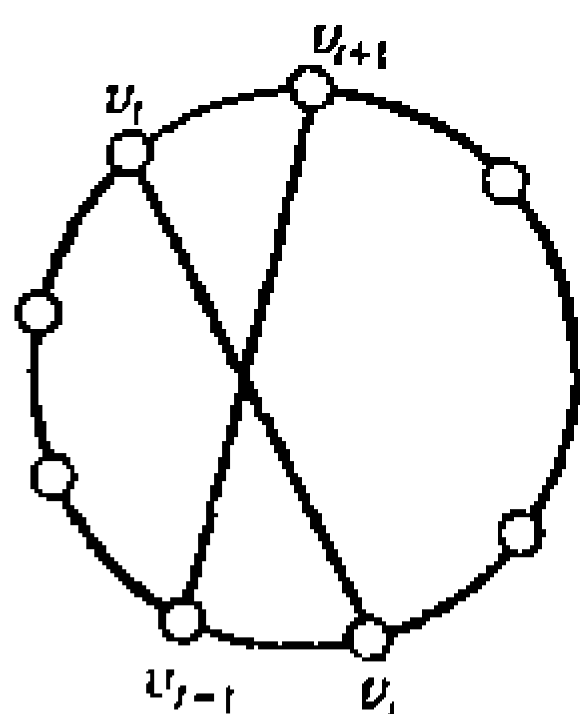


图 4.24

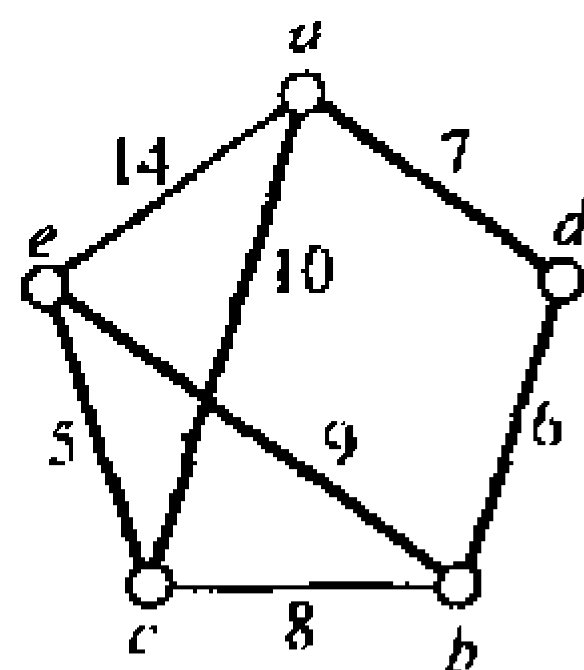


图 4.25

在接连进行上述的一系列修改后，最后得到的这个 Hamilton 回路不能再用此方法改进了，这个 Hamilton 回路虽然未必是最优的，但有理由认为它常常是比较好的。

例如，用最邻近法得到的图4.23所示的 G 的 Hamilton 回路为 $C = adbcea$，用此方法修改后可得 $C' = acebda$ 见图 4.25，其长度为 37。

我们可以利用 Kruskal 算法给出最优 Hamilton 回路解的下界的一个估计式。设 v 是赋权完全图 G 的任意一个点，用 Kruskal 算法求出 $G - v$ 的一个最优树 T，设 C 是 G 的一个最优 Hamilton 回路，显然 $C - v$ 是 $G - v$ 的一个生成树，因此

$$w(T) \leqslant w(C - v)$$

设 G 中与 v 关联而权最小和权次小的两条边分别是 e 和 f，则

$$w(T) + w(e) + w(f) \leqslant w(C)$$

因此 $W(T) + w(e) + w(f)$ 将是 G 的最优 Hamilton 回路的一个下界的估计式。以图4.23中的 G 为例，$G - c$ 的图为图4.26(a)所示，用 Kruskal 算法求得 $G - c$ 的一个最优树 T 如图4.26(b)所示，T 的权为22，G 中与 c 关联而权最小的两条边为 ce 和 cb，因此 G 的最优 Hamilton 回路 C 满足

$$w(T) + w(ce) + w(cb) = 22 + 5 + 8 = 35 \leqslant w(C) \leqslant w(C') = 37$$

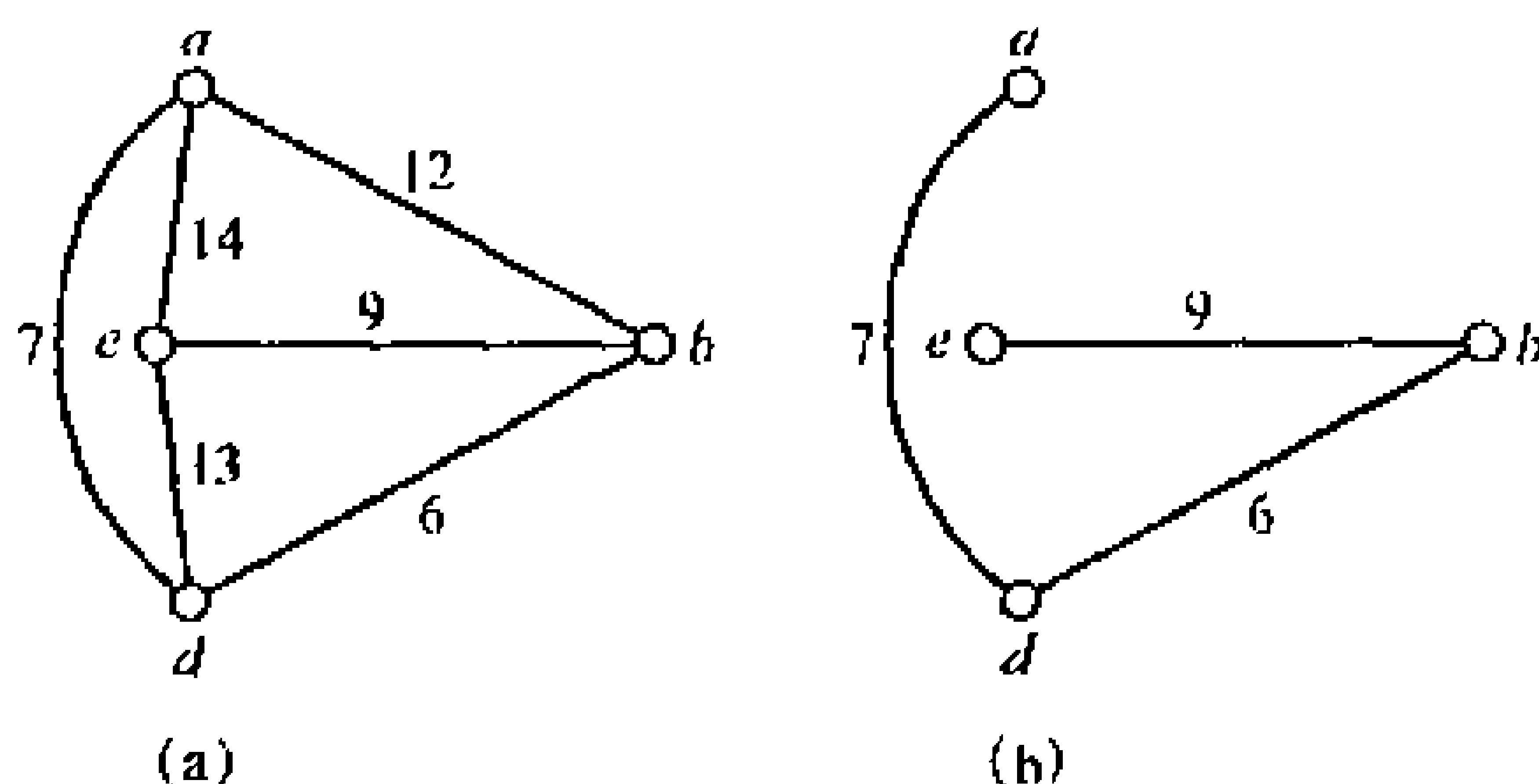


图 4.26

由此可见结合上面两个方法所得到的 Hamilton 回路是一个很好的近似解。其实 C' 就是 G 的一个最优 Hamilton 回路。

下面介绍旅行售货问题的二个应用实例。

1）计算机线路问题

在设计计算机接口时经常遇到这样的问题：一个接口由一些组件构成，每个组件上有几个接线插头连接起来。由于插头比较小及其他一些原因，规定每个插头上至多接两条电线，又为了整洁和避免信号相互作用，要求使电线的总长度最小。

这个问题很容易归结为旅行售货员问题。事实上，令 P 为需要连接的所有插头的集合，构造一个以 P 为顶点集的完全图 G，G 中连接插头 i 与 j 的边的长度 C_{ij} 定义为 i 与 j 之间的距离。这样，需要解决的问题就是：在 G 中找一条长度最短的 Hamilton 路。令 $N = P \cup \{0\}$，这儿 0 代表一个新增加的顶点，对于任意 $i \in P$，令 $C_{i0} = 0$。易见在以 N 为点集的完全图上求出旅行售货问题的最优解即可得出 G 中最短的 Hamilton 路。

2）行车路线问题

在北荷兰的 Ducth 省的 28 个城镇中，国家邮政服务公司装置了投硬币的公用电话亭，一个雇员必须每星期到每个电话亭去一

至二次，以收取盒子中的硬币，有时还对电话进行小修理。他每天工作时间不超过7个半小时，并且必须从该首府Haarlem出发并回到原地。问应该怎样安排才能使工作天数以及整个旅行时间达到最少。

在Utrecht城有一个相似的问题。那里有200个信箱要由一些卡车去取信，卡车的起点和终点是中央火车站，每次出车时间不能超过一小时。问怎么使卡车数及总的行车时间达到最少。

上面两个问题(分别记为 P_1 和 P_2) 都是经典的行车路线问题(Vehicle Routing Problem)，它们可以描述成：有 m 辆车要去访问 n 个城市 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，起始点为城市0，对于 $i, j \in \{0,1,2,\cdots,n\}$，城市 i 与 j 间旅行时间为 $d_{ij} = d_{ji}$ 分钟，在城市 i 中，需要工作 e_i 分钟，每辆车每次出车的时间不能超过 f 分钟，问题是使两个目标：

A：使用的车数，

$B(A)$：A 辆车的行驶总时间

达到最小。

可以将上述问题转化为旅行售货员问题。办法是：将出发点0改为 m 个虚设的出发点 $n+1, n+2, \cdots, n+m$，然后定义距离如下：

$$d_{i,n+k} = d_{n+k,i} = d_{i0}, k = 1,2,\cdots,m; i = 1,2,\cdots,n$$

$$d_{n+k,n+r} = \lambda, k, r = 1,2,\cdots,m$$

别外，规定 $e_{n+k} = 0(k = 1,2,\cdots,m)$。令

$$N = \{1,2,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m\}$$

又对于任意 $i, j \in N$，令

$$C_{ij} = \frac{1}{2}e_i + d_{ij} + \frac{1}{2}e_j$$

于是，可以考虑以 N 为点集的旅行售货员问题，它的每一条路线 t 可以写成

$$t = \{\cdots, n+i_1, \cdots, n+i_2, \cdots, \cdots, n+i_m, \cdots\}$$

这里 $n+i_1, n+i_2, \cdots, n+i_m$ 为 m 个虚设的出发点。如果把这些

虚设的出发点仍看作原出发点 0,就成为以 0 为出发点的 m 条路线了。如果这 m 条路线的行车时间都不超过上界 f,我们就得到行车路线问题的一个可行解。t 中可能出现一些连接两个虚设出发点的边,如果有 $m-A$ 条这样的边,则实际上就分解成 A 条路线,即只需要用 A 辆车就足够了。

下面解释一下 λ 的作用:

(1) 如果取 $\lambda=+\infty$,则所得解中不会出现连接两个虚设点的边。故 m 辆车全部用上,求得的是总行驶时间 $B(m)$ 为最小的解。

(2) 如果取 $\lambda=0$,则车数没有限制,求得的是总行驶时间最小的解。

(3) 如果取 $\lambda=-\infty$,则使用的车数将尽量少,求得的是使车数最少时总行驶时间最小的解。因此,对于问题 P_1 与 P_2,都应取 $\lambda=-\infty$。

当然,由于有每次出车时间不能超过 f 的限制,上述问题与行车路线问题并不完全等价。一种可用的解行车路线问题的办法是:

(1) 取一条路线 t,满足行车路线问题的约束;

(2) 有一种迭代法来改进路线 t,并要求在路线的总长度下降时,仍满足行车路线问题的约束。

习　题　四

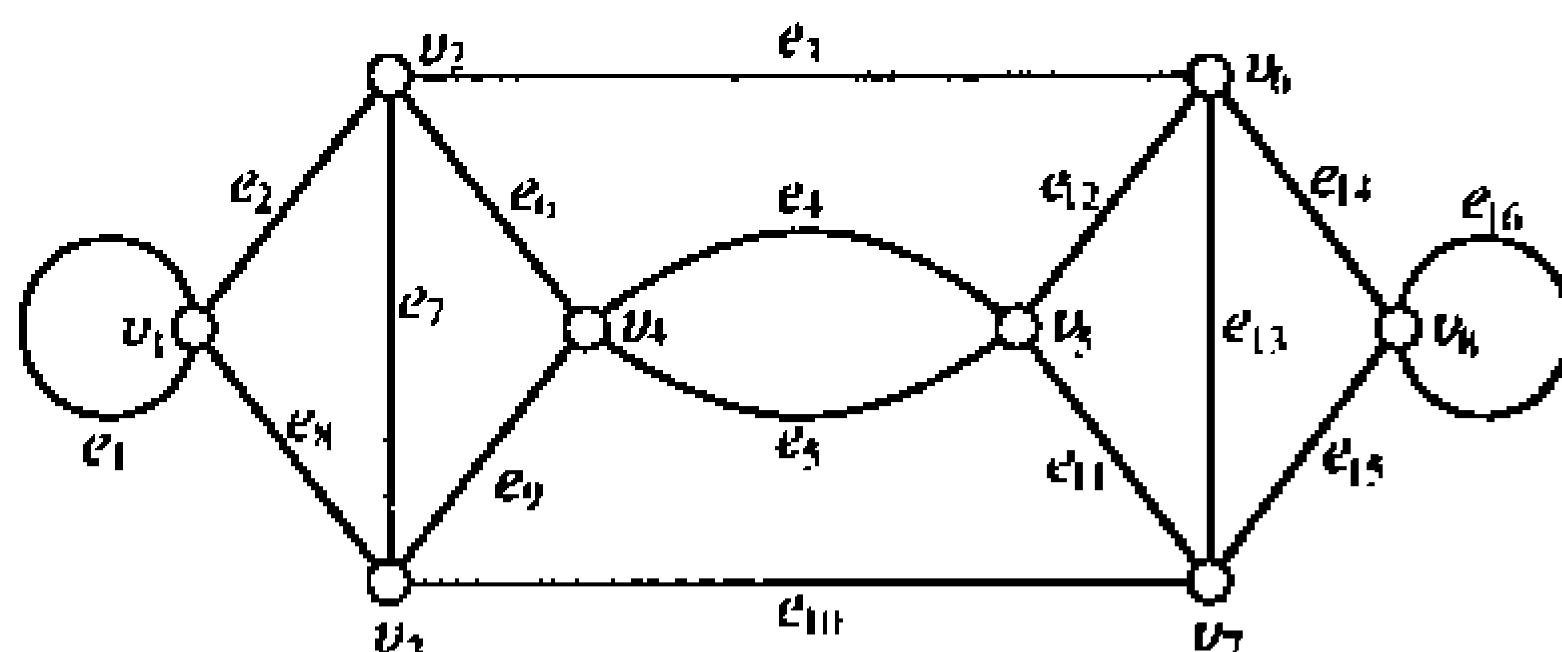
4.1　在下面这个图中找一个 Euler 环游。

4.2　设 G 是连通图,证明:G 是 Euler 图当且仅当存在边不相交的回路 $C_1,C_2,\cdots,C_k$,使得

$$E(G)=E(C_1)\cup E(C_2)\cup\cdots\cup E(C_k)$$

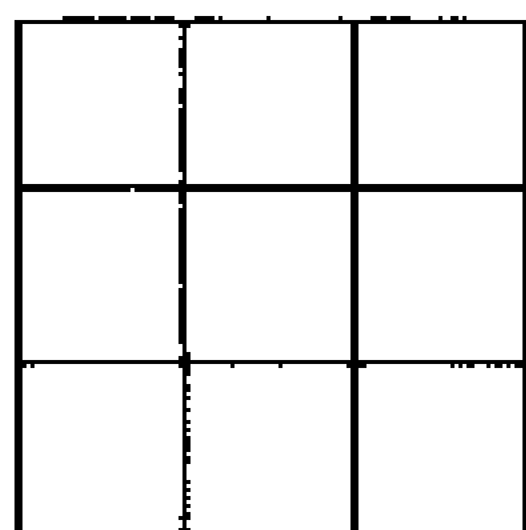
4.3　设简单图 G 是一个 Euler 图。证明:G 中每个顶点 u,均有

$$w(G-u)\leqslant\frac{1}{2}d(u)$$

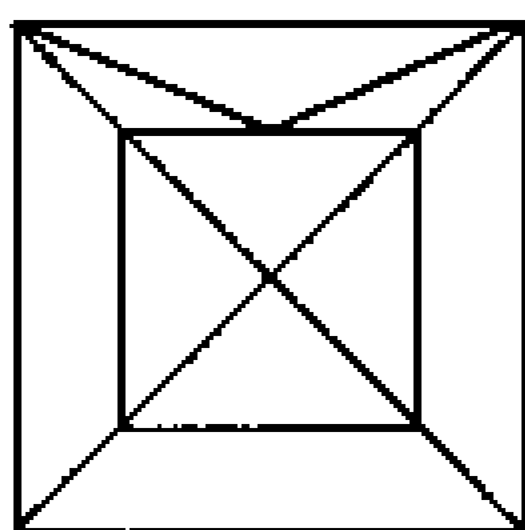


习题 4.1

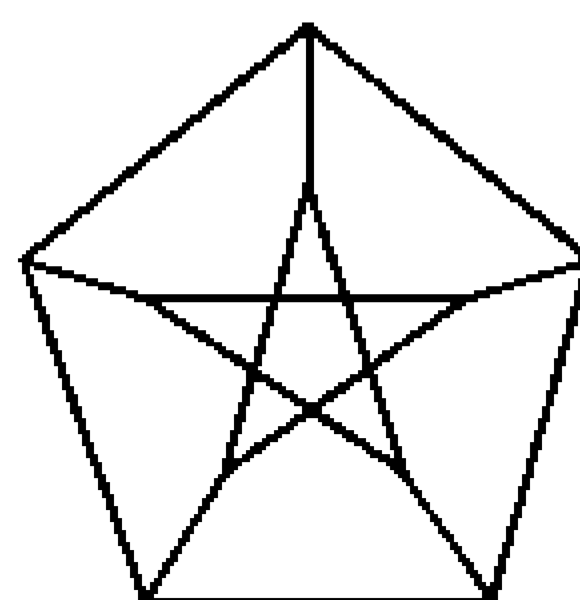
4.4　下列图形中哪一些能一笔不重复画成？



(a)



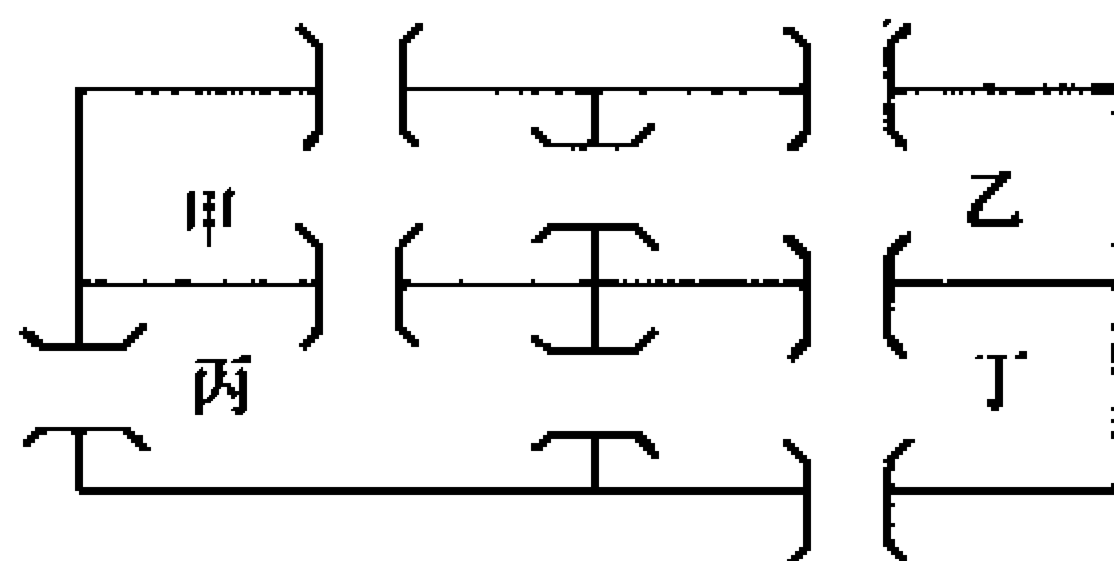
(b)



(c)

习题 4.4

4.5　如下图所示，四个村庄下面各有一个防空洞甲、乙、丙、丁，相邻的两个防空洞之间有地道相通，并且每个防空洞各有一条地道与地面相通(图中地道用 ═ 表示)。问能否通过每条地道都恰好一次？



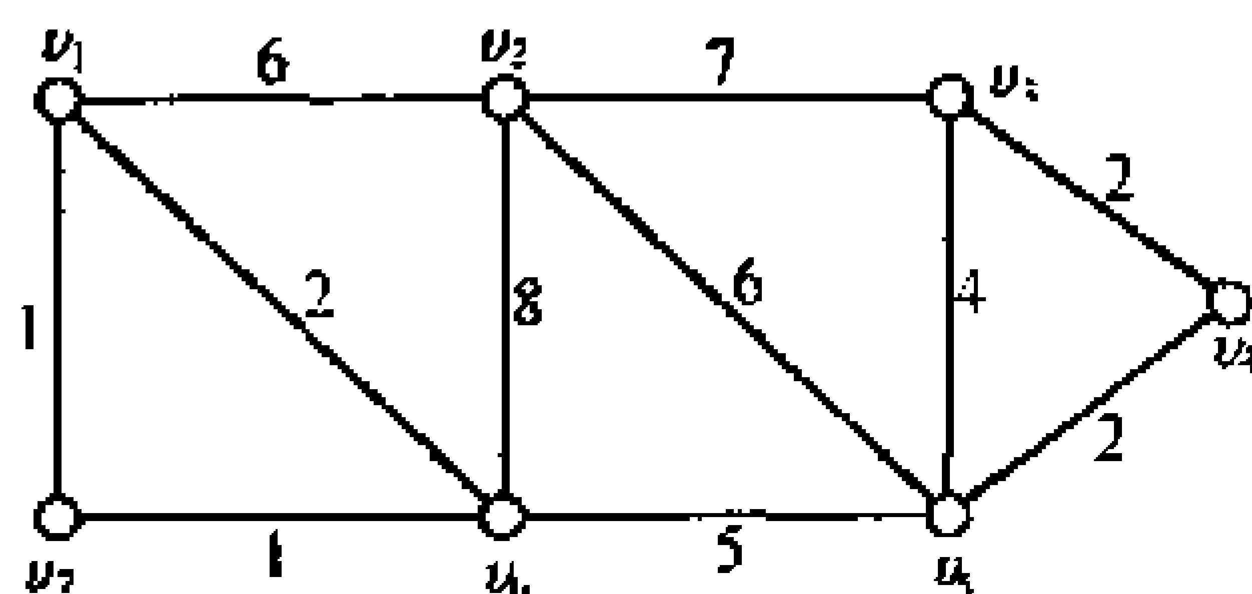
习题 4.5

4.6　是否存在点数为偶数、边数为奇数的 Euler 图？如果没有这

样的图，给出理由；如果存在这样的图，给出一个实例。

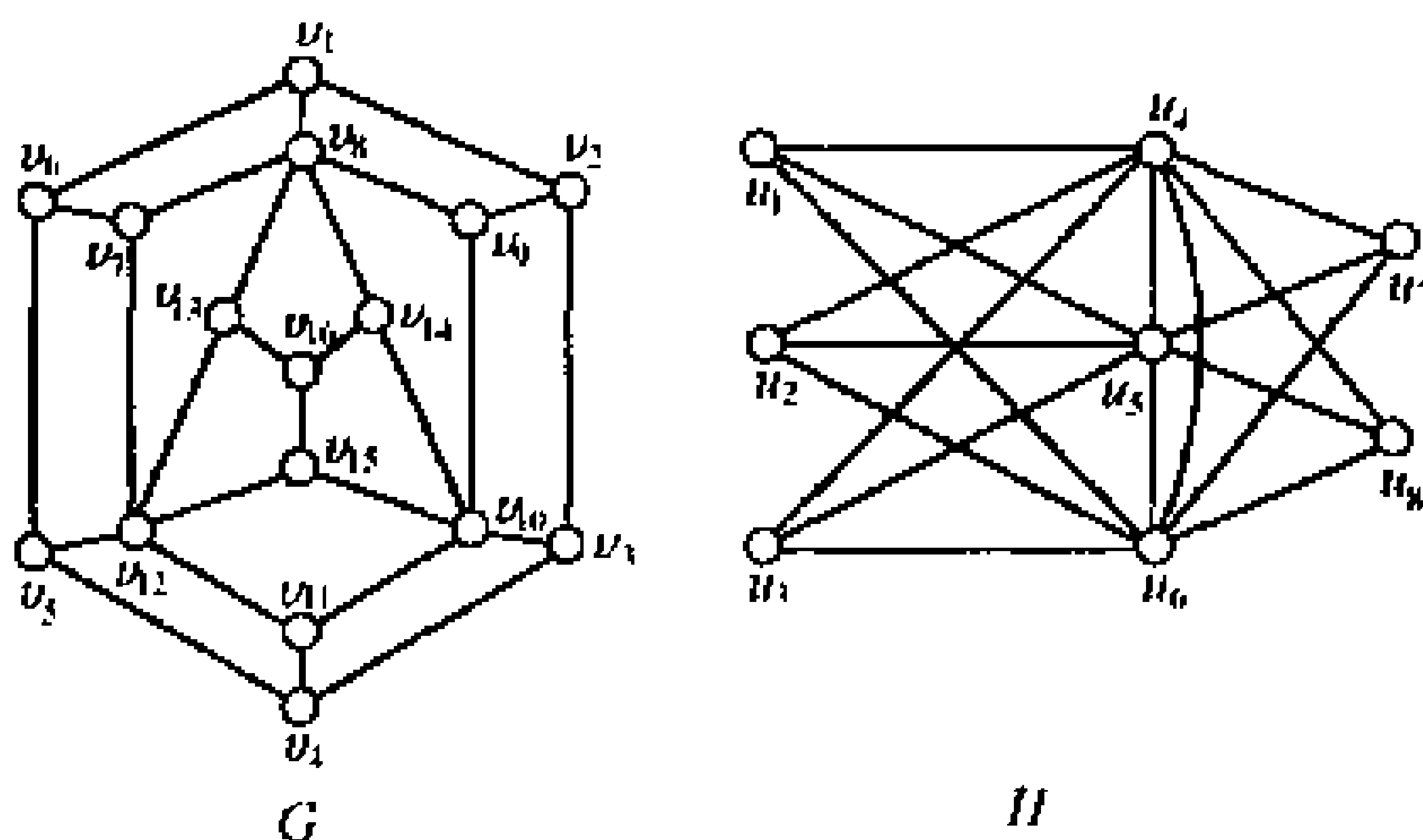
4.7 在平面上任取 $n>2$ 个点，把每个点用线段与其余各点相连接。能否一笔画出所有这些线段，使第一条线段的终点与第二条线段的起点相重，第二条线段的终点与第三条线段的起点相重，……，最后一条线段的终点与第一条线段的起点相重合？（线段与线段之间可以相交但不能重合）。

4.8 在下面赋权图 G 中找一个最优环游。



习题 4.8

4.9 证明下面两个图 G、H 无 Hamilton 回路。



习题 4.9

4.10 证明 Petersen 图不是 Hamilton 图。

4.11 找一个有 10 个顶点的简单图 G，使 G 的每一对不相邻顶点 u 与 v 均有

$$d(u)+d(v)\geqslant 9$$

而 G 不是 Hamilton 图。

4.12 证明：若 G 有 Hamilton 路，则对 $V(G)$ 的任意一个非空真子集 S 均有

$$w(G-s)\leqslant |S|+1$$

4.13 一只老鼠边吃边走通过一块 $3\times3\times3$ 立方体的奶酪，要通过所有(27 个)$1\times1\times1$ 子立方体。若它从某个角落开始，并且总是移动到下一个相邻而未被吃过的子立方体。它能否最后到达立方体的中心？

4.14 设 C 是连通图 G 中某一回路，若删去 C 中任意一条边就得 G 的一条最长路。证明回路 C 就是 G 的 Hamilton 回路。

4.15 置 $1,2,\cdots,n(n\geqslant3)$ 于一圆周上，使相邻两数之间的差最多为 2，证明恰有一解。

(提示：以 $1,2,\cdots,n$ 为顶点，当且仅当 $|i-j|\leqslant2$ 时连一条边 $ij(i\neq j)$，所得图 G 中，$d(1)=2$，只要证明 G 有惟一的 Hamilton 回路)

4.16 证明：若围圆桌至少坐着五个人，那么一定可以调整他们的座位，使得每个人的两侧都挨着两个新邻居。

4.17 设 G 是 p 点简单图($p\geqslant3$)。点 u_1 的度数最小，u_2 的度数次小。试证明：如果 $d(u_1)\geqslant2$，$d(u_2)\geqslant3$，其余顶点的度至少是 $p/2$，则 G 是 Hamilton 图。

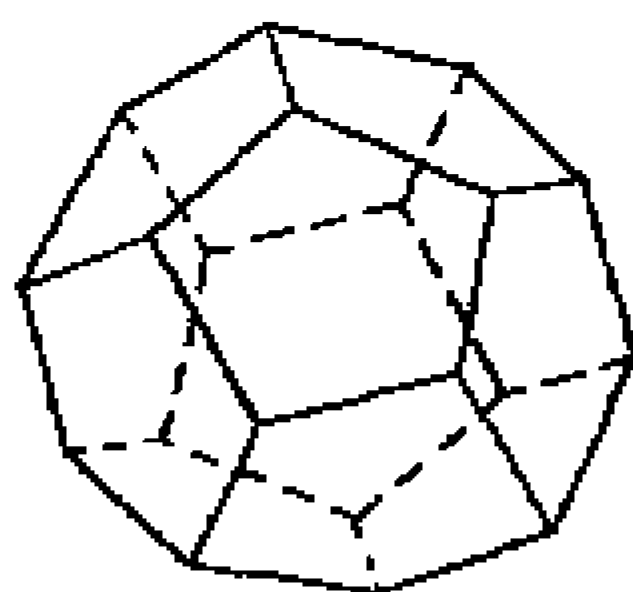
4.18 设 G 是 p 点简单图($p\geqslant3$)，对 G 中任两个不相邻的顶点 u、v，均有

$$d_G(u)+d_G(v)\geqslant p-1$$

证明 G 有 Hamilton 路。

4.19 设一个十二面体是纸做的，能否把这十二面体剪成两部分，要求每个面也分成二部分，但不通过十二面体的顶点？(提示：先把这十二面体投影到平面上，得十二面体平面

图。它有十二个区域，包括外部区域。再以这些区域作为顶点。两顶点相邻当且仅当这两个区域有公共线段，得有十二个顶点的简单图 G，考虑 G 是否有 Hamilton 回路。）

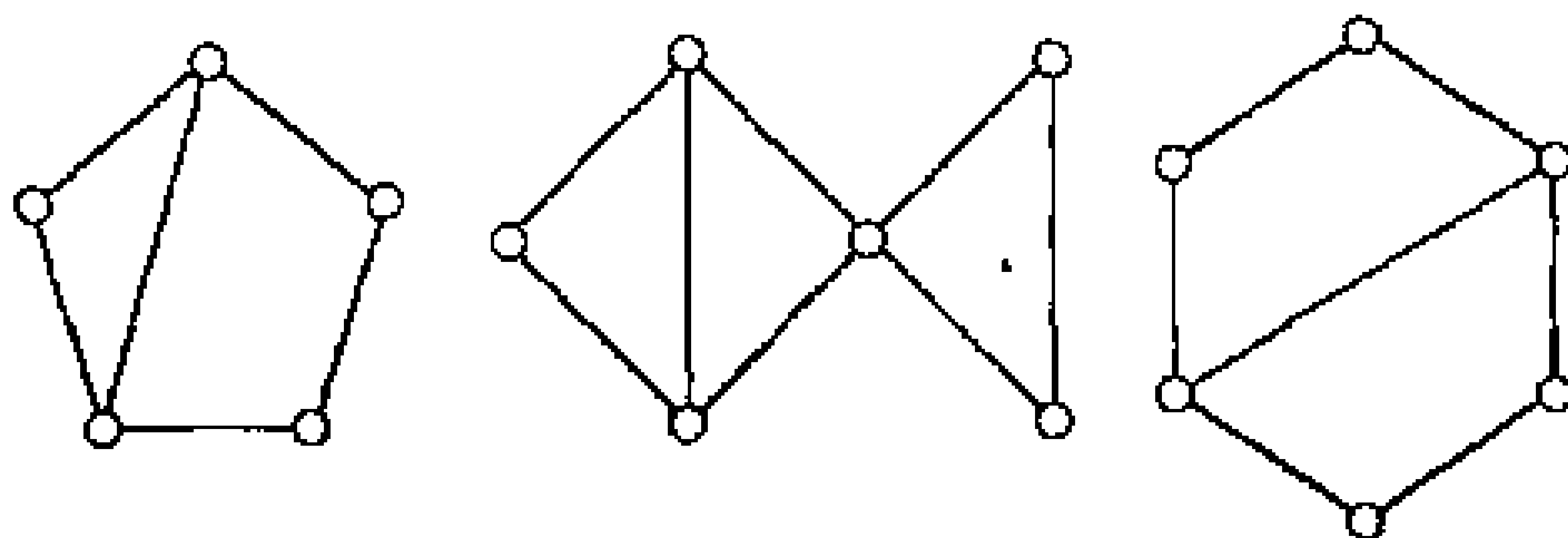


习题 4.19

4.20　亚瑟王在王宫中召见他的 $2n$ 名骑士，其中有些骑士之间互相有仇。已知每个骑士的仇人不超过 $n-1$。证明：摩尔林（亚瑟王的谋士）能够让这些骑士围桌而坐，使得每一个骑士不与他的仇人相邻。

4.21　设 G 是具有 $P \geqslant 3$ 个顶点的简单图，证明若对每一个 k，$1 \leqslant k < \frac{p-1}{2}$，度数小于或等于 k 的顶点数小于 k；且若对奇数的 p，度数小于或等于 $(p-1)/2$ 的顶点数小于或等于 $(p-1)/2$，则 G 是 Hamilton 图。

4.22　求下列这些图的闭包。



习题 4.22

5 图的匹配与独立集

5.1 二分图

在4.3节的例1中，由展览室平面图所得到的图 G(图4.16所示)具有这样一个特点：可以把 G 的顶点集划分为两部分 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{18}\}$、$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_{16}\}$，使得 G 中的每一条边的两个端点分别在 X 和 Y 中，我们称这种类型的图为二分图。

定义 5.1.1 如果 $V(G)$ 可以划分为两部分 X 和 Y，使得图 G 中每条边的两个端点一个在 X 中，而另一个在 Y 中，则称 G 是二分图，X 和 Y 称为 G 的二分划，记为 $G=(X,Y;E)$。

例 1 如图 5.1 所示的两个图是二分图。

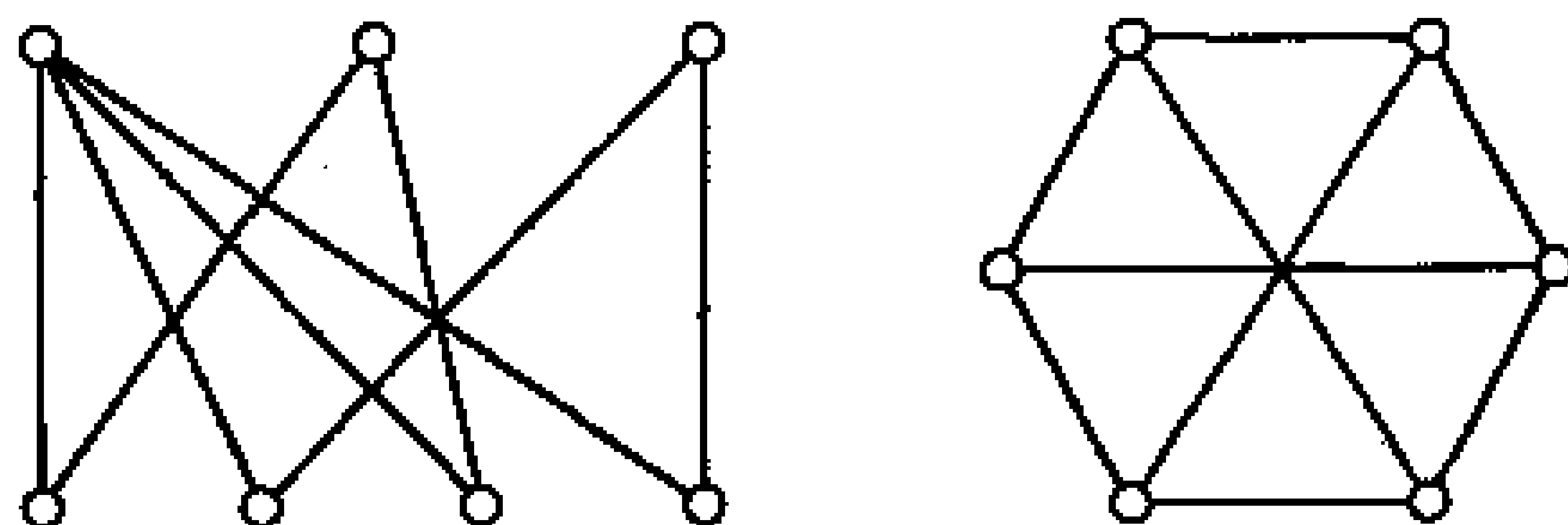


图 5.1

从定义可见：二分图 $G=(X,Y;E)$ 的两个点导出子图 $G[X]$ 与 $G[Y]$ 是空图。1.5 节中所介绍的完全二部图是二分图，在此称为完全二分图。

在日常生活中，碰到类似二分图的例子很多。

例 2 **人员分配问题**。某公司分配 n 个工人做 m 件工作，就可以用一个二分图来表示。代表人的一组顶点用 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示，代表工作的一组用顶点 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 表示。$x_i \in X$ 与 $y_j \in Y$ 相邻当且仅当工人 x_i 能做工作 y_j，所得图是一个二分图。

例 3 **公用设施问题**。代表住户的顶点作为一组，代表公共设施（如水厂、电厂、煤气公司、电话公司等）的顶点又是一组，各住户与各公共设施之间服务隶属关系可以描述成一个图，这样所得图也是二分图，如图 5.2 所示。

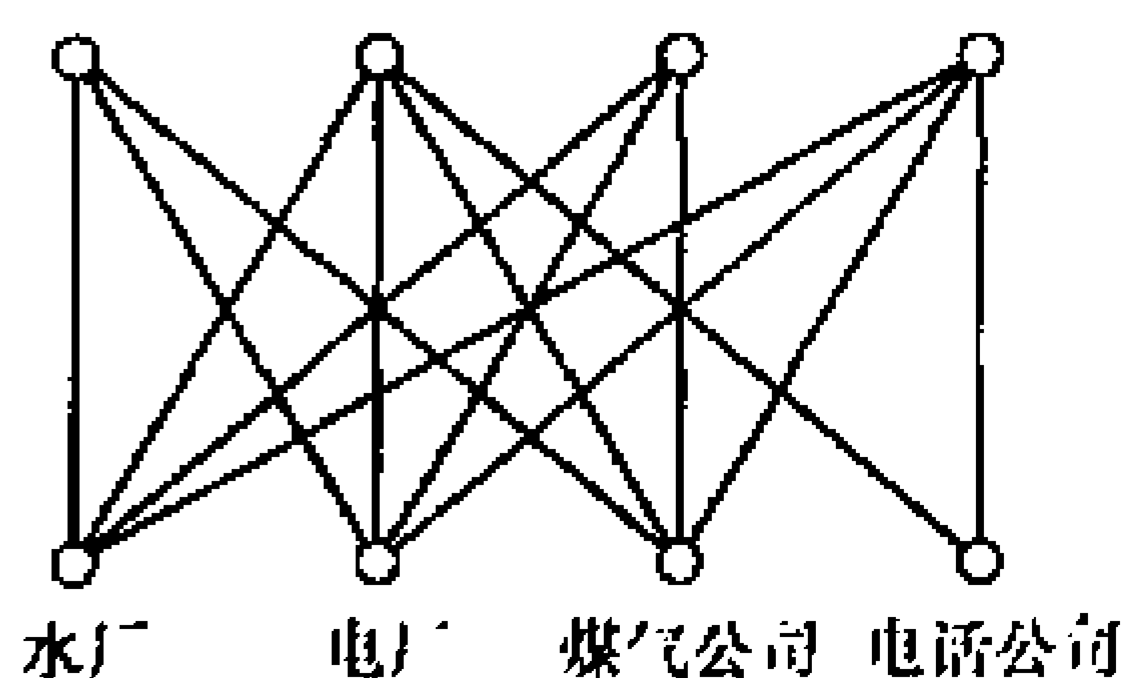


图 5.2

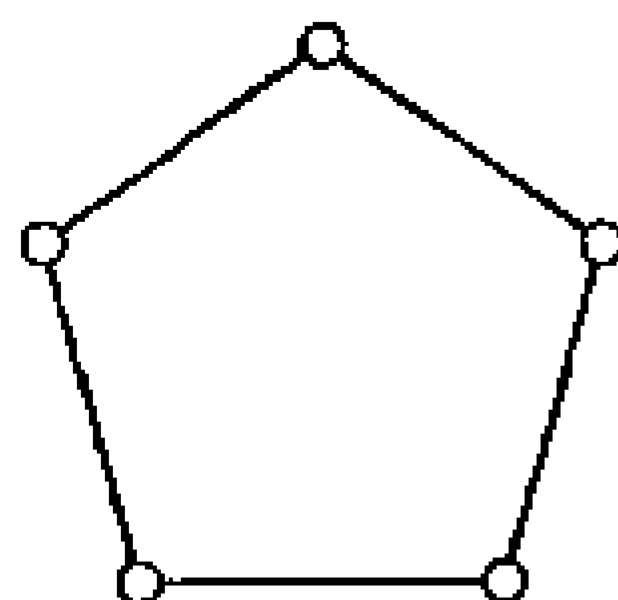


图 5.3

要注意的是并不是每一个图都是二分图。如图 5.3 所示的图 G，其顶点集合 $V(G)$ 不可能划分为两部分，使每一部分的导出子图均是空图。下面的定理解决了判别一个图是否为二分图的问题。

定理 5.1.1 非平凡图 G 是二分图当且仅当 G 中不含有长为奇数的回路。

证明 略（见第二章定理 2.1.4）

对于二分图来说，有一些显而易见的性质，例如二分图 $G = (X, Y; E)$，当 $|X| \neq |Y|$ 时，G 不是 Hamilton 图；如果二分图 $G = (X, Y; E)$ 是 k 正则的（$k \geq 1$），则 $|X| = |Y|$。其证明留给读者。

一个简单二分图 $G = (X, Y; E)$ 与一个阶数比邻接矩阵小的 (0,1) 矩阵一一对应。（例子见第一章第六节）

5.2 对 集

我们知道，上一节给出的人员分配问题所对应的图是二分图。若现有 n 个工人，有 n 项工作，试问能否给每一个工人分配一项他能胜任的工作，并使得每项工作都有人做。如果能作这样的分配，那怎样进行分配？图论中的对集就是为了解决这类问题而产生的。

设有一个满足要求的分配方案：x_k 做 y_{i_k} 这项工作（$k = 1,2,\cdots,n$）。当然 $k \neq j$ 时，$y_{i_k} \neq y_{i_j}$。那么在分配图中，以 x_k 和 y_{i_k} 为端点的这 n 条边 $\{x_k y_{i_k} | k = 1,2,\cdots,n\}$ 中的任两条边不相邻。图 5.4 是一个 $n = 5$ 的例子，粗边表示这类边。反之，如果在这个人员分配图中存在 n 条具有如此性质的边，就有一个满足要求的分配方案。

所以人员分配问题就归结为图中这样的一个问题：能否从人员分配图中找出 n 条边，它们中的任两条边不相邻。其实还有另外一些实际问题最后也将归结为在图中找一些互不相邻的边的问题。因此具有此性质的边子集在应用中有着特殊的作用，而且也具有丰富的理论意义。在这一节及下一节我们将讨论这类边子集。

定义 5.2.1 设 $G = (V,E)$ 是一个无环图，$M = \{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是 G 的一个边子集，如果 M 中任意两条边互不相邻，则称 M 为图 G 的一个**对集**。而 M 中一条边的两个端点称为在 M 下是**配对的**；如果顶点 v 与 M 中的某条边关联，就称 v 是 M **饱和的**，否则就称 v 是 M **非饱和的**。

例如，图 5.4 中的 5 条粗边组成的集合 $M = \{x_1y_2, x_2y_5, x_3y_1, x_4y_4, x_5y_3\}$ 是该图的一个对集。图 5.5 中，$M = \{e_1, e_4\}$ 是 G 的一个对集。这里 v_1 与 v_2，v_3 与 v_5 是在 M 下配对的；而 v_4 和 v_6 是 G 中两个 M 非饱和点。$M' = \{e_1, e_3, e_7\}$ 也是 G 的一个对集。与

M 不同的是 G 中不存在 M' 非饱和点。

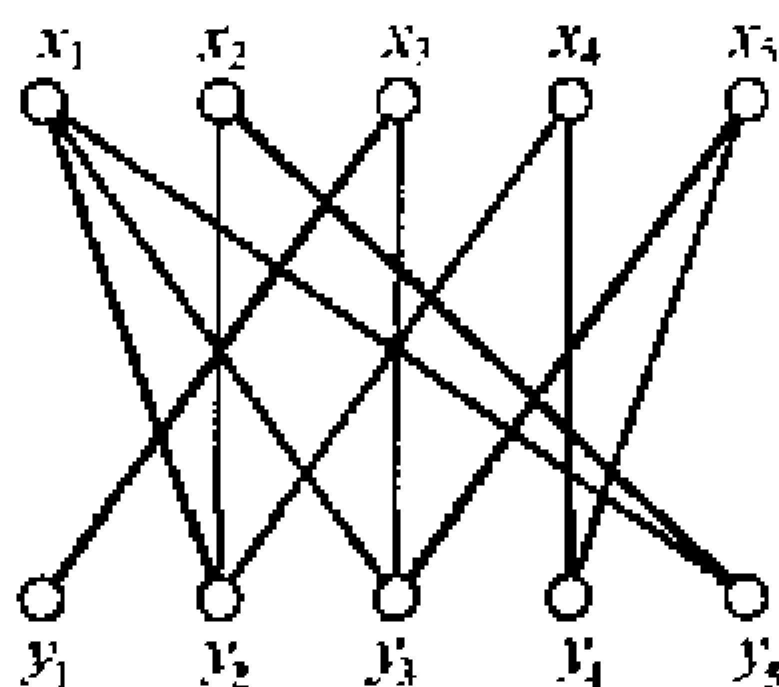


图 5.4

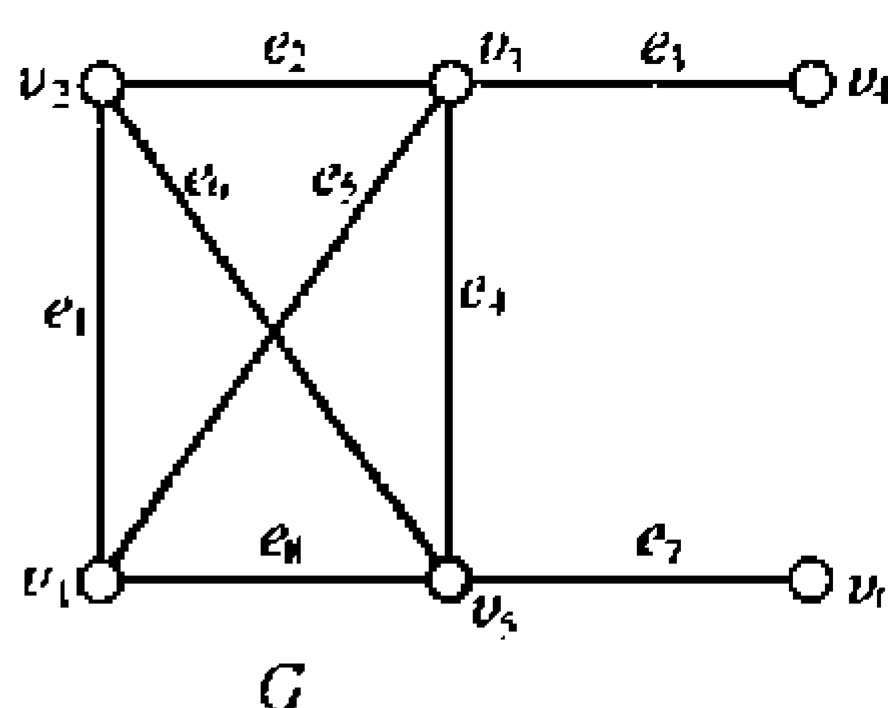


图 5.5

定义 5.2.2 如果图 G 的一个对集 M 饱和 G 中每一个顶点，则称 M 为 G 的**完美对集**。

按定义，图 5.5 中的 $M' = \{e_1, e_3, e_7\}$ 是 G 的一个完美对集，而 M 不是 G 的完美对集。要注意的是并不是每一个图都有完美对集。一个明显的必要条件就是 G 的点数 $p(G)$ 为偶数。而二分图 $G = (X, Y; E)$ 有完美对集的一个必要条件是 $|X| = |Y|$。

定义 5.2.3 G 的一个对集 M 称为是**最大对集**，如果对 G 中一切对集 M' 均有

$$|M'| \leqslant |M|$$

明显地，如果图 G 有完美对集，则 G 的每一个完美对集必定是最大对集。因此我们可以通过寻找最大对集而来讨论其中的完美对集。

定义 5.2.4 设 M 是 G 的一个对集，P 是 G 中一条路，如果 P 中的边在 M 与 $E(G) - M$ 中交替出现，就称 P 为一条 **M 交错路**。其起点与终点是 M 非饱和的 M 交错路称为 **M 可扩路**。

例如，图 5.5 中，$M = \{e_1, e_4\}$ 是 G 的一个对集，$P = v_4v_3v_5v_2v_1$ 是一条 M 交错路；而 $P' = v_4v_3v_5v_6$ 是一条 M 可扩路。容易看出，在一条 M 可扩路中，第一条边与最后一条边都不是 M 中的边，因而可扩路中属于 M 的边数比不在 M 中的边数少一条。

为什么把起点与终点是非饱和点的 M 交错路称为 M 可扩路呢?这是因为一旦在 G 中找到一条这样的 M 可扩路 P,就可以对现有的对集 M 进行调整而得另一个比 M 多一条边的对集 M'。调整的方法是这样的:把可扩路 P 上原来在对集 M 上的边从对集 M 中划去,而把 P 上原来不在 M 中的边加到 M 中去,得到 G 的一个边子集

$$M_1 = (M - E(P)) \cup (E(P) - M) = M\Delta E(P)$$

(注:集合 $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ 称为集合 A 与 B 的对称差)由于 M 可扩路 P 的起点与终点是 M 非饱和点,用上面方法调整后所得到的边子集 M_1 仍是 G 的一个对集。显然 $|M_1| = |M| + 1$,如图 5.5 中,$P = v_4v_3v_5v_6$ 是对集 $M = \{e_1, e_4\}$ 的一条可扩路,取 M 与 $E(P)$ 的对称差 $M_1 = M\Delta E(P) = \{e_1, e_3, e_7\}$,$M_1$ 是 G 的另一个对集,比原对集 M 多一条边。

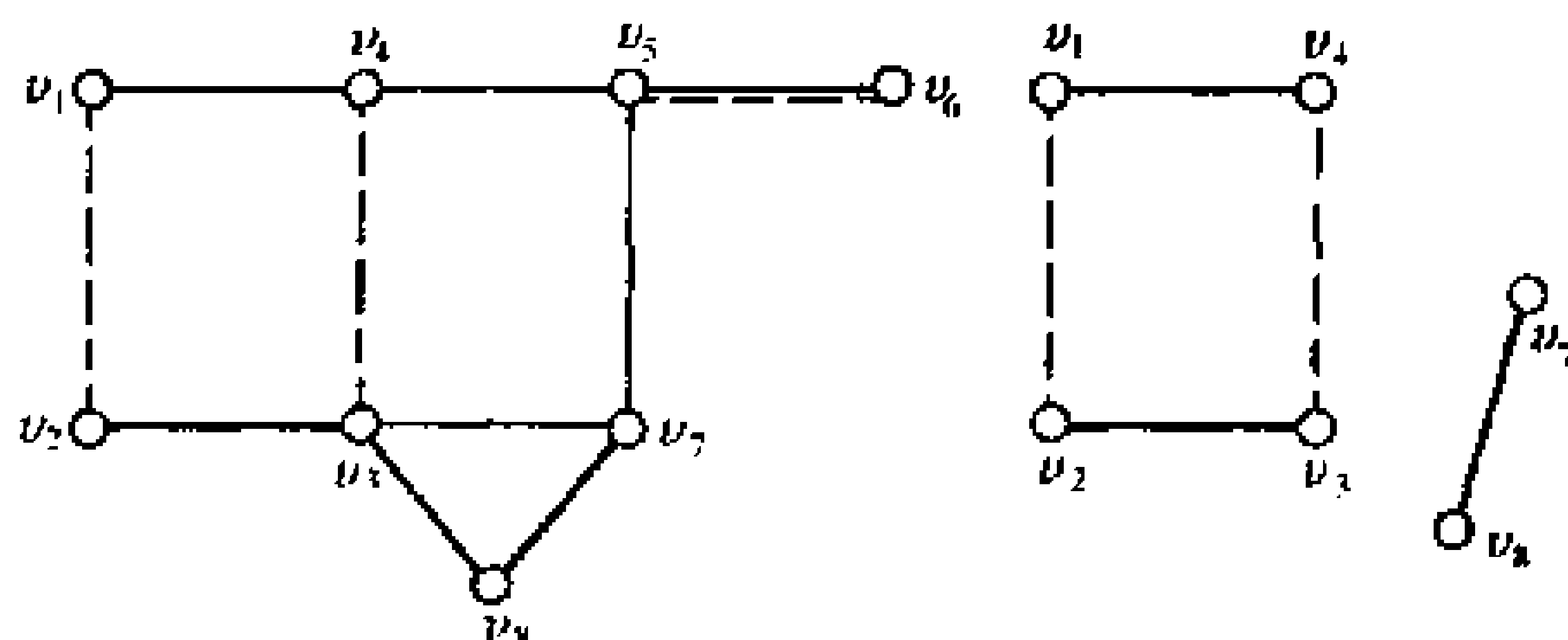
现在再查看 G 中是否还存在 M_1 可扩路,如果存在,可以对 M_1 继续调整(图 5.5 中,M_1 已是完美对集,故不能再作此调整)。继续这一过程,最后一定能得到 G 的一个对集 M',使 G 中不再存在 M' 可扩路,即对 M' 不能用此方法进行调整来得到一个更大的对集,那么 M' 是否为 G 的最大对集。Berge 在 1957 年证明了这样的对集就是 G 的一个最大对集。

定理 5.2.1　G 的一个对集 M 是最大对集当且仅当 G 中不存在 M 可扩路。

证明　必要性　设 M 是最大对集,则 G 中必不存在 M 可扩路。否则,若 P 是 G 的一条 M 可扩路,则利用 M 和 $E(P)$ 作对称差得 G 的另一个对集 $M_1 = M\Delta E(P)$,并且 $|M_1| = |M| + 1$,这与 M 是 G 的最大对集相矛盾。

充分性　设 G 中不存在 M 可扩路,我们要证明 M 就是 G 的一个最大对集。反证法,假设 M 不是最大对集,令 M' 的 G 的最大对集,则 $|M| < |M'|$。置 $H = G[M\Delta M']$,由于 G 中的每一个顶

点至多与 M 中的一条边以及与M' 中的一条边关联，所以 H 的每个顶点的度不是 1 就是 2。因此 H 的每一个连通分支或是其边在 M 和M' 中交替出现的偶回路，或是其边在 M 和M' 中交替出现的路(图 5.6 给出了其中的一个事例)。由 $|M'|>|M|$ 可知，H 中 M' 的边数多于M 的边数。而 H 的每个回路中，M 与M' 的边数相同，所以在 H 中必存在一个连通分支是一条路P，且 P 中M' 的边数比 M 的边数多。因此 P 的第一条边与最后一条边都在M' 中，由此推得 P 的起点与终点是M 非饱和点。于是 P 就构以成了G 的一条 M 可扩路。这与 G 无M 可扩路的假设相矛盾。也即证明了 M 是 G 的一个最大对集。　　证毕。



具有 M(粗边)和 M'(断续边)的图 G　　$G[M\Delta M']$

图 5.6

由该定理的证明及结论可知，找一个图的最大对集的关键就是设法寻找可扩路。如果不存在所给对集的可扩路，该对集就是最大对集。

一个图有完美对集的一个充分必要条件是由 Tutte 在 1947 年获得的。

图的连通分支根据它有奇数个点或有偶数个点而分别称为奇分支和偶分支。我们用 $w_0(G)$ 表示图 G 的奇分支个数。

定理 5.2.2　图 G 有完美对集的充分必要条件是对 $V(G)$ 的任意真子集 S，均有

$$w_0(G-S) \leqslant |S| \tag{1}$$

证明 我们只需要对简单图证明该定理即可。

必要性 设 M 是 G 的一个完美对集，S 是 $V(G)$ 的一个真子集，并设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 $G-S$ 的奇分支。因为 G_i 是奇分支，而 M 是 G 的完美对集，所以 G_i 的某一顶点 u_i 一定在 M 下与 S 中的一个顶点 $v_i (i=1,2,\cdots,n)$ 配对（见图 5.7 所示），则由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq S$，有

$$w_0(G-S) = n = |\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}| \leqslant |S|$$

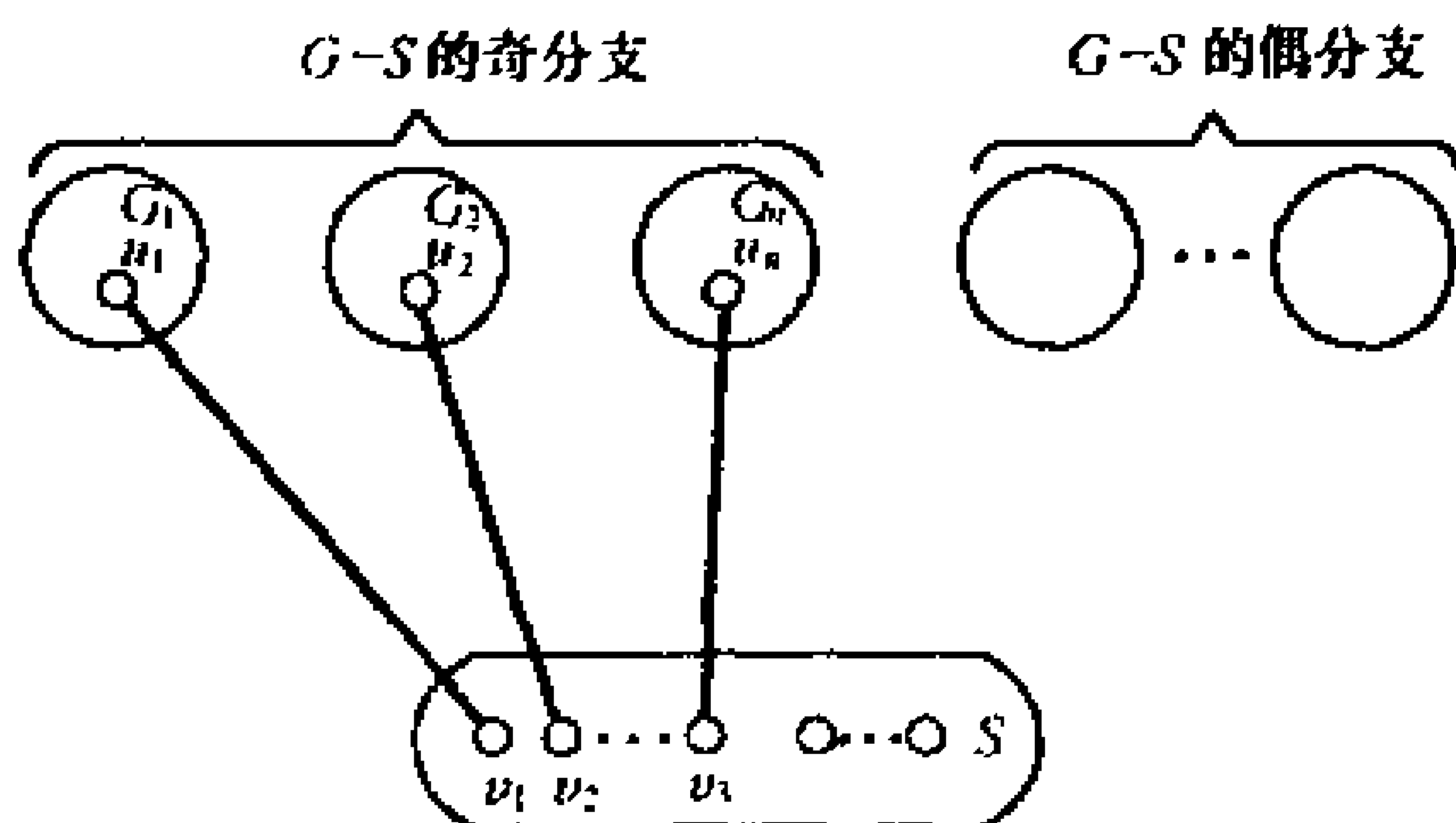


图 5.7

充分性 反证法 假设 G 满足式(1)但不含完美对集。令 G 是具有这种性质而边数最多的一个图。

在式(1)中取 $S=\varnothing$，则由 $w_0(G)=0$ 知，$p(G)$ 是偶数。

以 U 表示 G 中度数为 $p(G)-1$ 的点的集合，显然 $U \neq V(G)$，我们将证明：$G-U$ 是不相交的完全图的并图。

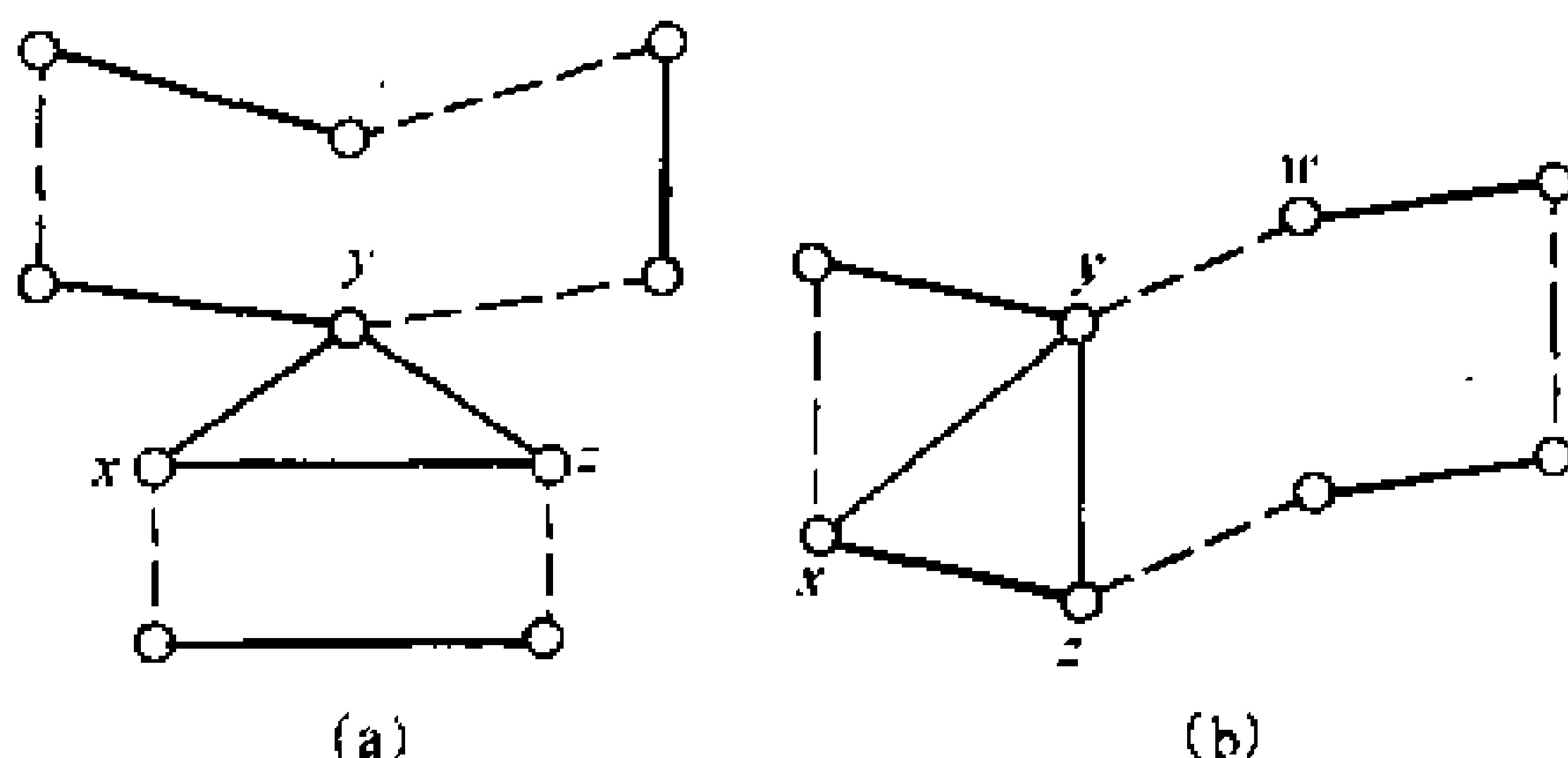
事实上，若不然，$G-U$ 的某一分支不是完全图，则该分支中存在点 x、y 和 z，使得 $xy \in E(G)$，$yz \in E(G)$ 但 $xz \overline{\in} E(G)$（定理 2.3.6），因 $y \overline{\in} U$，在 $G-U$ 中存在点 w，使 $yw \overline{\in} E(G)$。

由于 G 是不含完美对集的极大图，所以 $G+xz$ 和 $G+wy$ 都有完美对集，设分别为 M_1 和 M_2。用 H 表示由 $M_1 \Delta M_2$ 导出的 G

$+\{xz, yw\}$ 的子图,因为 H 的每个点的度为 2,所以 H 是由一些不相交的回路组成的子图。进一步,由于沿着这些回路的边是在 M_1 与 M_2 中交替出现的,所以每个 H 中的回路长为偶数。下分两种情况讨论:

(1) xz 和 yw 属于 H 的不同分支中

设 yw 在 H 的回路 C 中(见图 5.8(a) 所示),则 M_1 在 C 中的边连同 M_2 不在 C 中的边一起组成 G 的一个完美对集,这和 G 的取法矛盾。



(M_1 粗边,M_2 继续边)

图 5.8

(2) xz 和 yw 属于 H 的同一分支 C 中

根据 x 和 z 的对称性,可以假设 x、y、w、z 依次出现在 C 中(见图 5.8(b) 所示)。于是 M_1 在 C 的 $yw\cdots z$ 这一节中的边连同 yz 以及 M_2 不在 C 的 $yw\cdots z$ 这一节中的边一起组成 G 的一个完美对集,再次与 G 的取法矛盾。

因此不论情形(1)或(2)都导致矛盾,由此可知 $G-U$ 确是由不相交的完全图组成。

现在根据(1)式,有

$$w_0(G-U) \leqslant |U|$$

因此 $G-U$ 的奇分支个数最多是 $|U|$ 个,但这样一来,G 显然有

一个完美对集：$G-U$ 的各个奇分支中的一个顶点和 U 的一个顶点配对。U 中余下的顶点数必为偶数，可以两两配对。$G-U$ 的各分支中余下的顶点也可以相应的两两配对。如图 5.9 所示。

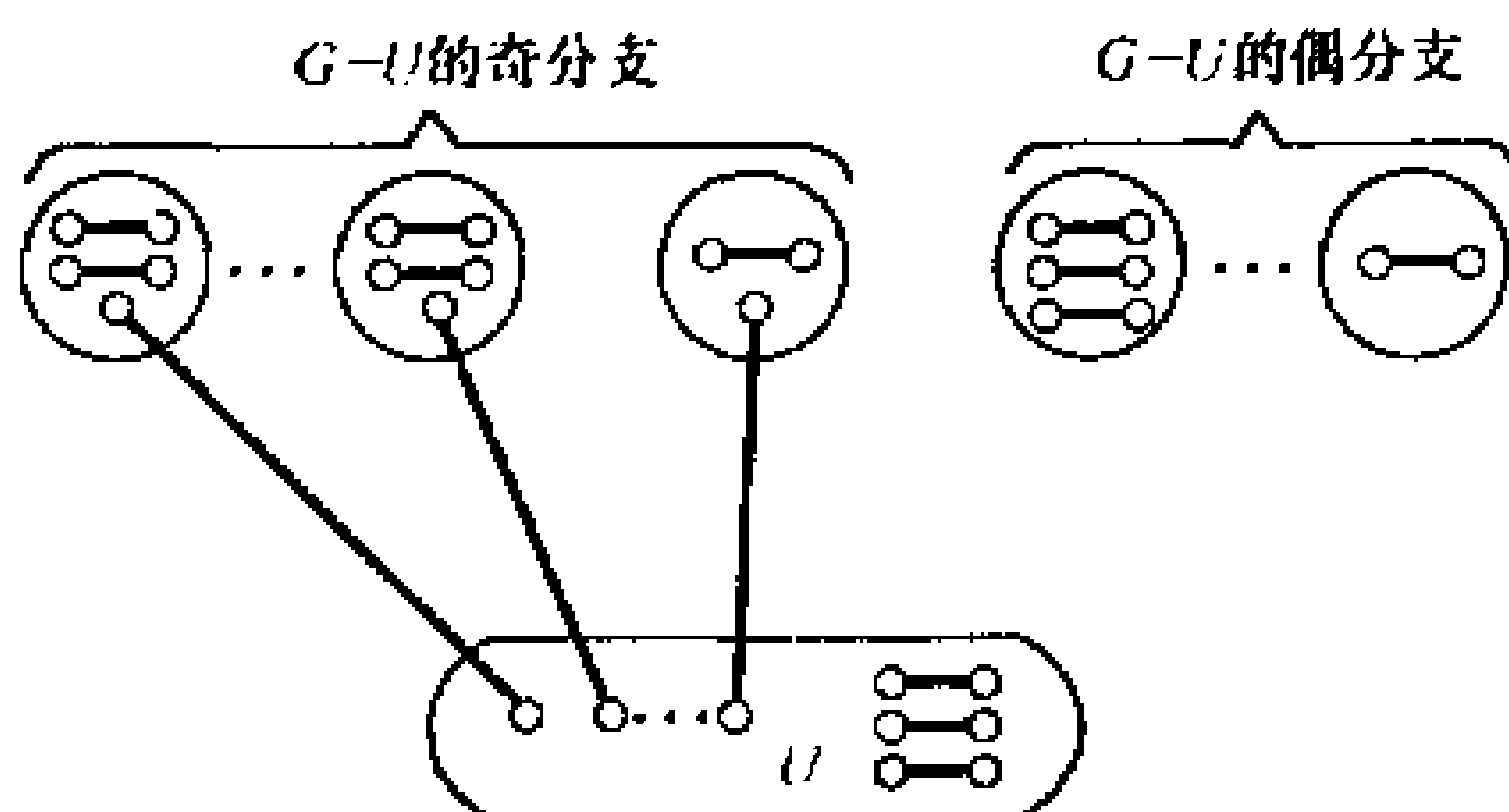


图 5.9

由于假设 G 是没有完美对集的，因而得到了希望出现的矛盾。于是 G 确有完美对集。　　　　　　　　　　　　　　　　证毕。

应用 Tutte 定理可以证明：

推论 5.2.3　设 G 是有偶数个点的 k 正则连通图，若对 $V(G)$ 的任一非空真子集 S，

$$|[S,\overline{S}]| \geq k-1$$

则 G 有完美对集。

证明　设 S 是 V 的任一非空真子集，G_1、G_2、$\cdots$，G_n 是 $G-S$ 的奇分支。对每个 G_i，由假设

$$|[V(G_i),\overline{V(G_i)}]| \geq k-1$$

又 G 是 k 正则图，故

$$|[V(G_i),\overline{V(G_i)}]| = \sum_{u\in V(G_i)} d_G(u) - \sum_{u\in V(G_i)} d_{G_i}(u)$$
$$= kp(G_i) - 2q(G_i)$$

由于 $p(G_i)$ 是奇数，所以 $|[V(G_i),\overline{V(G_i)}]|$ 与 k 有相同的奇偶性。因此

$$|[V(G_i),\overline{V(G_i)}]|\geqslant k$$

于是

$$w_0(G-S)=n\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}|[V(G_i),\overline{V(G_i)}]|$$
$$=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}|[S,V(G_i)]|$$
$$\leqslant\frac{1}{k}|[S,\overline{S}]|\leqslant\frac{1}{k}(k|S|)=|S|$$

从而由 Tutte 定理，G 有完美对集。 证毕。

例(1951 ~ 1964 年奥林匹克数学竞赛题) 某工厂生产由六种不同颜色的纱织成的双色布，由这个工厂所生产的双色布中，每一种颜色至少和其他三种颜色搭配。证明可以挑选出三种不同的双色布，它们含有所有的六种颜色。

证明 首先建立图 $G=(V,E)$，六种颜色与图的 6 个顶点相对应，连接一对顶点之间的边表示该工厂生产出一种由这两种颜色搭配而成的双色布，这样就得到一个 6 点简单图。由题意 G 中每个顶点的度至少是 3，每条边对应一种已生产的双色布。只要证明所构成的图 G 含有一个完美对集。

设 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，不妨设 $v_1v_2\in E(G)$，由于 $d_G(v_3)\geqslant 3$，存在一个不同于 v_1、v_2 的顶点 $v_i(4\leqslant i\leqslant 6)$。使 $v_3v_i\in E(G)$，不妨设 $i=4$，即 $v_3v_4\in E(G)$。

如果 $v_5v_6\in E(G)$，则 $\{v_1v_2、v_3v_4、v_5v_6\}$ 就是 G 的一个完美对集。

如果 $v_5v_6\overline{\in} E(G)$，由于 $d_G(v_5)\geqslant 3$，v_1、v_2、v_3、v_4 中至少有 3 个顶点与 v_5 相邻，即 v_5 与 v_1v_2、v_3v_4 中的每一条边的某 1 个端点相邻，不妨设 $v_1v_5\in E(G)$ 和 $v_3v_5\in E(G)$。

对于点 v_6，同样与 $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 中的至少 3 个点相邻，即在 v_2 和 v_4 中至少有 1 个点与 v_6 相邻。如果 $v_2v_6\in E(G)$，则

$\{v_1v_5、v_3v_4、v_2v_6\}$是 G 的一个完美对集；如果 $v_4v_6 \in E(G)$，则 $\{v_1v_2、v_3v_5、v_4v_6\}$是 G 的一个完美对集。

综上所述，G 总存在完美对集，完美对集中的三条边所对应的三种双色布即为所求。

5.3　二分图的对集

在许多实际应用中，最终都将归结为求二分图 $G=(X,Y;E)$ 的完美对集或更一般地求饱和 X 中每个点的一个对集。存在这种对集的一个充分必要条件是由 Hall 在 1935 年给出的。

定义 5.3.1　对于图 G 的任一顶点子集 S，G 中 S 的邻集是与 S 中的顶点相邻的所有顶点全体，记为 $N_G(S)$。

例如，图 5.10 中，取 $S=\{v_1,v_4,v_1,v_5\}$ 则 $N_G(S)=\{v_2,v_4,v_5,v_6\}$。

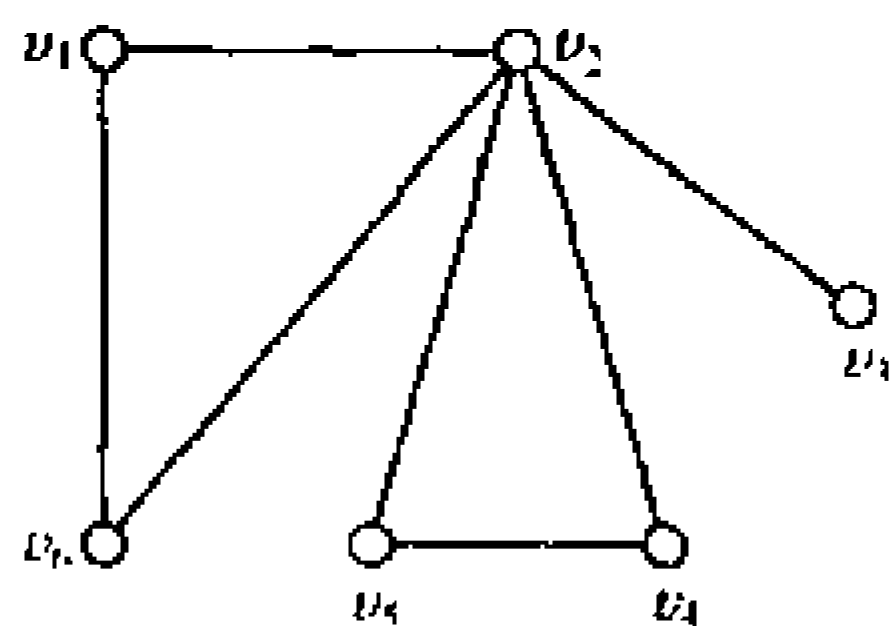


图 5.10

其实不难直接验证，对每个 $S \subseteq V(G)$，

$$N_G(S)=\bigcup_{u \in S} N_G(u)$$

定理 5.3.1　设 $G=(X,Y;E)$ 是二分图，则 G 有饱和 X 的每个顶点的对集的充分必要条件是对所有 $S \subseteq X$，均有

$$|N_G(S)| \geq |S| \tag{2}$$

证明　必要性　假设 M 是二分图 $G=(X,Y;E)$ 的一个饱和 X 中每个顶点的一个对集，$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ 是 X 的任意一个非空子集，则在 Y 中存在 r 个顶点 $y_{i_1},y_{i_2},\cdots,y_{i_r}$ 在 M 下分别与 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 配对。因而 $\{y_{i_1},y_{i_2},\cdots,y_{i_r}\} \subseteq N_G(S)$，故

$$|N_G(S)| \geq |S|$$

充分性　设 $G=(X,Y;E)$ 是满足式(2)的二分图，M 是 G

的一个最大对集。下证 M 饱和 X 中的每个顶点。

反之，如果 X 中存在 M 非饱和点，设 u 是其中的一个。置

$$A = \{x \mid x \in X - \{u\}, G \text{ 中存在从 } u \text{ 到 } x \text{ 的 } M \text{ 交错路}\}$$

因为 M 是最大对集，A 中的每个顶点都是 M 饱和的。为此，记 B 是 Y 中在 M 下与 A 配对的顶点集合。显然 $|A| = |B|$（见图 5.11 所示）。现令

$$S = A \cup \{u\}$$

易见 $B \subseteq N_G(S)$。下证 $N_G(S) = B$。

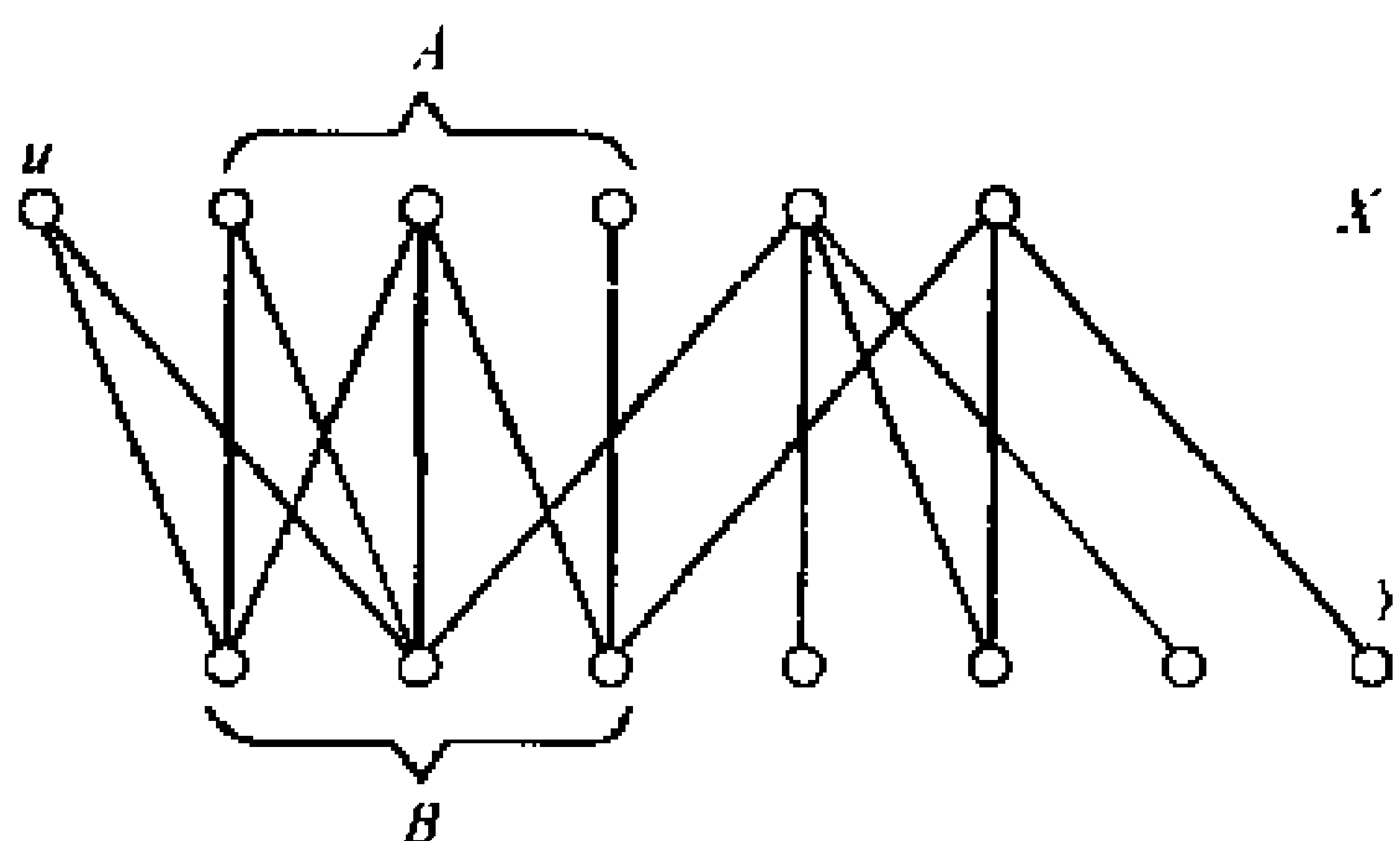


图 5.11

若存在 $y \in N_G(S) - B$，记 S 中与 y 相邻的这个点为 x，则 G 的边 xy 不在 M 中。现分两种情况来讨论：

第一种情况：y 是 M 非饱和点。由于 $x \in A \cup \{u\}$，如果 $x = u$，则 xy 就是 G 的一条 M 可扩路，与 M 是最大对集相矛盾。如果 $x \in A$，由 A 的定义，G 中存在一条从 u 到 x 的 M 交错路 P，在 P 中再加上边 xy 就得 G 的一条 M 可扩路，再次与 M 是最大对集相矛盾。

第二种情况：y 是 M 饱和点。设在 M 下与 y 配对的顶点为 x'，则 $x' \notin A$，否则 $y \in B$。在 G 中存在从 u 到 x 的 M 交错路 P，再加上 xyx'，就得到 G 的一条从 u 到 x' 的 M 交错路，故 $x' \in A$，矛盾。

以上两种情况均不能成立，也就说明了 $N_G(S) - B = \varnothing$，所

以 $N_G(S)=B$。易得

$$|N_G(S)|=|B|=|A|=|S|-1<|S|$$

这与 G 满足式(2)相矛盾，所以 M 饱和 X 中的每个顶点。证毕。

如果一个二分图 $G=(X,Y;E)$ 满足 $|X|=|Y|$，那么 G 的饱和 X 中每个顶点的对集就是 G 的一个完美对集。因而定理 5.3.1 也给出了二分图 $G=(X,Y;E)$ 有完美对集的一个充分必要条件。

推论 5.3.2 二分图 $G=(X,Y;E)$ 有完美对集的充分必要条件是 $|X|=|Y|$，并且对一切 $S\subseteq X$，均有

$$|N_G(S)|\geqslant|S|$$

定理 5.3.1 也可以表述为一个关地所谓集合族的相异代表系的结果：设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是集合 S 的 m 个子集，子集族 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 的一个相异代表系是指 S 的一个子集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，满足当 $1\leqslant i\leqslant m$ 时，有 $a_i\in A_i$，并且当 $i\neq j$ 时有 $a_i\neq a_j$，则子集族 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 有相异代表系当且仅当对于集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的所有子集 J，有

$$\left|\bigcup_{i\in J}A_i\right|\geqslant|J| \tag{3}$$

事实上，我们可以作一个二分图 $G=(X,Y;E)$，其中 $X=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$，$Y=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}=S$，$b_i$ 与 A_j 有边连接当且仅当 $b_i\in A_j$。这样 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 有相异代表系就等价于 G 中存在一个饱和 X 中每个顶点的对集。

而根据图 G 的结构，对于任意的 $J\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$，有

$$\left|\bigcup_{i\in J}A_i\right|\geqslant|J|$$

与 G 中对任意的 $X'\subseteq X$ 有

$$|N_G(X')|\geqslant|X'|$$

相等价，因而由定理 5.3.1，此结论成立。

推论 5.3.3 若 G 是 $k(k\geqslant 1)$ 正则二分图，则 G 有完美对集。

证明 设 $G=(X,Y;E)$ 是 k 正则二分图，则 $|X|=|Y|$（见习题5.1）。令 S 是 X 的任意一个子集，用 E_1 和 E_2 分别表示与 S 和 $N_G(S)$ 中的顶点相关联的边子集。根据 $N_G(S)$ 的定义，$E_1\subseteq E_2$，而由于 G 是 k 正则二分图，$|E_1|=k|S|$，$|E_2|=k|N_G(S)|$，因此

$$k|N_G(S)|=|E_2|\geqslant|E_1|=k|S|$$

于是

$$|N_G(S)|\geqslant|S|$$

根据定理5.3.1，G 有饱和 X 中每个顶点的对集，因而 G 有完美对集。 证毕。

推论5.3.4 设 $G=(X,Y;E)$ 是连通的二分图，则 G 的每一条边都含在一个完美对集中的充分必要条件是 $|X|=|Y|$，且对 X 的每一个非空真子集 S，均有

$$|N_G(S)|\geqslant|S|+1 \tag{4}$$

证明 必要性 设 G 的每一条边含在一个完美对集中，令 S 是 X 的任意一个非空真子集，因为 G 连通，故 $N_G(S)$ 中存在一个顶点 y 与 $X-S$ 中的一个顶点 x 相邻。对于边 xy，G 中存在一个对集 M 含边 xy，则 $M-\{xy\}$ 就是 $G-\{x,y\}$ 的完美对集，而 $S\subseteq X-\{x\}$，由定理5.3.1知

$$|N_{G-\{x,y\}}(S)|\geqslant|S|$$

明显地

$$N_G(S)=N_{G-\{x,y\}}(S)\cup\{y\}$$

所以

$$|N_G(S)|=|N_{G-\{x,y\}}(S)|+1\geqslant|S|+1$$

充分性 在 $G=(X,Y;E)$ 中任取一条边 xy，考虑二分图 $G-\{x,y\}$。在 $X-\{x\}$ 中任取一个点子集 S，则易见

$$N_G(S)\subseteq N_{G-\{x,y\}}(S)\cup\{y\}$$

结合式(4),有

$$|N_{G-\{x,y\}}(S)|+1 \geqslant |N_G(S)| \geqslant |S|+1$$

于是

$$|N_{G-\{x,y\}}(S)| \geqslant |S|$$

由定理 5.3.1 知,在二分图 $G-\{x,y\}$ 中存在饱和 $X-\{x\}$ 的每个顶点的对集 M'。但 $|X-\{x\}|=|Y-\{y\}|$,所以 M' 是 $G-\{x,y\}$ 的完美对集。因此 $M'\cup\{xy\}$ 是 G 的含边 xy 的完美对集。

证毕。

拉丁长方的扩充是推论 5.3.3 的一个具体应用:

设 A 是一个 $r\times n(r\leqslant n)$ 的矩阵,元素为 $1,2,\cdots,n$,如果每一个数 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 在 A 的每一行恰好出现一次,在每一列至多出现一次,这样的矩阵称为拉丁长方。例如

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&5&1&4&2\end{bmatrix}$$

就是一个 3×5 的拉丁长方。对于 A 我们可以再添上两行成为 5×5 的拉丁长方($n\times n$ 拉丁长方称为拉丁方)。

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&5&1&2&4\\4&1&5&3&2\\5&4&2&1&3\end{bmatrix}$$

一般地,如果给出一个 $r\times n(r\leqslant n)$ 的拉丁长方 A,能不能将这个拉丁长方再添上 $n-r$ 行,使它成为一个 $n\times n$ 拉丁方?

为此作一个二分图 $G=(X,Y;E)$,X 的顶点为 $1,2,\cdots,n$,Y 的顶点为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 分别表示 A 的 n 个列,如果数 i 在 A 第 j 列中没有出现,我们就在 i 与 y_j 之间连一条边。

因为 A 的每一列有 r 个元素,所以每个顶点 y_j 有 $n-r$ 条与

之关联的边；又每一行恰好有一个 i，所以 r 行共有 r 个数 i，因此数 i 只出现在 r 个列中，即每个顶点 i 也有 $n-r$ 条边与之关联（$1 \leqslant i, j \leqslant n$）。所以 G 是一个 $n-r$ 正则二分图。根据推论 5.3.3，图 G 有完美对集，记为 M。

利用对集 M，可以将 $r \times n$ 的拉丁长方 A 补上一行，使之成为 $(r+1) \times n$ 拉丁长方。方法是：如果边 iy_j 在对集 M 中出现（即数 i 不在 A 的第 j 列中出现），就将 i 添加到第 $r+1$ 行的第 j 列处（$1 \leqslant i \leqslant n$）。这样添加的结果显然还是一个拉丁长方。

如果 $r+1 < n$，再用上述方法继续这一过程，最后可得到一个 $n \times n$ 的拉丁方。

最后我们以国外的一个数学竞赛题目作为本节的结尾。

例 1 有 n 张纸牌，每张纸牌的正反两面都写上 $1,2,\cdots,n$ 的某一个数。证明：如果每个数字都恰好出现两次，那么这些纸牌一定可以这样摊开，使朝上的面中 $1,2,\cdots,n$ 都出现。

证明 作一个二分图 $G=(X,Y;E)$，其中 $X=\{1,2,\cdots,n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 表示这 n 张纸牌。i 与 y_j 之间连接的边数等于数 i 在纸牌 y_j 中出现的次数，这样得到的图 G 是一个 2 正则二分图。由推论 5.3.3，G 中存在一个完美对集，设为 $M=\{1y_{i_1},2y_{i_2},\cdots,ny_{i_n}\}$，则只要把纸牌 y_{i_1} 中的 1 朝上，y_{i_2} 中的 2 朝上，$\cdots$，y_{i_n} 中的 n 朝上，这样摊开的纸牌就能使朝上的面中 $1,2,\cdots,n$ 都出现。

5.4 二分图最大对集算法

人员分派问题是二分图中的对集在实际应用中的一个具体例子。如设某单位有 n 名工作人员 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 m 项工作 $y_1,y_2,\cdots,y_m$。能否给每个人恰好分派一项他能胜任的工作，且每项工作

至多分派给一名能胜任该项工作的人员？人员分派问题可以用图的语言叙述：令 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$。构造二分图如下：其顶点集的二分划为 X 和 Y，对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，$1 \leqslant j \leqslant m$，当且仅当人员 x_i 能胜作工作 y_j 时，G 中存在连接顶点 x_i 与 y_j 的边。于是人员分派问题就成为在 G 中求一个饱和 X 中每个顶点的对集的问题。上一节的定理 5.3.1 给出了这种对集存在的充分必要条件。然而在实际应用中，我们自然不会满足于此，而是进一步希望找到一种便于运用的算法，这种算法应该满足如下的要求：当问题存在解时，它至少求出一个解，当问题不存在解时，求 X 的一个子集 S，使 $|N_G(S)| < |S|$ 或最大对集。下面要介绍的就是一个满足要求的算法，通常称为匈牙利方法。

算法的基本思想是很简单的。从任意一个对集 M 开始，如果 M 饱和 X 中每个顶点，则 M 即为所求。否则令 u 是 X 中的一个 M 非饱和点，以 u 为起点作 G 的所有 M 交错路，如果存在 M 可扩路 P，则 $M_1 = M \Delta E(P)$ 就是比 M 大的一个对集，然后以 M_1 代替 M，并重复这过程。如果不存在 M 可扩路，记

$$Z = \{v \mid G \text{ 存在从 } u \text{ 到 } v \text{ 的 } M \text{ 交错路}\}$$

$$A = X \cap Z - \{u\}$$

B 为 Y 中在 M 下与 A 配对的顶点集。$S = A \cup \{u\}$，则如同定理 5.3.1 证明那样：

$$|N_G(S)| = |B| = |S| - 1 < |S|$$

即 G 不存在饱和 X 中每个顶点的对集。

匈牙利方法：(从 G 的任意一个对集 M 开始)

(1) 若 M 饱和 X 中的每个顶点，则停止。否则，设 u 是 X 中的一个 M 非饱和点。置 $S = \{u\}$，$B = \varnothing$。

(2) 若 $N_G(S) = B$，由于 $|S| = |B| + 1$，所以 $|N_G(S)| < |S|$，因而停止。根据定理 5.3.1，不存在饱和 X 的每个顶点的对集。否则，令 $y \in N_G(S) - B$。

(3) 若 y 是 M 饱和的，设 $yz \in M$，用 $S \cup \{z\}$ 代替 S，$B \cup \{y\}$ 代替 B，并转到第(2)步(仍有 $|S| = |B| + 1$)。否则，y 是 M 非饱和的，则 G 中存在从 u 到 y 的 M 可扩路，设为 P，用 $M \Delta E(P)$ 代替 M，并转到第(1)步。

该算法结束时所得到的结果或是一个饱和 X 中每个顶点的对集，或有一个子集 $S \subseteq X$，满足 $|N_G(S)| < |S|$，此时说明了 $G = (X, Y; E)$ 中没有一个对集能饱和 X 的每个点。若需要求出二分图 $G = (X, Y; E)$ 的最大对集，则应在第二种结果的基础上继续检查是否存在其他 M 非饱和点有 M 可扩路。为此下面给出求二分图最大对集的一个算法，仍从任意一个对集 M 开始。

(1) 置 $S = \varnothing$，$B = \varnothing$。

(2) 若 $X - S$ 中每个点是 M 饱和的，则停止。否则令 u 是 $X - S$ 中的一个 M 非饱和点，置 $S := S \cup \{u\}$。

(3) 若 $N_G(S) = B$，转第(5)步。否则令 $y \in N_G(S) - B$。

(4) 若 y 是 M 饱和点，设 $yz \in M$，用 $S \cup \{z\}$ 代替 S，$B \cup \{y\}$ 代替 B，转第(3)步。否则 y 是 M 非饱和顶点，令 P 是从 u 到 y 的 M 可扩路，并用 $M \Delta E(P)$ 代替 M 转第(1)步。

(5) 若 $X - S = \varnothing$，则停止。否则转第(2)步。

用这个算法最终得到的对集 M 就是二分图 $G = (X, Y; E)$ 的一个最大对集。

5.5 二部图的最大最小对集

给定一个完全二部网络 $G = (S, T, E, W)$，求 G 的一个最大最小对集，即求一个最小边权达到最大的最大基数对集。它是基于以下的朴素想法，即每次求 G 的最大基数对集时，都是在边权尽量大的边的子集上进行的，一旦最大基数对集被找到，它便是最大最小对集；否则扩大被搜集的边的子集。再继续找最大基数对集，

具体过程描述如下：

由空对集和一个适当大的边权的“阈值”W 开始，在一般步骤中基数为 k 的最大最小对集已经求出，然后我们在包含所有使 $w_{ij} \geqslant W$ 的边的子网络中求一条增长路，如果增长是可能的，则基数为 $k+1$ 的最大最小对集被求出，如果增长不可以，则阈值 W 减少到恰好能允许增长出现的值。

毫无疑问，所有不同的阈值的数目不得超过不同边权的数目，即 mn 个，其中 $|S| = m$，$|T| = n$。对每个阈值，增长计算量是 mn，于是，这个阈值程序计算量是 $O(m^2n^2)$。

实际上，算法还可以设计得更好，特别不应该放弃作为不构成增长的计算，而已经构造的交错树，因为阈值减少后，同样的交错树被简单地重新构造。在下面总结的算法中，T 中每个点 j 联系着一个数 π_j，这个数表明为了把点 j 加到交错树上阈值必须被减到这个水平。换句话说，π_j 是点 i 在树中的最大的 w_{ij} 点被充分的标号，但除非 $\pi_j \geqslant W$。在 T 中没有标号点 j 被检查，当再没有点可以选来检查时，W 减少到严格地小于 W 的最大 π_j，最终或增长路出现，或者交错树变成匈牙利树。

容易看出，初始对集最多增长 m 次，而每次增长的计算量为 $O(mn)$，所以，总的计算量为 $O(m^2n)$。

步骤 0 （开始）

给定完全二部网络 $G = (S, T, E, W)$。令 $M = \varnothing$，$W = -\infty$，对每个 $j \in T$，$\pi_j = -\infty$，这时没有点被标号。

步骤 1 （标号）

(1.0) 给 S 中每个非饱和点标号“$\varnothing$”。

(1.1) 如果不存在未检查的标号，转向步骤 3。如果存在未检查的标号，但每个未检查的标号是 T 中使 $\pi_j < W$ 的点 i 的标号，则令

$$W = \max\{\pi_j \mid \pi_j < W\}$$

(1.2) 找到一个未检查的标号点 i,使得或者 $i \in S$ 或者 $i \in T$ 且 $\pi_j \geqslant W$。如果 $i \in S$,转向步骤(1.3);如果 $i \in T$,转向步骤(1.4)。

(1.3) 检查点 $i(i \in S)$ 上的标号如下:对每条边 $ij \notin W$,如果 ①j 未标号,或者 ②j 标过号,但 $\pi_j < w_{ij}$,则给点 j 标号"i",并令 $\pi_j = w_{ij}$ 转回步骤(1.1)。

(1.4) 检查点 $i(i \in T)$ 的标号如下:如果点 i 非饱和,转向步骤 2;否则,辨认同 i 关联的惟一边 $ij \in E$,给 j 标号"i",转回步骤(1.1)。

步骤 2 (增长)

一个终止在点 i 的增长路被找到。路上点 i 的前面的点由从标号到标号的反向跟踪来辨认。通过把增长路上不在 M 中的边加到 M 中,去掉增长路上原来在 M 中的边来扩大 M。抹掉所有标号,对 T 中每一个点 j,令 $\pi_j = -\infty$,转回步骤(1.0)。

步骤 3 (匈牙利标号)

这时 G 中不存在关于 M 的增长路,M 是最大最小对集。算法终止。

二部图的最大最小对集在实际工作中有许多应用。

5.6 最优分派问题

本节讨论所谓第二类分派问题,即讨论如何安排,才能使创造的总价值最大或称总效率最高,寻找这种分派的问题称为最优分派问题。

考察一个具有二分类(X,Y)的赋权完全二部图 G,这里 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$,边 x_iy_i 有权 $w_{ij} = w(x_iy_i)$,表示工人 x_i 做工作 y_i 所创造的价值或工作效率。显然,最优分派问题等价于在 G 中寻找一个具有最大权的对集,称这种

对集为最优对集。以下的讨论假设 $m = n$。否则,若 $m \geqslant n$,则假设另有 $m - n$ 个工人 $x_{m+1}, \cdots, x_n$,它们做任一种工作所创作的价值为零;对 $m < n$ 可以类似地处理。

在实际工作中,常常会遇到这样的问题:第一,计划人员不仅希望创造的总价值最大,而且希望每一个人创造的价值尽可能平均,这一点对计划的顺利执行是很重要的;第二,如果每个工人做任一种工作所创造的价值都大于零,则最优对集一定是完美对集,即每一个工人都被分派做一种工作,否则最优对集不一定是完美对集,即可能不需要 n 个工人一样能创造出最大总价值。为了实现优化劳动组合的目的,就希望以最少的人去创造这个最大总价值。这两个问题的共同点都是要求对应的赋权二部图中的最优对集。不同点是:第一个问题还要求该最优对集中最大边权与最小边权之差尽可能小,称这个对集为最小极差最优对集;第二个问题还要求该对集中权大于零的边尽可能少,称这种对集为最小基数最优对集。

为了解决这些问题,我们先证明一个定理。有了这个定理,可以把赋权图上的问题转化为无权图上的问题。

若顶点集 $X \cup Y$ 上的实值函数 l 适合下述条件:对所有的 $x \in X, y \in Y$,均有

$$l(x) + l(y) \geqslant w(xy) \tag{5}$$

则称这个函数 l 为该二部图的一个可行点标号,实数 $l(v)$ 称为点 v 的标号。不管边的权是什么,总存在一个可行点标号。例如下述定义的函数 l 就是一个可行点标号。

$$\begin{cases} l(x) = \max\limits_{y \in Y} \{w(xy)\} & x \in E \\ l(y) = 0 & y \in Y \end{cases} \tag{6}$$

若 l 是可行点标号,则用 E_1 表示使(5)式中等式成立的那些边的集合,即

$$E_1 = \{xy \in E \mid l(x) + l(y) = w(xy)\}$$

具有边集 E_1 的 G 的生成子图称为对应于可行点标号 l 的相等子图，用 G_l 表示。

定理5.6.1 设 l 是 G 的可行点标号。若 G_l 包含完美对集，则

(a) G_l 中任一完美对集 M 均是 G 的最优对集。

(b) G 的任一最优对集 M^* 都包含在 G_l 中。

证明 (a) 设 M 是 G_l 中的任一完美对集。由于 G_l 是 G 的生成子图，所以 M 也是 G 的完美对集，于是

$$W(M) = \sum_{e \in M} w(e) = \sum_{v \in M} l(v) \tag{7}$$

这是因为每个 $e \in M$ 都属于这个相等子图，并且 M 的边的端点覆盖 V 的每个点恰好一次。另一方面，若 M' 是 G 的任一最优对集，则有

$$W(M') = \sum_{e \in M'} w(e) \leqslant \sum_{v \in E} l(v) \tag{8}$$

由(7)(8)式推出 $W(M) \geqslant W(M')$。因此，M 是 G 的最优对集。

(b) 设 M^* 是 G 的任一最优对集，M 是 G_l 中任一完美对集。由(a)得

$$W(M^*) = W(M) \tag{9}$$

设 $M* = E_1 \cup E_2, E_1 \subseteq E \setminus E_l, E_2 \subseteq E_1$。如果 M^* 不包含在 G_l 中，则 E_1 非空。于是由 E_1 的定义得：

$$W(M^*) = \sum_{e \in M} w(e) = \sum_{e \in E_1} w(e) + \sum_{e \in E_2} w(e) < \sum_{v \in V} l(v) \tag{10}$$

因 M 是完美对集，从而有(7)式成立。于是由(7)式和(10)式得 $W(M^*) < W(M)$，这与(9)式矛盾。 证毕。

定理 5.6.1 是求最优对集算法的基础。如果找到一个可行点标号 l，G_l 中含有完美对集 M，则 M 是 G 的最优对集，且 G 的所有最

优对集都包含在 G_l 中。因此，求各种最优对集只需在 G_l 中进行。

5.6.1 求最优对集的算法

求最优对集的算法是 Kuhn 和 Munkres 提出的。这里的处理方式基本上按照 Edmonds 的论述。

首先给出任一可行点标号 l（例如由(6)式给出的函数 l），然后决定 G_l，在 G_l 中任选一对集 M，并且用匈牙利方法求 G_l 的最大对集。若在 G_l 中找到一个完美对集，则由定理 5.6.1(a)，该对集就是最优的。否则匈牙利方法将终止于一个非完全对集 M' 和一棵既不包含 M' 增长路，又能在 G_l 中进一步生长的 M' 交错树 H。令 $S = X \cap V(H)$，$T = Y \cap V(H)$。若 H 的根 $u \in S$，则 $N_{G_l}(S) = T$。在这种情况下，把 l 修改为具有下述性质的另一可行点标号 $\hat{l}$：M' 和 H 都包含在 $G_{\hat{l}}$ 中，并且 H 能够在 $G_{\hat{l}}$ 中"生长"。每当必要时，连续不断地进行这种可行点标号的修改，直至一个完美对集在某个相等子图中找到为止。

Kuhn – Munkres 算法

步骤 0 任给一个可行点标号，决定 G_l，并且在 G_l 中选取任一对集 M。

步骤 1 从 M 出发，利用匈牙利方法求 G_l 的最大对集 M'。若 M' 是完美对集，则由定理 5.6.1(a) 可知 M' 是最优对集。在这种情形下，算法终止。否则，得到 $S \subseteq X$，$T \subseteq Y$，$N_{G_l}(S) = T$

步骤 2 计算

$$\alpha_l = \min_{x \in S, y \notin T} \{ l(x) + l(y) - w(xy) \},$$

且由

$$\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l & 若\ v \in S \\ l(v) + \alpha_l & 若\ v \in T \\ l(v) & 其它 \end{cases}$$

得新的可行点标号 $\hat{l}$。显然有 $\alpha_l > 0$ 且 $N_{G_{\hat{l}}}(S) \supset T$。$\hat{l}$ 代替 l，$G_{\hat{l}}$，

代替 G_l，M' 代替 M，返回步骤 1。

5.6.2 求最小基数最优对集的算法

设 M 是 G 的一个最优对集，$P = x_1y_1\cdots x_ky_k$ 是一条 M - 交错路，$x_1y_1 \in M$，$x_ky_k \in M$。如果

$$\sum_{e\in E(P)\setminus M} w(e) = \sum_{e\in E(P)\cap M} w(e)$$

则称 P 是一条 M - 可调整路，显然 $M' = M\Delta E(P)$ 也是 G 的最优对集，且 $|M'| = |M| - 1$。

定理 5.6.2 设 M 是 G 最优对集，则 M 是 G 的最小基数最优对集的充要条件是 G 中不存在 M - 可调整路。

证明 设 M 是 G 的最优对集。如果 G 中存在 M - 可调整路 P，则由定义，可得另一最优对集 M'，$|M'| = |M| - 1$，即 M 不是 G 的最小基数最优对集。

反之，若 M 不是 G 的最小基数最优对集，设 M' 是 G 的一个最小基数最优对集，则

$$|M'| < |M| \tag{11}$$

令 $H = G[M\Delta M']$ 显然，H 的每一点的度或者是 1 或者是 2。因此，H 的每一分支或者是一个偶圈，交替地出现 M 和 M' 的边；或者是一条 M(也是 M') - 交错路。因为 M 和 M' 都是最优对集，所以对 H 的任一分支 H_1，

$$\sum_{e\in E(H_1)\cap M} w(e) = \sum_{e\in E(H_1)\cap M'} w(e) \tag{12}$$

由(11)式得 H 的某一分支中包含的 M 的边比 M' 的边多。因此，该分支是一条开始和终止于 M 的边的路，由(12)式和 M - 可调整路的定义知，它是一条 M - 可调整路。 证毕。

从定理 5.6.2 可以看到，求最小基数最优对集的关键是判别 G_l 有没有 M - 可调整路，若有，求出这些 M - 可调整路。

定理 5.6.3 G_l 中存在 M - 可调整路的必要条件是 G_l 中存在权为 0 的边。

设 $P = x_1y_1x_2y_2\cdots y_ky_k$ 是G_l 中一条M 交错路，若 x_1y_1，$x_ky_k \in M$，则称 P 为(x_1, y_k) - 路。

定理 5.6.4 设 x_1, y_k 是M 饱和点，$x_1y_k \in E_1$，$w(x_1y_k) = 0$，则

(1) G_l 中存在M - 可调整(x_1, y_k) - 路的充要条件是 $G_l - \{x_1y_1, x_ky_k\}$中存在点 y_1 到 x_k 的M - 交错路。

(2) 若 G_l 中存在M - 可调整(x_1, y_k) - 路，则对 G_l 中任意M - 可调整路 P，$x_1y_k \notin E(P)$。

根据这两个定理、可以给出求 M - 可调整的如下算法。

步骤0 令 $G_0 = G_l[V(M)]$，即 G_0 是由 M 中边的端点导出的 G_l 的子图。

步骤1 检查 G_0 中是否有权为零的边。

1.1 若没有，由定理5.6.4得 G_l 中不存在M - 可调整路，计算结束。

1.2 否则，设 $x_1y_k \in E(G_0)$，$w(x_1y_k) = 0$，转步骤2。

步骤2 寻找 M - 可调整路。

设 $e_1 = x_1y_1 \in M$，$e_2 = x_ky_k \in M$，利用匈牙利方法在 $G_0 - \{e_1, e_2\}$ 中求以 y_1 为始点，x_k 为终点的M - 交错路。

2.1 若不存在，则以 $G_0 - \{x_1y_k\}$代替 G_0，返回步骤1。

2.2 若存在，设为 P，则 $P_1 = P \cup \{e_1, e_2\}$是一条 M 可调整路。计算结束。

利用该算法，或者得到 G_l 中不存在M - 可调整数，或者求出一条 M - 可调整数。

有了求可调整路的算法就不难给出求最小基数最佑对集的算法，这留给读者。

对于一般图的最大权对集算法不在这儿介绍，读者可参见有关书籍。

5.7 独立集和覆盖

由于本节的内容极易从简单图推广到一般的图，因此这一节所考虑的图均假设为简单图。首先引进点覆盖的概念。

定义 5.7.1 设 K 是图 G 的一个点子集，若 G 中的每一条边至少有一个端点在 K 中，则称 K 是 G 的一个**点覆盖**。若 G 中不存在满足 $|K'|<|K|$ 的点覆盖 K'，则称 K 是 G 的一个**最小点覆盖**。G 的最小点覆盖集的点数称为 G 的**点覆盖数**，记为 $\alpha_0(G)$。

例如图 5.12 中，点集 $\{v_0,v_1,v_3,v_4\}$ 是 G 的一个点覆盖，而且是一个最小点覆盖，因此该图的点覆盖数为 4。

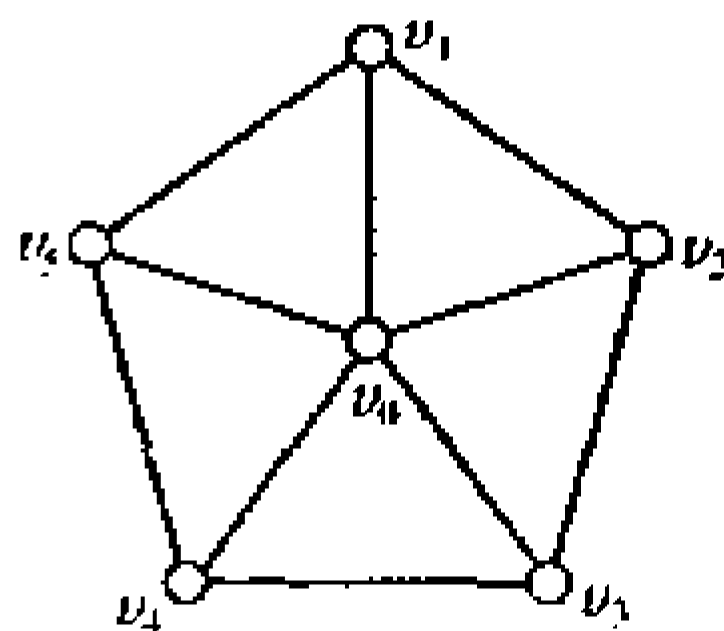


图 5.12

一个图的点覆盖数与最大对集的边数密切相关。记 G 的最大对集的边数为 $\beta_1(G)$。令 M 是 G 的一个最大对集，K 是 G 的一个最小点覆盖，则 K 中至少包含 M 中每条边的一个端点，所以总有 $|M|\leqslant|K|$，即

$$\beta_1(G)\leqslant\alpha_0(G) \tag{13}$$

一般说来，上式中的等式未必成立，如图 5.12 所示的图 G，易计算 $\beta_1(G)=3$，$\alpha_0(G)=4$，但对于二分图来说，式(5) 等号成立，该结论是 König 在 1931 年给出的。在给出它的证明之前，先证明如下引理。

引理 5.7.1 设 M 是 G 的一个对集，K 是 G 的一个覆盖，且 $|M|=|K|$，则 M 是 G 的一个最大对集，K 是 G 的一个最小点覆盖。

证明 设 M' 是 G 的最大对集，K' 是最小点覆盖，则 $\beta_1(G)=|M'|$，$\alpha_0(G)=|K'|$，并且

$$|M|\leqslant|M'|=\beta_1(G)\leqslant\alpha_0(G)=|K'|\leqslant|K|$$

由于 $|M| = |K|$，所以 $|M| = |M'|$，$|K| = |K'|$。　　证毕。

定理 5.7.2　对每一个二分图 $G = (X, Y; E)$，$\beta_1(G) = \alpha_0(G)$。

证明　设 M^* 是 G 的一个最大对集，若 M^* 饱和 X 中的每一个顶点，则由于 $K = X$ 构成 G 的一个点覆盖，并且 $|M^*| = |X| = |K|$，由引理 5.7.1 知，$K = X$ 就是 G 的一个最小点覆盖。故

$$\alpha_0(G) = |X| = |M^*| = \beta_1(G)$$

若 X 中含有 M^* 非饱和顶点，记 U 是 X 中的所有非饱和顶点。置

$$Z = \{v \mid v \in V(G), \text{存在 } u \in U, G \text{ 中有一条从 } u \text{ 到 } v \text{ 的 } M^* \text{ 交错路}\}$$

我们约定 $U \subseteq Z$，令

$$A = X \cap Z, B = Y \cap Z$$

由于 M^* 是 G 的最大对集，G 中不存在 M^* 可扩路，故 Z 中除 U 上的顶点外，其余的顶点均是 M^* 饱和的。所以 $A - U$ 中的顶点能与 B 中的顶点在 M^* 下两两配对。因而

$$|A - U| = |B|$$

并且 $N_G(A) \supseteq B$。与定理 5.3.1 证明中的有关论证类似，$B = N_G(A)$。因此 G 中不存在一个端点属于 A 而另一个端点属于 $Y - B$ 的边，即 G 中每一条边至少有一个端点属于 B 或 $X - A$。从而

$$K = B \cup (X - A)$$

构成 G 的一个点覆盖，如图 5.13 所示。

根据 U 的定义：

$$\begin{aligned} |M^*| &= |X - U| = |(A - U) \cup (X - A)| \\ &= |A - U| + |X - A| \\ &= |B| + |X - A| = |K| \end{aligned}$$

则由引理 5.7.1，K 是 G 的最小点覆盖，故 $|K| = \alpha_0(G)$，也即证明了：

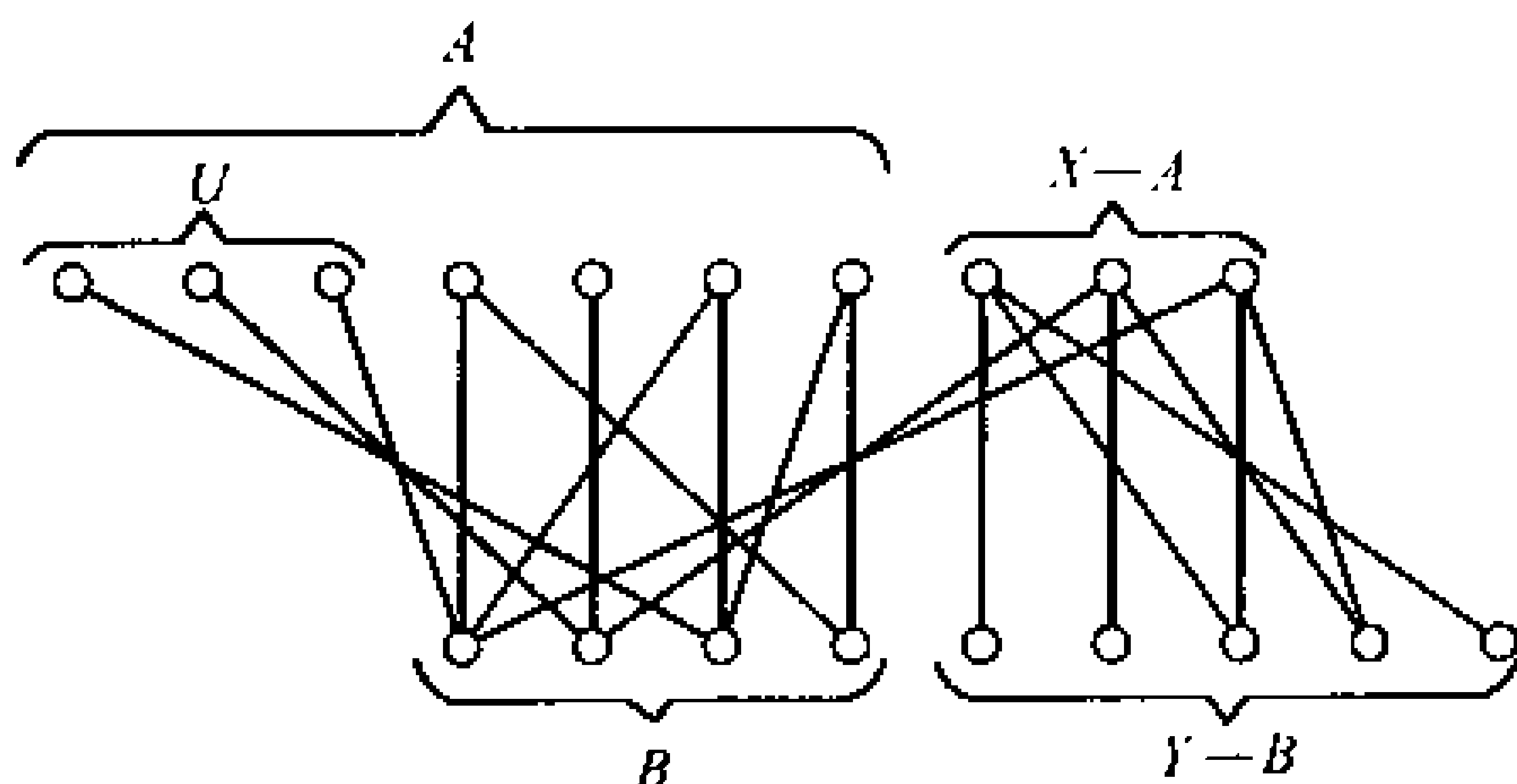


图 5.13 （粗边是 M^* 中的边）

$$\beta_1(G) = |M^*| = |K| = \alpha_0(G)$$

证毕。

把这个定理的结论反映到组合经中的(0,1)矩阵上，就是下面的这个例题。

例 1 设 A 是一个 $n \times m$ 的(0,1)矩阵。A 的一行或一列称为一条线，试证明：A 中两两不属于同一条线上的 1 的个数的最大值等于包含 A 中所有 1 的线数的最小值。

证明 利用本章 5.1 节二分图与(0,1)矩阵的关系，由 A 构造一个二分图 $G = (X, Y; E)$，$|X| = n$，$|Y| = m$，则 A 中两两不属于同一条线上的 1 的集合对应于 G 中的对集。而包含 A 中全部 1 的线的集合对应于 G 的点覆盖。由定理 5.7.2 立即得知例中的结论成立。

下面我们再介绍独立集的概念。

定义 5.7.2 设 I 是图 G 的一个点子集，若 I 中任意两个顶点不相邻，则称 I 是 G 的一个独立集，若 G 中不存在满足 $|I'| > |I|$ 的独立集 I'，则称 I 为 G 的**最大独立集**。最大独立集的点数称为 G 的**独立数**，记为 $\beta_0(G)$。

例如，图 5.14 的图 G 中，$\{v_6\}$ 是 G 的一个独立集。$\{v_3, v_6\}$ 是

G 的一个最大独立集。易得 $\beta_0(G)=2$。

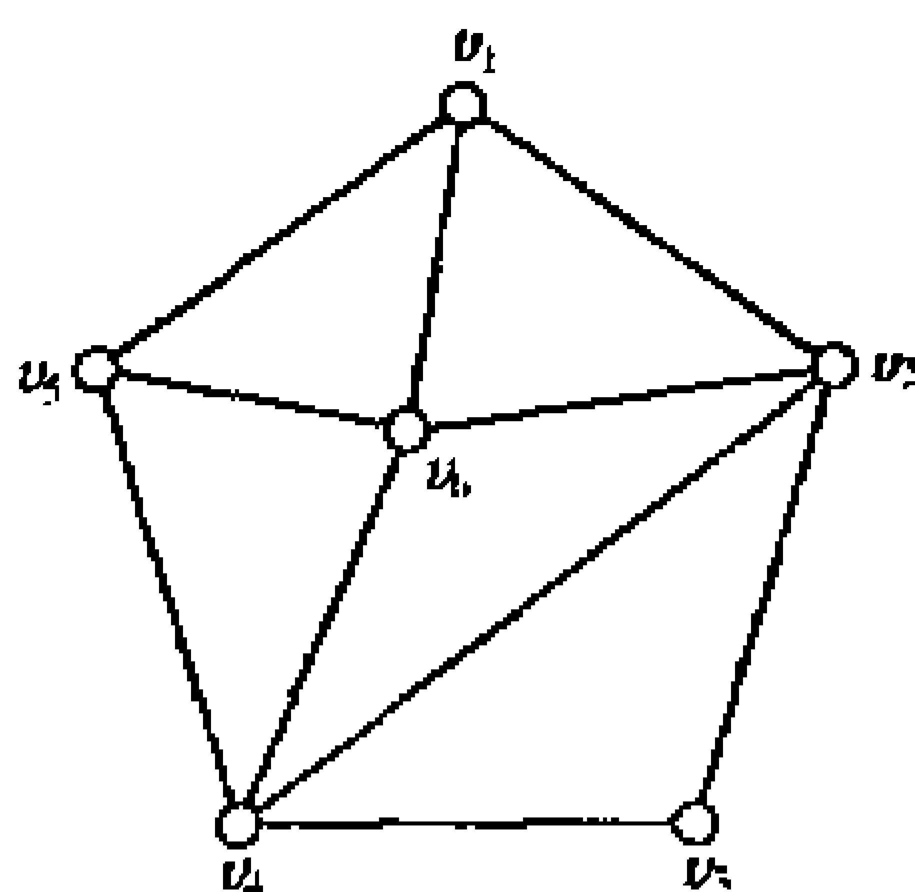


图 5.14

在一个图中，独立集与点覆盖有互补性质。即为以下结论：

定理 5.7.3 图 G 的一个点子集 I 是 G 的独立集当且仅当 $V(G)-I$ 是 G 的点覆盖。

证明 由独立集的定义易得，I 是 G 的独立集当且仅当 G 中每一条边至少有一个端点在 $V(G)-I$ 中，即 $V(G)-I$ 就是 G 的点覆盖。 证毕。

如图 5.14 中，$\{v_6\}$，$\{v_3,v_6\}$ 都是 G 的独立集，而 $V(G)-\{v_6\}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 和 $V(G)-\{v_3,v_6\}=\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$ 都是 G 的点覆盖。

推论 5.7.4 若 p 阶图 G 没有孤立顶点，则

$$\alpha_0(G)+\beta_0(G)=p$$

证明 设 I 是 G 的最大独立集，K 是 G 的最小点覆盖，则 $V(G)-K$ 是 G 的独立集，$V(G)-I$ 是 G 的点覆盖，所以

$$p-\alpha_0(G)=|V(G)-K|\leqslant|I|=\beta_0(G)$$
$$p-\beta_0(G)=|V(G)-I|\geqslant|K|=\alpha_0(G)$$

因此

$$\alpha_0(G)+\beta_0(G)=p$$

证毕。

最后我们引进边覆盖的概念。

定义 5.7.3 设 L 是图 G 的一个边子集，若 G 的每一个顶点至少与 L 中的一条边关联，则称 L 是 G 的一个**边覆盖**。若 G 不含有满足 $|L'|<|L|$ 的边覆盖 L'，则称 L 是 G 的**最小边覆盖**，它的边数称为 G 的**边覆盖数**，记为 $\alpha_1(G)$。

显然 G 有边覆盖的充要条件是 $\delta(G)>0$。

$\alpha_1(G)$ 与 $\beta_1(G)$ 也有类似于 $\alpha_0(G)$ 和 $\beta_0(G)$ 的一个简单关系式。但是对集与边覆盖之间并没有像定理 5.7.3 那样的互补关系。如图 5.15 所示。$M = \{v_1v_2, v_4v_5\}$ 是 G 的一个对集，但

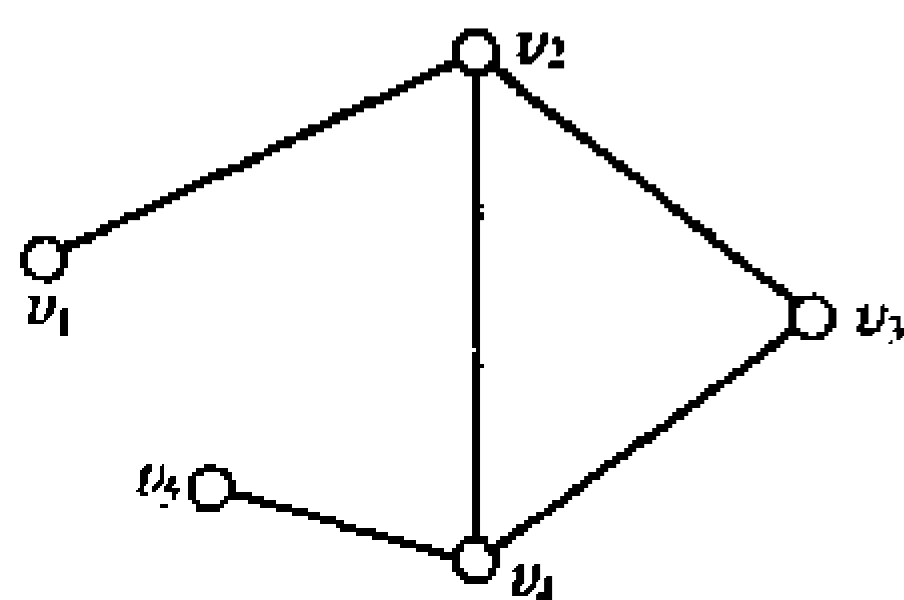


图 5.15

$$E - M = \{v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$$

并不是 G 的边覆盖。

定理 5.7.5 设 G 是 p 阶无孤立顶点的图，则

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = p$$

证明 设 M 是 G 的最大对集，$|M| = \beta_1(G)$。F 是 G 的关于 M 的非饱和点集合，则有

$$|F| = p - 2|M|$$

由于 G 无孤立点，对于 F 的每一个顶点 v，取一条与 v 关联的一条边，所有这样的边与 M 一起构成的边子集记为 L，显然 L 构成 G 的一个边覆盖，因此 $|L| \geqslant \alpha_1(G)$，并且

$$|L| = |M| + |F| = |M| + p - 2|M| = p - |M|$$

所以

$$\alpha_1(G) \leqslant |L| = p - |M| = p - \beta_1(G) \tag{14}$$

即有

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) \leqslant p$$

反之，令 L 是 G 的最小边覆盖，$|L| = \alpha_1(G)$。令 $H = G[L]$，则 H 是 G 的生成子图，又设 M' 是 H 的最大对集，显然也是 G 的对集，且 $M' \subseteq L$。现以 U 表示 H 中关于 M' 的非饱和点的集合，则有

$$|U| = p - 2|M'|$$

因为 M' 是 H 的最大对集，H 中 U 的顶点互不相邻。因而在 H 中

与 U 内的顶点相关联的点均在 $L-M'$ 中。因此

$$|L|-|M'|=|L-M'|\geqslant|U|=p-2|M'|$$

$$|L|+|M'|\geqslant p$$

由于 M' 是 G 的对集,故

$$|M'|\leqslant\beta_1(G)$$

于是

$$\alpha_1(G)+\beta_1(G)\geqslant|L|+|M'|\geqslant p \tag{15}$$

综合以上式(6) 和式(7) 便有

$$\alpha_1(G)+\beta_1(G)=p$$

证毕。

现从定理 5.7.2、推论 5.7.4 和定理 5.7.5,易得:

推论 5.7.6 对任一个二分图 $G=(X,Y;E)$,如果 $\delta(G)>0$,则

$$\alpha_1(G)=\beta_0(G)$$

5.8 Ramsey 数

在介绍 Ramsey 数概念之前,先看下面一个例题。

例 1 在 9 个人中一定有 3 个人互相认识或有 4 个人互不认识。

证明 用图的语言来表达就相当于:若 G 是具有 9 个顶点的简单图,那么 G 中存在 3 个顶点 u、v 和 w,使 $G[u,v,w]\cong K_3$ 或存在四个顶点 x_1,x_2,x_3,x_4,使 $G[x_1,x_2,x_3,x_4,]\cong K_4^C$。

分两种情况讨论:

(1) $\Delta(G)\geqslant 4$ 设顶点 u 的度至少是 4,而且 u_1,u_2,u_3,u_4 与 u 相邻。如果 u_1,u_2,u_3,u_4 中有一对相邻的顶点,不妨设 u_1 与 u_2 相邻,则 $G[u,u_1,u_2]\cong K_3$。否则 $G[u_1,u_2,u_3,u_4]\cong K_4^C$。

(2) $\Delta(G)<4$ 这时 G^C 中每个顶点的度至少是 5。由于奇点

的个数总是偶数，故 G^C 中存在一个顶点 x，使 $d_{G^C}(x) \geqslant 6$，并记 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 与 x 在 G^C 中相邻。由习题 1.8 的证明不难看出在 $G^C[x_1, x_2, \cdots, x_6]$ 中，或有 3 个互相邻接的顶点，这 3 个顶点与 x 一起构成 G^C 中四个互相邻接的顶点，因而该四个顶点是 G 中 4 个互不相邻的顶点；或者有 3 个互不相邻的顶点，这 3 个顶点构成 G 中 3 个互相邻接的顶点。

这一例中的 9 个人(或 9 个顶点)不能改为较小的数。下面图 5.16 给出的图 G 就是一个含有 8 个顶点的简单图，在 G 中没有 K_3 也没有 K_4^C(即在 G^C 中没有 K_4)。

从该例的证明可以发现，对于至少有 9 个顶点的简单图 G，或者含有子图 K_3；或者 G^C 含有子图 K_4。这一问题的推广就是拉姆瑟(F.P.Ramsey)在 1930 年获得的结果：对于任意的自然数 k, t 总存在一个最小正整数 $r(k,t)$，使得每个至少有 $r(k,t)$ 个顶点的简单图 G，或者 G 含有一个子图 K_k；或者 G^C 含有一个子图 K_t。$r(k,t)$ 就称为 **Ramsey 数**。

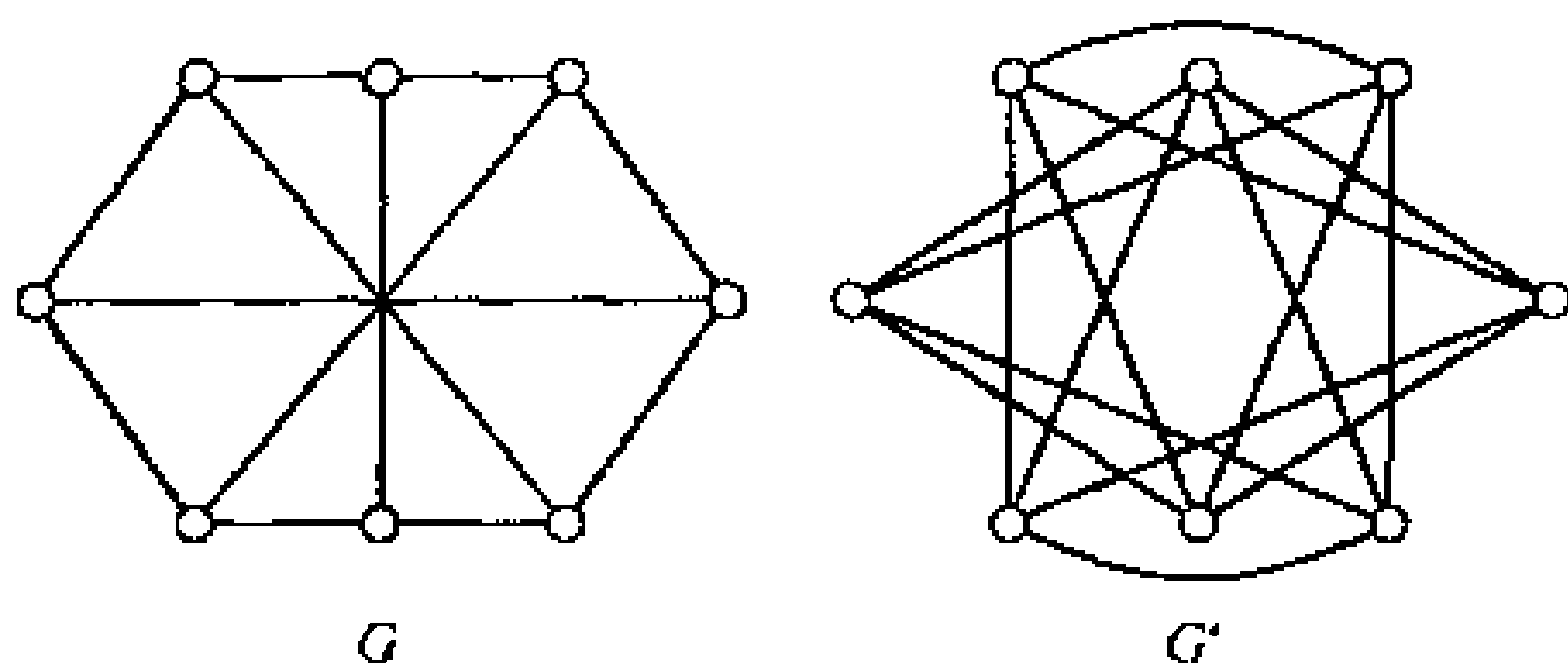


图 5.16

从定义中不难直接算得：

$$r(1,t) = r(k,1) = 1 \tag{16}$$

$$r(2,t) = t, r(k,2) = k \tag{17}$$

由第 1 章习题 1.8 可知 $r(3,3) = 6$，从本节例 1 可推得 $r(3,$

4) = 9。

任一具有 p 个顶点的简单图与它的补图一起可以这样来描述:我们在 G 上添加一定数目的边而得到一个具有 p 个顶点的完全图,给此完全图的边染色,使 G 中的边全为红色,G 的补图 G^C 中的边全为蓝色。此图也叫做一个关于 G 的 p 点红 — 蓝完全图,其中 G 是红色的,G^C 是蓝色的。

于是 Ramsey 数也可以叙述为:

$r(k,t)$ 是具有下述性质的最小正整数,任意一个至少有 $r(k,t)$ 个顶点的红 — 蓝完全图,或者包含一个具有 k 个顶点的红完全图;或者包含一个具有 t 个顶点的蓝完全图。

利用两种颜色的互相替,我们能得到下面等式:

对于任意自然数 k、t,有

$$r(k,t) = r(t,k) \tag{18}$$

关于 Ramsey 数的下述定理是由 Erdos 和 Szekeres(1935) 以及 Greenwood 和 Cleason(1955) 提出的。它不仅归纳证明了 $r(k,t)$ 对一切自然数 k 和 t 的存在性,同时还导出了 $r(k,t)$ 的一个上界。

定理 5.8.1 对于任意两个整数 $k \geqslant 2$ 和 $t \geqslant 2$,如果 $r(k,t-1)$ 和 $r(k-1,t)$ 都存在,则 $r(k,t)$ 也存在,并且

$$r(k,t) \leqslant r(k-1,t) + r(k,t-1) \tag{19}$$

此外,当 $r(k-1,t)$ 与 $r(k,t-1)$ 都为偶数时,式(11) 中的不等式严格成立。

证明 设 T 是有 $r(k-1,t) + r(k,t-1)$ 个顶点的红 — 蓝完全图,我们必须证明 T 或含有一个 k 点的红完全图;或者含有一个 t 点的蓝完全图。

以 u 表示 T 的任一顶点,考虑关联于 u 的红边与蓝边。这些红边与蓝边的另一端点(异于 u)分别构成集合 V_1 和 V_2。设 p_1 个顶点的 T_1 与 p_2 个顶点的 T_2 分别是由 V_1 与 V_2 导出的 T 的子图。则 T_1 与 T_2 也是红 — 蓝完全图,并且

$$p_1 + p_2 = r(k-1,t) + r(k,t-1) - 1$$

我们先假设 $p_1 < r(k-1,t)$,在此情况下 $p_2 \geqslant r(k,t-1)$,所以 T_2 含有(因而 T 也含有)k 个顶点的红完全图,或者含有 $t-1$ 个顶点的蓝完全图。在后一种情况下,这个蓝完全图与 u 及某些与 u 关联的蓝边一起构成含于 T 中的一个 t 点的蓝完全图。

若 $p_1 \geqslant r(k-1,t)$,则类似地(以 T_1 替换 T_2)可得到 T 或者含有一个 k 点的红完全图;或者含有一个 t 点的蓝完全图。

现在证明定理的后半部分。设 $r(k-1,t) = 2p_1, r(k,t-1) = 2p_2$,以 T 表示具有 $2p_1 + 2p_2 - 1$ 个顶点的红一蓝完全图,u 是 T 中的一个顶点,则

$$d_T(u) = 2p_1 + 2p_2 - 2$$

并且下列三种情况之一成立:

(a) 至少有 $2p_1$ 条红边关联于 u;

(b) 至少有 $2p_2$ 条蓝边关联于 u;

(b) u 恰关联于 $2p_1 - 1$ 条红边及 $2p_2 - 1$ 条蓝边。

在情况(a),我们考虑关联于 u 的红边,它们的另一端点构成一个点集合 V_1,以 T_1 表示由 V_1 导出的 T 的子图。T_1 的顶点数至少为 $2p_1 = r(k-1,t)$,所以 T_1 或者含有 $k-1$ 个顶点的红完全图;或者含有 t 个顶点的蓝完全图,因此 T 含有 k 个顶点的红完全图;或者含有 t 个顶点的蓝完全图。

情况(b) 与(a) 相同,只需考虑关联于 u 的蓝边的另外的端点。

若(c) 对于 T 的每个顶点都正确,则 T 的红色子图的每个顶点的度将是 $2p_1 - 1$,但红色子图的顶点数是 $P(T) = 2p_1 + 2p_2 - 1$ 为奇数,与推论 1.3.2 相矛盾。因此,由顶点 u 的一个适当选择,(a) 或(b) 成立。即定理得证。 证毕。

定理 5.8.2 对任意正整数为 k 和 t,$k + t > 2$,均有

$$r(k,t) \leqslant \binom{k+t-2}{k-1} \tag{20}$$

证明 　对 $k+t$ 进行归纳。由式(14)、(15) 和 $r(3,3)=6$，$r(3,4)=9$ 可知，当 $k+t\leqslant 6$ 时结论成立。

现假设式(18) 对于满足 $6\leqslant k+t<m+n$ 的一切正整数 k，t 成立。由定理 5.8.1 推得

$$
\begin{aligned}
r(m,n) &\leqslant r(m-1,n)+r(m,n-1)\\
&\leqslant \binom{m-1+n-2}{m-1-1}+\binom{m+n-1-2}{m-1}\\
&=\binom{m+n-2}{m-1}
\end{aligned}
$$

故式(18) 对一切正整数 k,t 成立。　　　　证毕。

从式(18) 易得

$$r(3,t)\leqslant \frac{t^2+t}{2}$$

但我们可以获得比这个更好的上界。

定理 5.8.3 　对每一个正整数 $t\geqslant 3$，

$$r(3,t)\leqslant \frac{t^2+3}{2} \tag{21}$$

证明 　我们对 t 进行归纳。当 $t=3$ 时，

$$r(3,t)=r(3,3)=6=\frac{t^2+3}{2}$$

所以在 $t=3$ 时，式(13) 成立。下面设

$$r(3,t-1)\leqslant \frac{(t-1)^2+3}{2}$$

对 $t\geqslant 4$，由式(11) 得

$$
\begin{aligned}
r(3,t) &\leqslant r(2,t)+r(3,t-1)\\
&=t+r(3,t-1)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

并当 t 与 $r(3,t-1)$ 均是偶数时，严格不等号成立。根据归纳假设有

$$r(3,t)\leqslant t+\frac{(t-1)^2+3}{2}=\frac{t^2+4}{2} \tag{23}$$

当 t 是奇数时，t^2+4 是奇数，故

$$r(3,t)\leqslant\frac{t^2+3}{2}$$

当 t 是偶数时，如果 $r(3,t-1)<\frac{(t-1)^2+3}{2}$，则式(23)的严格不等号成立，因此式(19)成立。如果

$$r(3,t-1)=\frac{(t-1)^2+3}{2}=\frac{t^2}{2}-t+2$$

因为 t 是偶数，故 $r(3,t-1)$ 也是偶数。因此式(22)中的严格不等号成立。所以式(19)成立。 证毕。

定理 5.8.4 对每个整数 $t\geqslant 3$，有

$$r(3,t)\geqslant 3(t-1) \tag{24}$$

证明 首先作一个红一蓝完全图 K_{3t-1}，作法为：把 K_{3t-1} 的顶点均匀地分布在一圆周上，当且仅当两顶点之间的距离大于圆内接正三角形的边长时，把这两个顶点之间的边染上红颜色，其余边染上蓝颜色。为方便，把 K_{3t-1} 中的红颜色边组成的子图记为 H_t(对于 $t=3$，参见图 5.17)。我们将要证明 H_t 不含三角形也不含具有$(t+1)$个顶点的独立集。

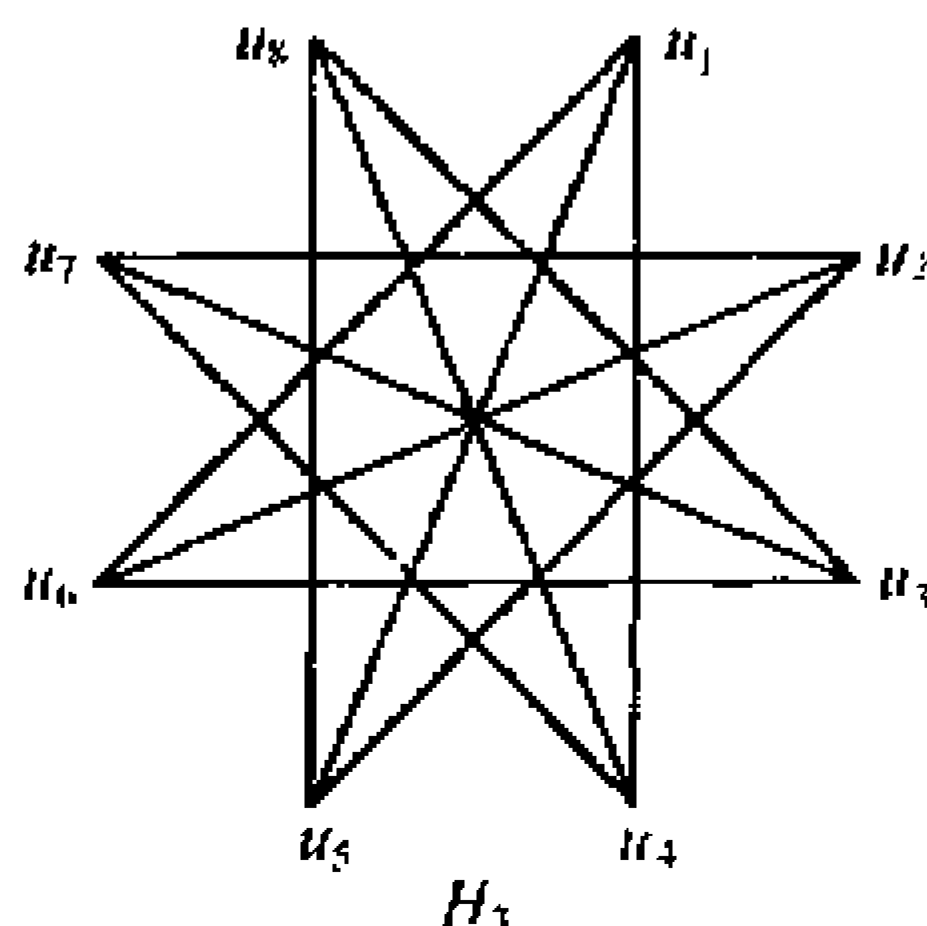


图 5.17

由于 K_{3t-1} 内的任何三角形至少有一条边其长不大于该圆内接正三角形的边长。则该边在 K_{3t-1} 的红一蓝染色中，染为蓝颜色。所以 K_{3t-1} 不含有红色三角形，即 H_t 不含 K_3。

设 $u_1,u_2,\cdots,u_{3t-1},u_{3t}=u_1$ 是 H_t 的全部顶点，按此顺序置于圆周上。由圆的对称性表明，H_t 上每个顶点出现于一个合适的极大独立集中。一个含有顶点 u_1 的极大独立集中有多少个顶点？容易验证，顶点 $u_{t+1},u_{t+2},\cdots,u_{2t}$ 邻接于 u_1，因此下列顶点不与 u_1 相邻。

$u_2, u_3, \cdots, u_t$

$u_{2t+1}, u_{2t+2}, \cdots, u_{3t-1}$

由对称性，同一行的顶点组成一个独立集。同一列的两个顶点 u_i 与 u_{2t+i-1} 是相邻的($i = 2,3,\cdots,t$)，因为它们之间的距离都等于 u_1 与 u_{2t} 之间的距离，所以顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_t$ 构成H_t 的一个极大独立集。从而 H_t 不含具有$(t+1)$ 个顶点的独立集。

因而我们就证明了 $r(3, t+1) \geqslant 3t$。我们以 $t-1$ 替换 t 就有

$$r(3,t) \geqslant 3(t-1)$$

证毕。

由式(13) 和式(16)，也可以得到 $r(3,4) = 9$。

以上我们给出了几个上界和 $r(3,t)$ 的一个下界。但是要具体确定 $r(k,t)$ 的准确值却是相当困难的，这也是图论中的一大难题。在 $k,t > 2$ 时，目前已经知道的 $r(k,t)$ 的值只有为数不多的几个。下表给出目前为止所已知的所有 Ramsey 数和 k,t 取较小值时某些 Ramsey 数的下、上界。

k \ t	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43
4		18	25	35 41	49 61	55 84	69 115	80 149
5			43 49	58 87	80 143	95 216	116 316	141 442

关于 Ramsey 数 $r(k,t)$ 可作如下推广：Ramsey 数 $r(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是一个具有下述性质的最小正整数 m，使得 K_m 的每个 n

种颜色的边着色中，总存在某一 $i_0(1 \leqslant i_0 \leqslant n)$，使 K_m 中有一个 k_0 阶完全子图，它的边染的都是第 i_0 种颜色。

关于推广的 Ramsey 数，有类似于定理 5.8.1 和定理 5.8.2 的结果，证明也是类似的。

定理 5.8.5 对任意整数 $k_1, k_2, \cdots, k_n, k_i \geqslant 2, i = 1, 2, \cdots, n$，均有

$$\begin{aligned} r(k_1, k_2, \cdots, k_n) \leqslant\ & r(k_1 - 1, k_2, \cdots, k_n) \\ & + r(k_1, k_2 - 1, \cdots, k_n) + \cdots \\ & + r(k_1, k_2, \cdots, k_n - 1) - n + 2 \end{aligned}$$

定理 5.8.6

$$r(k_1 + 1, k_2 + 1, \cdots, k_n + 1) \leqslant \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdots \cdots k_n!}$$

记 $r_n = r\underbrace{(3, 3, \cdots, 3)}_{n个}$

定理 5.8.7 $r_n \leqslant n(r_{n-1} - 1) + 2$。

证明 记 $N = n(r_{n-1} - 1) + 2$。把 n 种颜色染给 K_N 的边，得 n 色完全图 K_N。对 K_N 中的一个顶点 u_0，与 u_0 关联的 $n(r_{n-1} - 1) + 1$ 条边中，平均每种颜色有 $r_{n-1} - 1 + \frac{1}{n}$ 条边。因而根据平均数原理，有 r_{n-1} 条边同为某一种颜色，不失一般性，设边 u_0u_1，$u_0u_2, \cdots, u_0u_{r_{n-1}}$ 均为第 n 色。由 $u_1, u_2, \cdots, u_{r_{n-1}}$ 构成 K_N 的导出子图仍是完全图，记为 $K_{r_{n-1}}$，如果这个 $K_{r_{n-1}}$ 中有一条边，记为 u_1u_2 是第 n 色，则 $K_N[u_0, u_1, u_2]$ 是 K_N 的一个同色三角形(第 n 色)。否则，这个 $K_{r_{n-1}}$ 中没有第 n 色的边，那么它的边至多有 $n - 1$ 种不同的颜色，根据 r_{n-1} 的定义，这个 $K_{r_{n-1}}$ 中有一个同色的三角形，因此

$$r_n \leqslant N = n(r_{n-1} - 1) + 2$$

证毕。

例2 有17位学者,每1位都给其余的人写1封信,信的内容是讨论3个论文题目中的任一个,而且2个人互相通信所讨论的是同1个题目。证明至少有3位学者,他们之间通信所讨论的是同1个论文题目。

证明 作一个完全子图 K_{17},它的17个顶点代表17位学者,我们把其中的边染上3种颜色:如果两位学者讨论的是第 i 个题目,就将连接相应的2个顶点的边染上第 i 种颜色($i=1,2,3$)。这样就得到3色完全图 K_{17}。由定理5.8.7

$$r_3 \leqslant 3(r_2-1)+2 = 3(r(3,3)-1)+2 = 17$$

因此,这个3色完全图 K_{17} 中有一个同色三角形。这个同色三角形所对应的3位学者之间通信所讨论的是同1个论文题目。

例3 设$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$是整数集$\{1,2,\cdots,r_n\}$的一个分类,则存在某一数 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant n)$,$S_{i_0}$ 包含3个整数 x,y 和 z(不必相异),满足方程

$$x+y=z$$

证明 考察以$\{1,2,\cdots,r_n\}$为顶点的完全图 K_{r_n},用颜色 $1,2,\cdots,n$ 按下述规则给 K_{r_n} 的边染色:边 uv 染颜色 j 当且仅当 $|u-v|\in S_j$。由 r_n 的定义,K_{r_n} 中存在一个同色三角形,即存在3个顶点 a,b,c,使得边 ab,bc,ca 有相同的颜色,设为 i_0 色,不失一般性,设 $a>b>c$,并记 $x=a-b$,$y=b-c$ 和 $z=a-c$,则 $x,y,z\in S_{i_0}$,并且 $x+y=z$。

习 题 五

5.1 设 $G=(X,Y;E)$ 是一个 k 正则二分图($k\geqslant 1$)，则必有 $|X|=|Y|$。

5.2 设图 $G=(X,Y;E)$ 是二分图，$|X|\neq|Y|$。证明 G 不是 Hamilton 图。

5.3 设 $G=(X,Y;E)$ 是一个简单二分图，$|X|=|Y|=n(n\geqslant 2)$，若对任意的 $x\in X, y\in Y$，由 $xy\overline{\in} E(G)$ 就有

$$d_G(x)+d_G(y)\geqslant n+1$$

则 G 是 Hamilton 图。

5.4 试证明：如果 G 是简单二分图，含有 p 个顶点。则 G 的边数不超过 $p^2/4$。

5.5 试证明：任何一个简单图 G 都有一个生成子图 H，使 H 为二分图，并且对任意一个顶点 $v\in V$，有

$$d_H(v)\geqslant\frac{1}{2}d_G(v)$$

5.6 利用矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

构作一个二分图。

5.7 两个人在图 G 上做游戏，方法是交替地选择相异的顶点 v_0，$v_1, v_i, v_{i+1}\cdots$ 使得对每一个 $i>0$，v_i 相邻于 v_{i-1}，最后一个顶点的选择者为胜。证明：第一个选点人有一个得胜策略当且仅当 G 没有完美对集。

5.8 $2n$ 个学生每天出去散步，每两个人一组。如果每一对学生只

在一起散步一次，这样的散步可以持续多少天？

5.9 设 G 至少包含 $2k$ 个顶点，其中每个顶点的度数至少是 k，则图 G 的最大对集至少有 k 条边。

(提示：设 M 是 G 的最大对集，但 $|M| \leqslant k-1$。令 Q 表示 M 的边的端点集合，由于在 Q 内的顶点数为 $2|M| \leqslant 2k-2$，在 $V(G)-Q$ 中至少存在两个顶点，设为 x、y。根据 M 的最大性，$V(G)-Q$ 中任两个顶点不相邻。若存在 M 的一条边，使其中的一个端点相邻于 x，而另一个端点相邻于 y。则 G 存在 M 可扩路，这将矛盾于 M 是最大对集。现在我们考虑 x 的所有邻点 $x_1, x_2, \cdots, x_l, l \geqslant k$。这 l 个点全在 Q 内，让我们分别用 $y_1, y_2, \cdots, y_l$ 表示在 M 下与 $x_1, x_2, \cdots, x_l$ 配对的顶点，则 y 不能与 $y_1, y_2, \cdots, y_l$ 相邻。由此可得

$$d_G(y) \leqslant (2k-2) - l \leqslant k-2$$

与 G 的假设矛盾。)

5.10 试证明：树最多只有一个完美对集。

5.11 证明二分图 $G=(X, Y; E)$ 有完美对集的充分必要条件是对所有 $S \subseteq V(G)$，

$$|N_G(S)| \geqslant |S|$$

5.12 设 $G=(X, Y; E)$ 是简单二分图，$|X| = |Y| = n \geqslant 2$。

证明：若 $\delta(G) > \frac{n}{2}$，则 G 有完美对集。

5.13 设 $G=(X, Y; E)$ 是二分图，证明：若对任何 $x \in X, y \in Y$ 均有 $d_G(x) \geqslant d_G(y)$，则 G 有饱和 X 中所有顶点的对集。(提示：在 X 中任取一个非空子集 S，记

$$E_0 = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

则

$$|E_0| = \sum_{x \in S} d_G(x)$$

因此 S 中顶点度的平均数是 $|E_0| / |S|$。而 $N_G(S)$ 中顶

点度的平均数至少是$|E_0|/|N_G(S)|$。由题意

$$|E_0|/|S| \geqslant |E_0|/|N_G(S)|$$

因此$|N_G(S)| \geqslant |S|$。即 G 中含有饱和 X 中所有顶点的对集。)

5.14 设 G 是 k 正则二分图($k > 0$),证明:G 中存在 k 个边不交的完美对集 $M_1, M_2, \cdots, M_k$,使

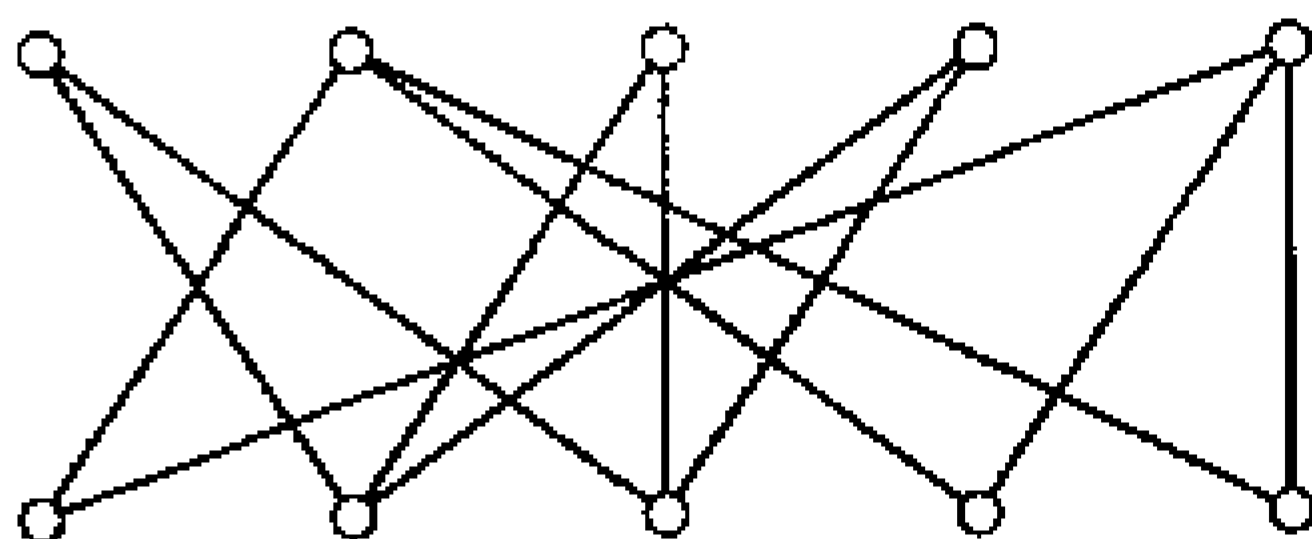
$$E(G) = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$$

5.15 证明:一个 8×8 方格棋盘移去其中两个对角上的 1×1 方格之后不能用 1×2 的长方形不重叠而恰好填满。

5.16 有 8 个问题出现于一刊物上,对于每一个问题编辑部收到两个正确的解。他们发现 16 个解由 8 个人寄来,每人 2 个解。证明:能对每 1 个问题发表 1 个解,并使 8 个人中的每人恰好被提到一次。

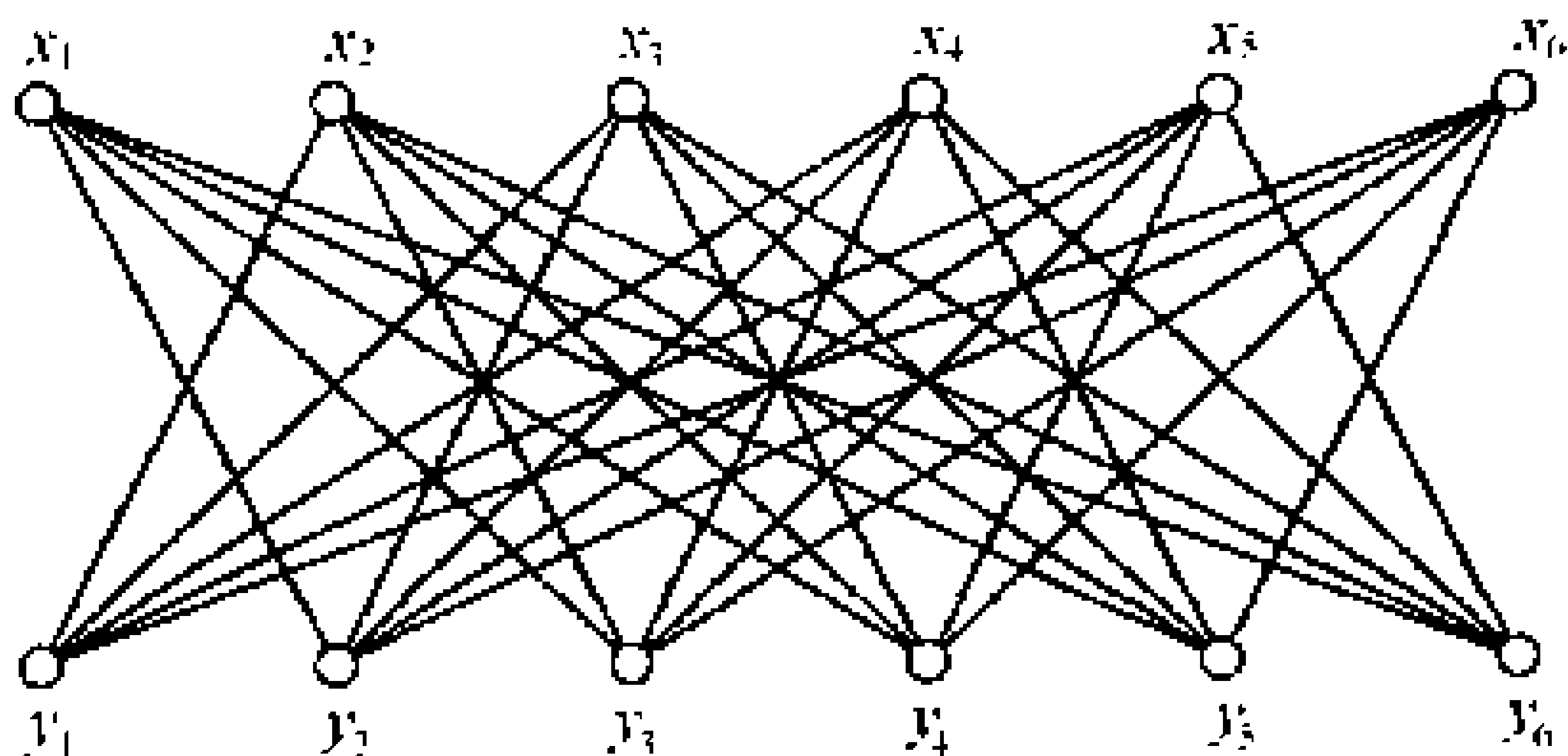
5.17 从 64 格棋盘上选出 16 格,使每行每列含有其中的 2 格,证明:可以把 16 个棋子(8 个白的与 8 个黑的)放置在所的方格上,使每行每列都恰好有一个白的与一个黑的棋子。(提示:构造二分图 $G = (X, Y; E)$, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_8\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_8\}$分别对应于棋盘的 8 行 8 列,当且仅当属于行 x_i 且属于列 y_j 的方格是被选出时,边 x_iy_j 属于 $E(G)$,于是,我们的图的边对应于所选的方格。所以 G 是 2 正则二分图。由习题 15,它有两个边不交的完美对集,设为 M_1 与 M_2。若把白的与黑的棋子分别放置在对应于 M_1 与 M_2 的边所对应的方格上,即得所求的放置法。)

5.18 求二分图 G 的一个最大对集。



习题 5.18

5.19 某人给6个人写了6封信，并且准备了6个写有收信人地址的信封。问有多少种投放信笺的方法，使每份信笺与信封上收信人不相符？(提示：设信笺为 x_i，信封为 y_i，$i = 1,2,3,4,5,6$，x_i 与 y_i 是相符的。于是问题就转化为求图(如下图所示)



习题 5.19

$$G = K_{6,6} - \{x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6\}$$

中有多少个不同的完美对集，我们把这个数目记 $\varphi(6)$，x_1 与 y_2 相配对时，完美对集的个数等于从图 G 中删去顶点 x_1、y_2 后所得图 $G - \{x_1, y_2\}$ 中完美对集的个数，这个数目记成 $\psi(5)$。在 $G - \{x_1, y_2\}$ 中，若 x_2 与 y_1 相配对，则 $\psi(5) = \varphi(4)$；若 x_2 与 y_1 不配对，则 $\psi(5) = \varphi(5)$。于是 G 中 x_1 与 y_2 相配对时，有 $\varphi(5) + \varphi(4)$ 个完美对集。由对称

性，x_1 与 $y_j(3\leqslant j\leqslant 6)$ 相配对时，亦有 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完美对集。故

$$\varphi(6)=5(\varphi(5)+\varphi(4))$$

利用这递推公式可求得 $\varphi(6)$。)

5.20　试证明：对任意简单图 G 有 $\alpha_0(G)\geqslant\delta(G)$。

5.21　试证明：若 G 是二分图，则 $q(G)\leqslant\alpha_0(G)\cdot\beta_0(G)$，仅在 G 是完全二分图时才能取等号。

5.22　设 G 是 p 个顶点的图，试证明：G 是二分图的充分必要条件是对 G 的每个子图 H，均有 $\beta_0(H)\geqslant\frac{1}{2}|p(H)|$。

5.23　试求使 $\alpha_1(G)=\beta_1(G)$ 的充分必要条件。

5.24　试证明：对任意图 G，$\delta(G)>0$，恒有 $\alpha_1(G)\geqslant\beta_0(G)$。

5.25　设 L 是 G 的一个最小边覆盖，证明 $G[L]$ 无回路。

5.26　证明：19 个人中必定有 3 个人互相认识，或者有 6 个人互不认识。

5.27　利用 $r_2=r(3,3)=6$，证明：$r_n\leqslant[n!e]+1$。

5.28　在某协会中有 9 个人，其中任意 3 个人中总有互相认识的 2 个人。证明：在这 9 个人中，至少有 4 个人互相认识。

5.29　平面上有 6 个点，任意 3 点都不构成等边三角形。证明：由这些点组成的三角形中，有一条边既是一个三角形的最长边，也是某一个三角形的最短边。

(提示：以这 6 个点为顶点作一个 6 点完全图 K_6。把至少是一个三角形的最长边的边染上红色，其余边染上蓝色。这个红、蓝完全图中必不含蓝色 K_3，但 $r(3,3)=6$，所以 K_6 中有一个红色 K_3。这个红色三角形的最短边即为所求)。

6 图的染色

图的染色问题的研究来源于著名的四色问题。四色问题是图论中也许是全部数学中最出名、最难的一个问题之一。

所谓四色猜想就是在平面上任何一张地图，总可以用至多四种颜色给每一个国家染色，使得任何相邻国家（公共边界上至少有一段连续曲线）的颜色是不同的。例如图 6.1 所示的地图用了四种颜色给每个区域染色，使得任何两个相邻的区域有不同的颜色。

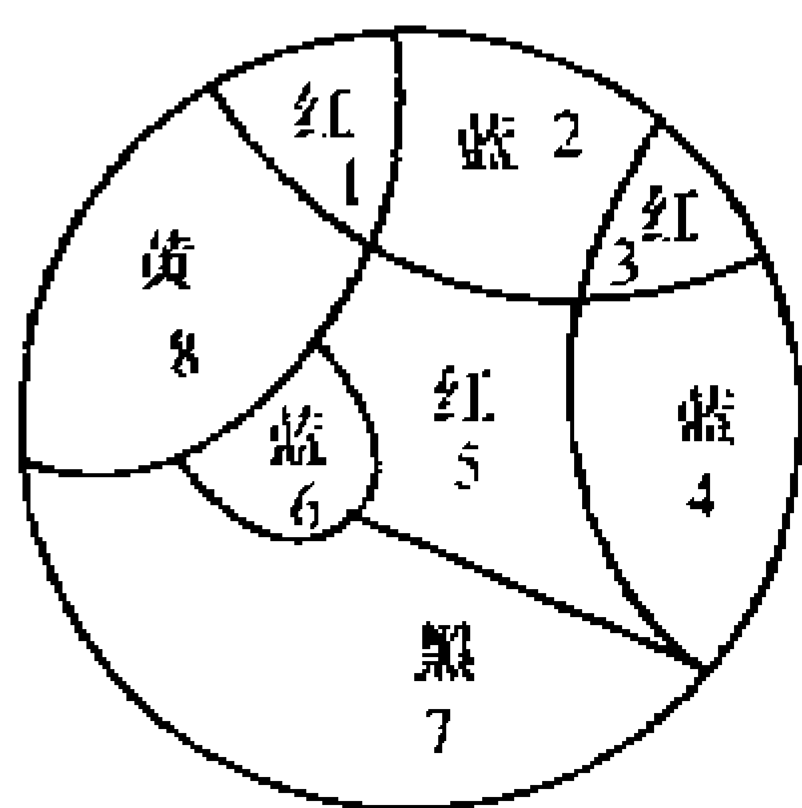


图 6.1

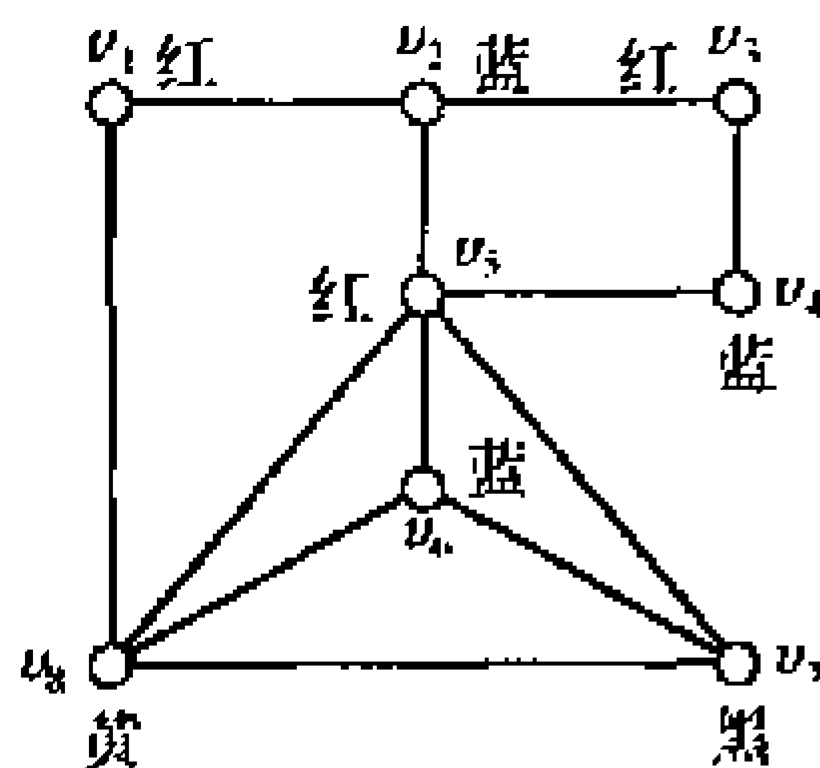


图 6.2

1852 年嘉思瑞（Guthrie）兄弟在通信中提出了四色问题，小 Guthrie 求教于他的老师摩根（de Morgan），Morgan 与他的朋友在通信中讨论过这个问题，但都无法给予解决。1878 年 Cayley 在伦敦数学会上宣布了这个问题，引起数学界的广泛注意。Kempe 和 Tait 分别在 1879 年和 1880 年发表文章，声称证明了四色问题。11 年后，Heawood 于 1890 年指出了 Kempe 证明中的错误，但却利用 Kempe 的方法证明了五色定理成立（见 6.2 节中定理 6.2.9）。应当指出，Kempe 关于四色问题的文章虽然有错误，但他的方法对后来

四色问题的解决是有启发的。1891 年 Petersen 指出了 Tait 证明中所存在的错误，但 Tait 的方法也有其合理的部分，利用 Tait 的方法 Petersen 证明四色猜想与如下命题等价：任何一个 2 边连通 3 正则平面图（见下一节定义 6.2.1）的边色数（定义 6.4.1）为 3。经过一百多年之后，这个貌似简单的四色猜想才被美国的 Appel 和 Haken 于 1976 年借助于高速电子计算机用了 1200 多个小时证明了四色猜想成立。从此四色猜想成了四色定理。然而，给出四色定理一个无需借助于计算机的证明仍然是一个未获解决的问题。

四色问题即地图染色问题粗看起来似乎与我们所讨论的图没有什么联系。其实也是可以转化为图论中的问题来讨论。首先从地图出发来构作一个图 G，其方法是，让每一个顶点代表地图的一个区域，如果两个区域有一段公共边界线，就在相应的顶点之间连上一条边。如图 6.2 所示的图 G 就是从图 6.1 的地图构造而来的。

由于地图中每一块区域对应图 G 的一个顶点，两个相邻顶点对应两个相邻区域。所以对地图染色使相邻的区域染以不同的颜色相当于对图 G 的每个顶点染以相应的一种颜色，使得相邻的顶点有不同颜色。例如，图 6.1 中地图的一个染色对应图 6.2 中 G 的一个顶点染色。

6.1 顶点染色

本节给出顶点染色定义。这节我们仅限于讨论无环图。

定义 6.1.1 G 的一个正常 k 顶点染色是指 k 种颜色 $1,2,3,\cdots,k$ 对于 G 的各顶点的一个分配，使得任意两个相邻的顶点分配以不同颜色。若图 G 有一个正常 k 顶点染色，就称 G 是 k 顶点可染色的。而 G 的色数是指 G 有正常 k 顶点染色的数 k 的最小值，用 $\chi(G)$ 表示。若 $\chi(G)=k$，就称 G 是 k 色的。

我们通常把"正常 k 顶点染色"简称为 k 染色。类似地，把"k

顶点可染色”简称为 k 可染色。

从定义不难发现，对于 G 的任何子图 H，均有 $\chi(H) \leqslant \chi(G)$。若 G 是 p 阶完全图，则 $\chi(G) = p$。

例如，图 6.2 给出了图 G 的一个 4 染色，因此 $\chi(G) \leqslant 4$。但在 G 中，$G[v_5, v_6, v_7, v_8]$ 是 G 的一个 4 点完全子图，故 $\chi(G) \geqslant 4$。因此 $\chi(G) = 4$。

在本节，我们先介绍一般图的顶点染色理论，四色问题以及与地图相对应的图的染色和在下一节讨论。

给定图 $G = (V, E)$ 的一个 k 染色，用 V_i 表示 G 中染以第 i 色的顶点集合（$i = 1, 2, \cdots, k$），则每个 V_i 都是 G 的独立集。因而 G 的一个 k 染色对应 $V(G)$ 的一个划分 $[V_1, V_2, \cdots, V_k]$，其中每个 V_i 是独立集。反之，给出 $V(G)$ 的这样一个划分 $[V_1, V_2, \cdots, V_k]$，其中每个 V_i 均是独立集（$1 \leqslant i \leqslant k$），则相应地得到 G 的一个 k 染色，我们称 $V(G)$ 的这样一个划分为 G 的一个**色划分**，每个 V_i 称为色类（$i = 1, 2, \cdots, k$）。因此 G 的色数 $\chi(G)$ 就是使这种划分成为可能的最小自然数 k。

通过上面的讨论，我们直接可得以下结论：

定理 6.1.1

(1) 图 G 是空图当且仅当 $\chi(G) = 1$；

(2) G 是至少有一条边的二分图当且仅当 $\chi(G) = 2$；

(3) 若 G 是长为奇数的回路，则 $\chi(G) = 3$。

对于 $k \geqslant 3$，k 色图的特征至今尚未清楚，然而我们可以给出色数的一个上界。

定理 6.1.2 设 $k = \max\limits_{H} \delta(H)$，这里的 H 取遍 G 的所有点导出子图，则

$$\chi(G) \leqslant k + 1$$

证明 我们只需要证明 G 是 $k+1$ 可染色的。由于 H 能取到 G，故 $\delta(G) \leqslant k$。从而 G 中可取到一个顶点 v_p，$d_G(v_p) \leqslant k$。令

$H_{p-1} = G - v_p$，取 $H = H_{p-1}$，则 H_{p-1} 中也有一个顶点 v_{p-1}，使 $d_{H_{p-1}}(v_{p-1}) \leqslant k$。再令 $H_{p-2} = H_{p-1} - v_{p-1} = G - \{v_{p-1}, v_p\}$，同样存在 $v_{p-2} \in V(H_{p-2})$，使 $d_{H_{p-2}}(v_p - 2) \leqslant k$。这样继续下去，就得到一个顶点序列 $v_1, v_2, \cdots, v_p$，根据这个点列的构造，点列中的每个顶点 v_j 最多与它前面 v_1, v_2, v_{j-1} 中的 k 个顶点相邻。现在我们按照 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 这个顶点序列给 G 的一个 $k+1$ 染色。为方便，用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1}$ 表示 $k+1$ 种不同的颜色。首先给 v_1 染 α_1，当 v_2 与 v_1 不相邻时，仍给 v_2 染 α_1，否则给 v_2 染 α_2。一般说来，当已经给 $v_1, v_2, \cdots, v_t$ 染色，使相邻的点对染有不同的颜色后，再给 v_{t+1} 染色。由于 v_{t+1} 最多与 $v_1, v_2, \cdots, v_t$ 中的 k 个顶点相邻，因此这 t 个顶点内与 v_{t+1} 相邻的顶点中至多出现 k 种颜色，在 $k+1$ 种颜色中我们总可以把不出现的而且按照标号最小的这种颜色染给 v_{t+1}。这样一直把 G 中的全部顶点染上某种颜色为止。可得 G 的一个 $k+1$ 染色，故 $\chi(G) \leqslant k+1$。　　证毕。

推论 6.1.3　对任意图 G，均有

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

证明　对于 G 的任意一个点导出子图 H，总有 $\delta(H) \leqslant \Delta(H) \leqslant \Delta(G)$。故由定理 6.1.2 得此结论。

推论 6.1.4　若 G 是连通图，但不是正则图，则 $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$。

证明　由定理 6.1.2，只需证明对 G 的任何一个点导出子图 H 都有 $\delta(H) \leqslant \Delta(G) - 1$。若 $H = G$，因 G 不是正则图，故 $\delta(H) \leqslant \Delta(G) - 1$。如果 H 是 G 的真子图，由于 G 连通，存在 $x \in V(H), y \in V(G - H)$，使 $xy \in E(G)$，则

$$d_H(x) \leqslant d_G(x) - 1 \leqslant \Delta(G) - 1$$

故

$$\delta(H) \leqslant \Delta(G) - 1$$

证毕。

定理 6.1.2 及两个推论给出了色数的几个上界，但这些上界是很弱的，例如当 G 是二分图时，$\chi(G)\leqslant 2$，而 $\Delta(G)$ 可以取得相当大。

布鲁克斯（R.L.Brooks）在 1941 年证明了这样的结果：使 $\chi(G)=\Delta(G)+1$ 的图有两类：或是完全图或是奇回路。

定理 6.1.5　如果连通图 G 不是奇回路，也不是完全图，则

$$\chi(G)\leqslant\Delta(G)$$

证明　略。

对于著名的 Petersen 图 G（见图 4.17），应用这一结论，立即可得 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)=3$，但 G 不是二分图，故 Petersen 图的色数是 3。

下面给出求图的色数的一个算法。

定理 6.1.6　设 u 和 v 是 G 中两不相邻的顶点，则

$$\chi(G)=\min\{\chi(G+uv),\chi(G\cdot uv)\}$$

证明　设 $\chi(G)=k$，并考虑 G 的 k 染色。假设顶点 u 和 v 染不同的颜色，则 G 的 k 染色也是 $G+uv$ 的 k 染色。因而，此时 $\chi(G+uv)\leqslant k=\chi(G)$。现在假设顶点 u 和 v 的染色相同，则 G 的一个 k 染色可得到 $G\cdot uv$ 的一个 k 染色，于是，有 $\chi(G\cdot uv)\leqslant k=\chi(G)$。由于在 G 的 k 染色中，或者 x 与 y 染为不同的颜色或者为相同颜色，所以

$$\min\{\chi(G+uv),\chi(G\cdot uv)\}\leqslant\chi(G)$$

由于 G 是 $G+uv$ 的子图，显然有 $\chi(G)\leqslant\chi(G+uv)$。

设 $\chi(G\cdot uv)=k_1$，并记子为收缩 u 和 v 所得到的顶点，则在 $G\cdot uv$ 的 k_1 染色中，把分配给子的颜色分配给 u 和 v。即可得到 G 的一个 k_1 染色。于是 $\chi(G)\leqslant k_1=\chi(G\cdot uv)$。因此

$$\chi(G)\leqslant\min\{\chi(G+uv),\chi(G\cdot uv)\}$$

综合以上结论，有

$$\chi(G)=\min\{\chi(G+uv),\chi(G\cdot uv)\}$$　证毕。

以上定理的结论提供了求图的色数算法的基础。设 G 是有 p

个顶点的简单图。

关于 $\chi(G)$ 的算法:

(1) 如果 G 是K_p,则 $\chi(G) = p$。如果 G 不是K_p,令 $H = G$ 并按(2) 进行;

(2) 选取 H 的不相邻的一对不同顶点 u,v,作图 $H + uv$ 和 $H \cdot uv$, 并按(3) 进行;

(3) 令 H 是由(2) 得到的两个图。如果 H 是完全图,比如说有 k 个顶点,则 $\chi(H) = k$。如果 H 不是完全图,转入(2) 进行。

当所得到的图都是完全图,算法结束。由于图的加边不改变顶点个数,图的收缩减少顶点个数,所以经过有限步骤后,算法必定结束。从定理 6.1.6 可知,G 的色数是所得到的完全图的色数中最小者,因为完全图的色数等于它的顶点个数,$\chi(G)$ 是由算法生成的最小的完全图的顶点数。

贮藏问题是图的顶点染色在实际问题中的一个具体应用。

例 1 某一仓库要存放 n 种化学药品 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,其中某些化学品不能相碰,否则会引起化学反应甚至爆炸。所以为了预防,这个仓库应分割成若干个小仓库,,以便把这些不能相碰的化学品放在不同的小仓库中。试问这个仓库至少该分割成几个小仓库?

解 先建立一个图 G,其顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$分别代表化学品 $C_1, C_2, \cdots, C_n$。顶点 v_i 与 v_j 相邻当且仅当C_i 与 C_j 不能相碰。容易看出可以把 G 中不相邻的顶点所对应的化学品存放在一起。现在用 $\chi(G)$ 种颜色 $1, 2, \cdots, \chi(G)$ 去给 G 的顶点染色,使相邻的顶点染以不同的颜色。以 V_i 表示G 中染第i 色的所有顶点($i = 1, 2, \cdots, \chi(G)$),则 V_i 中任意两个顶点不相邻。所以 V_i 中顶点所对就的化学品可以放在同一个小仓库里,这个仓库至少应分割成 $\chi(G)$ 个小仓库。

6.2 平面图和五色定理

从上一节可以看出，要讨论地图的染色问题，只要讨论由地图所对应的图的顶点染色就可以。那么地图所对应的图与一般的图有什么区别呢？我们说，如把这类图的顶点放在一个恰当的位置(要求在同一个平面上)就能够使该图中任意两条边除端点外没有交叉点，而某些一般图并不一定具有这一性质。例如图 6.3 中的两个图 $K_{3,3}$ 和 K_5 就不具有这个性质。

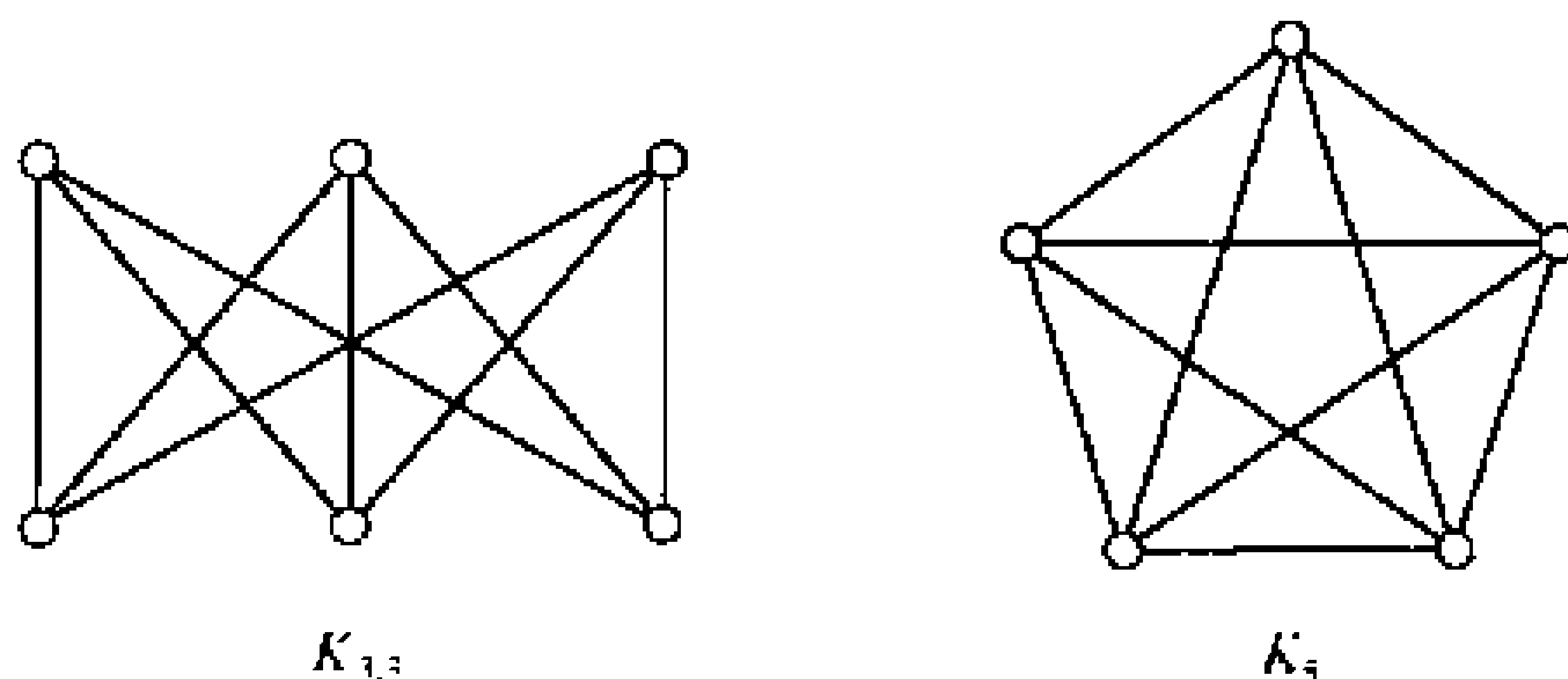


图 6.3

为了区别这两类图，我们给出如下定义。

定义 6.2.1 如果 G 能与这样的一个图 $\overline{G}$ 同构，其中 $\overline{G}$ 的顶点在同一个平面上，而 $\overline{G}$ 的边只可能在端点处相交，就称 G 为**平面图**，而称 $\overline{G}$ 为 G 的一个**平面嵌入**，或称 $\overline{G}$ 为 G 在平面上的实现。

例如，图 6.4 所示的图 G 是平面图，$\overline{G_1}$ 和 $\overline{G_2}$ 都是 G 的平面嵌入。但图 6.3 所示的 $K_{3,3}$ 和 K_5 均不是平面图，因为它们无法在平面上实现。请读者自己考虑。

平面图在实际配置安装电子元件的印刷电路板的设计与布线问题中是非常有用的。因为在一块印刷电路板的面上，要求线与线不能直接交叉。而这一点正好是平面图的特征。

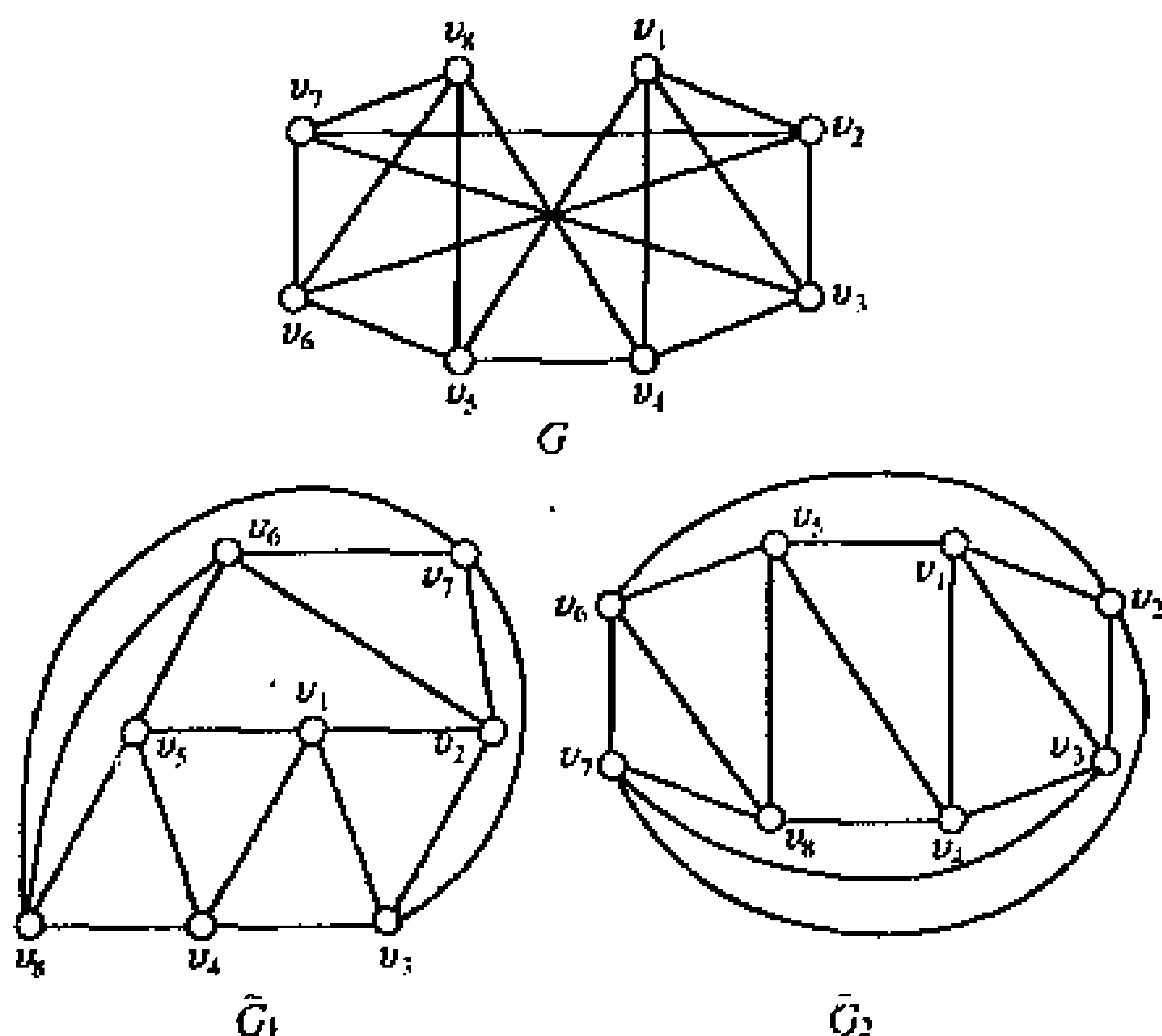


图 6.4

以后在我们说到平面图时，都是认为它已经在平面上实现了。

由于从地图构造而来的图是平面图，所以要证明四色猜想等价于证明平面图的色数不超过 4。

在前一节我们已叙述了四色定理的证明是相当困难的，许多数学家在它面前都无能为力。有趣的是五色定理的证明较为容易。在本节最后我们将介绍它的证明。下面我们先介绍平面图的一些性质。

定义 6.2.2 平面图 G 的边把整个平面分割成若干个连通区域，这些区域的闭包称为平面图 G 的面（包括外部无限区域，称为外部面）。分别用 $F(G)$ 和 $\varphi(G)$ 表示 G 的面的集合和面的个数。

例 1 图 6.5 所示的平面图 G 中，有六个面 f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6，其中 f_4 是外部面。明显地，连通图是树当且仅当 $\varphi(G)=1$。

定义 6.2.3 用 $b(f)$ 表示平面图 G 中围成面 f 的周界。用

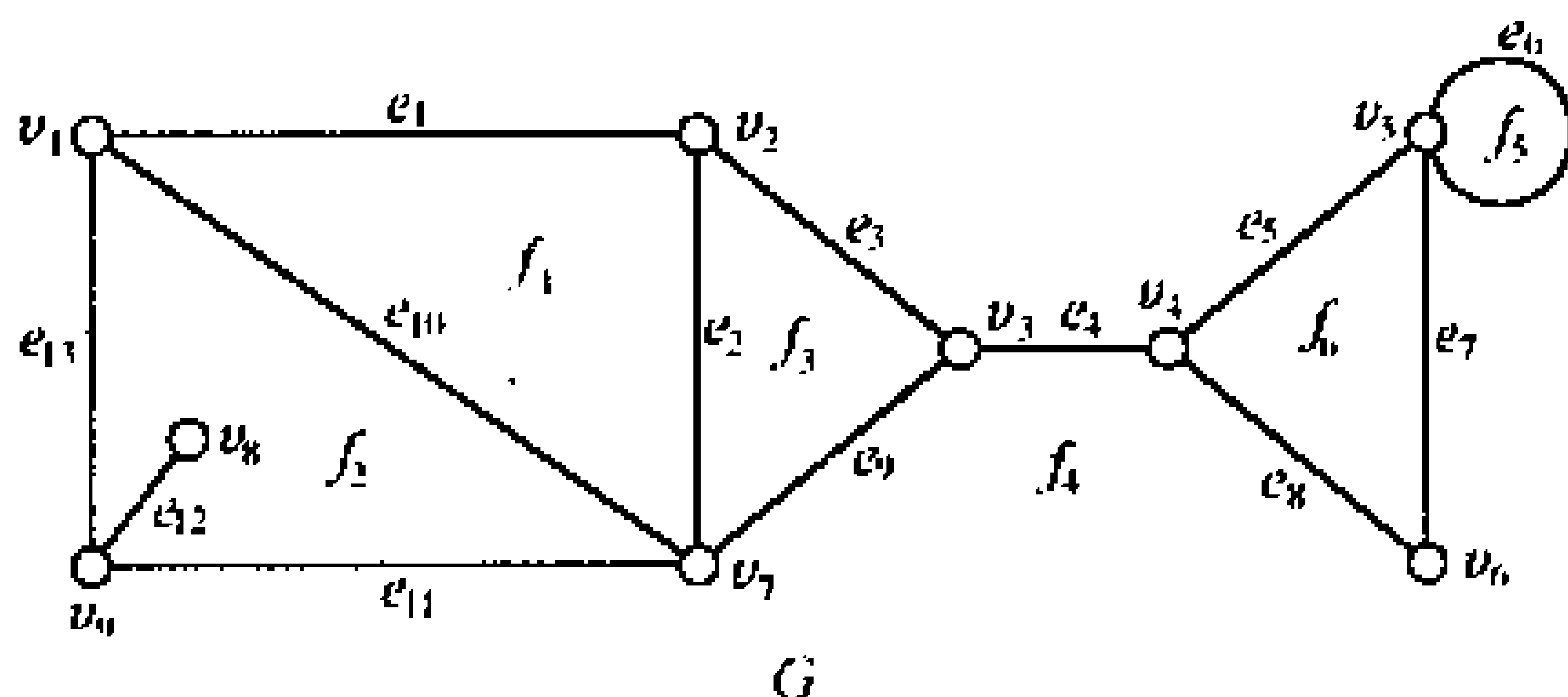


图 6.5

$d_G(f)$(或 $d(f)$)表示围成面 f 的周界的边数,称为 f 的度。

特别约定,如果割边 e 属于平面图 G 的面 f,那么在计算 $d_G(f)$ 时,e 要计算 2 次。

对于面 f 的周界作以下补充:若 G 是连通的,则 $b(f)$ 是一条闭迹;若 G 内有割边,则 $b(f)$ 中 f 内的每条割边都被这条闭途径通过 2 次;当 f 无割边且无环时,$b(f)$ 就是 G 的一个回路。例如,在图 6.5 的平面图 G 中。

$$b(f_1) = v_1e_1v_2e_2v_7e_{10}v_1$$

$$b(f_2) = v_1e_{10}v_7e_{11}v_9e_{12}v_8e_{12}v_9e_{13}v_1$$

$$b(f_4) = v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_5e_6v_5e_7v_6e_8v_4e_4v_3e_9v_7e_{11}v_9e_{13}v_1$$

$d_G(f_1) = 3, d_G(f_2) = 5$ 和 $d_G(f_4) = 11$。

根据上面的定义,平面图 G 的每一条非割边恰好含于两个面的周界。而每一条割边虽然只在一个面的周界上,但在计算这个面的度数时,被计算了两次。因此在计算各个面的度的总和时,G 的每条边都恰好计算两次,这就推出了与定理 1.3.1 类似的结论。

定理 6.2.1 如果 G 是平面图,则

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2q(G)$$

推论 6.2.2 在任何平面图中,度为奇数的面的个数必为偶数。

在平面图中，有一个涉及平面图的点数、边数和面数这三者关系的重要公式——Euler 公式。

定理6.2.3 设 G 是一个有 p 个顶点、q 条边和 φ 个面的连通平面图，则

$$p - q + \varphi = 2 \tag{1}$$

证明 我们对面数 φ 进行归纳证明。由于 G 是连通的平面图，所以当 $\varphi = 1$ 时，G 是树，因此 $q = p - 1$。故

$$p - q + \varphi = 2$$

假设对于一切面数少于 $\varphi(\varphi > 1)$ 的所有连通平面图，Euler 公式成立。现假设 G 是一个有 p 个顶点、q 条边和 φ 个面的连通平面图。由于 $\varphi > 1$，G 至少有一个回路，取这回路中的一条边 e，则 $G - e$ 仍是连通平面图，有 p 个顶点，$q - 1$ 条边和 $\varphi - 1$ 个面，根据归纳假设。

$$p - (q - 1) + (\varphi - 1) = 2$$

即

$$p - q + \varphi = 2$$

证毕。

从 Euler 公式可以看出，对于一个平面图，虽然可以有不同形状的平面嵌入，但它们的面数总是不变的，即为 $q - p + 2$（连通的情况下）。在使用此公式时要注意它只适合于连通的平面图，而对于非连通的平面图的点数、边数、面数及连通分支个数之间的关系可参见习题 6.10。

利用 Euler 公式，可获得平面图中一些重要结论。

推论6.2.4 若 G 是阶为 $p(p \geqslant 3)$ 的平面图，G 的最短回路的长度为 $g(g \geqslant 3)$，则

$$q(G) \leqslant \frac{g}{g-2}p - \frac{2g}{g-2} \tag{2}$$

证明 显然只要对连通的平面图证明式(2) 成立即可。现对

G 的每个面 f,由假设 $d_G(f) \geqslant g$,因此

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) \geqslant g \cdot \varphi(G)$$

由定理 6.2.1 知

$$2q(G) = \sum_{f \in F(G)} d_G(f)$$

因此

$$\varphi(G) \leqslant \frac{2}{g} q(G)$$

因 G 是连通的平面图,根据 Euler 公式,有

$$2 = p - q(G) + \varphi(G) \leqslant p - q(G) + \frac{2}{g} q(G)$$

因此

$$q(G) \leqslant \frac{g}{g-2} p - \frac{2g}{g-2}$$

证毕。

特别地,对一般的简单平面图 G,有

$$q(G) \leqslant 3p(G) - 6 \tag{3}$$

例 2 证明 $K_{3,3}$ 和 K_5 是非平面图。

证明 对 K_5,含有 5 个顶点,10 条边。因此 K_5 不满足式(3),所以 K_5 不是平面图。

对于 $K_{3,3}$,含有 6 个顶点,9 条边,但最短回路的长度为 4,故 $K_{3,3}$ 不满足公式(2),因此 $K_{3,3}$ 也不是平面图。

例 3 平面上有 n 个点,其中任两个点之间的距离至少是 1。证明在这 n 个点中,距离恰好为 1 的点对数至多是 $3n-6$。

证明 首先建立图 $G=(V,E)$,其中 V 就取平面上给定的 n 个点(位置也不变),两个点之间的距离为 1 时,该两顶点之间用一条直线段连接。所得图是一个 n 阶简单图。我们只要证明 G 是平面图即可。

若 G 中存在两条不同的边 $x_{i_1}x_{i_2}$ 和 $x_{j_1}x_{j_2}$ 相交于非端点处 O,

如图 6.6 所示，记它们的夹角为 $\theta(0<\theta<\pi)$。

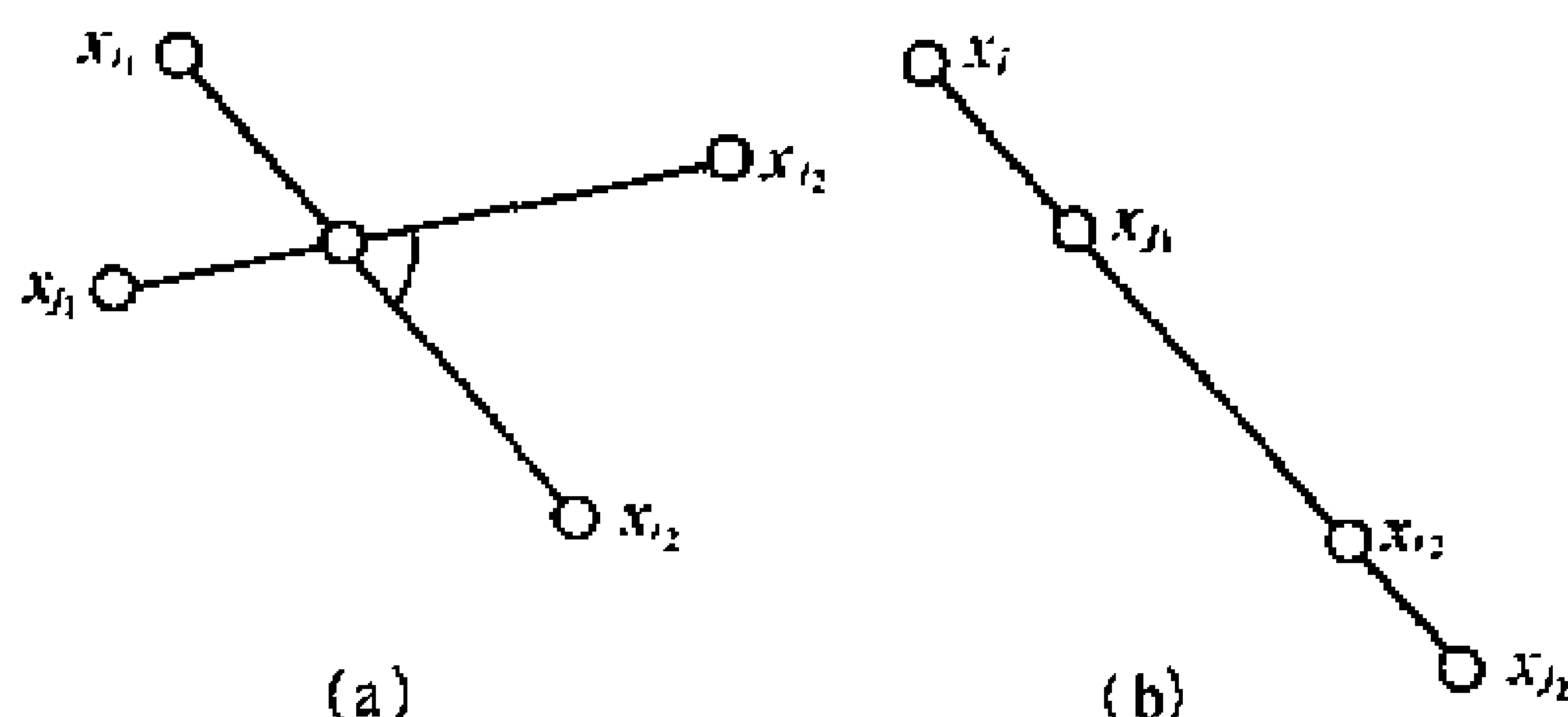


图 6.6

若 $\theta=\pi$，这时的情形如图 6.6(b) 所示，存在两点其距离小于 1，这是不可能的。

因而 $0<\theta<\pi$。由于 $\left|x_{i_1}x_{i_2}\right|=1$，$\left|x_{j_1}x_{j_2}\right|=1$，$x_{i_1}$，$x_{i_2}$，$x_{j_1}$，$x_{j_2}$ 中至少有两个点，从交点 O 到这两点的距离不超过 $\frac{1}{2}$，不妨设 $\left|Ox_{i_1}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，$\left|Ox_{j_1}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，则必有 $\left|x_{i_1}x_{j_1}\right|<1$，矛盾。

这就证明了 G 是平面图。由公式(3) 得

$$q(G)\leqslant 3n-6$$

即这 n 个点中，距离为 1 的点对数不超过 $3n-6$。

推论 6.2.5 设 G 是简单平面图，则 $\delta(G)\leqslant 5$。

证明 反证法：假设 G 是一个简单平面图，但 $\delta(G)\geqslant 6$，则

$$2q(G)=\sum_{v\in V(G)}d_G(v)\geqslant 6p(G)$$

但由式(3) 得

$$2q(G)\leqslant 6p(G)-12$$

矛盾。故对每一个简单平面图 G，有 $\delta(G)\leqslant 5$。 证毕。

Euler 公式不仅适用于连通的平面图，对于凸多面体也是适合的。因为凸多面体可以“绷”在一个球面上，再作一个球极投影(如图 6.7 所示)，凸多面体就变成为平面上一个连通平面图。其中多

面体的含北极 N 的面就变为平面图的外部面。多面体的顶点及棱分别对应平面图上的顶点和边。明显地，这类平面图不含割边，每个顶点的度和每个面的度至少是 3。

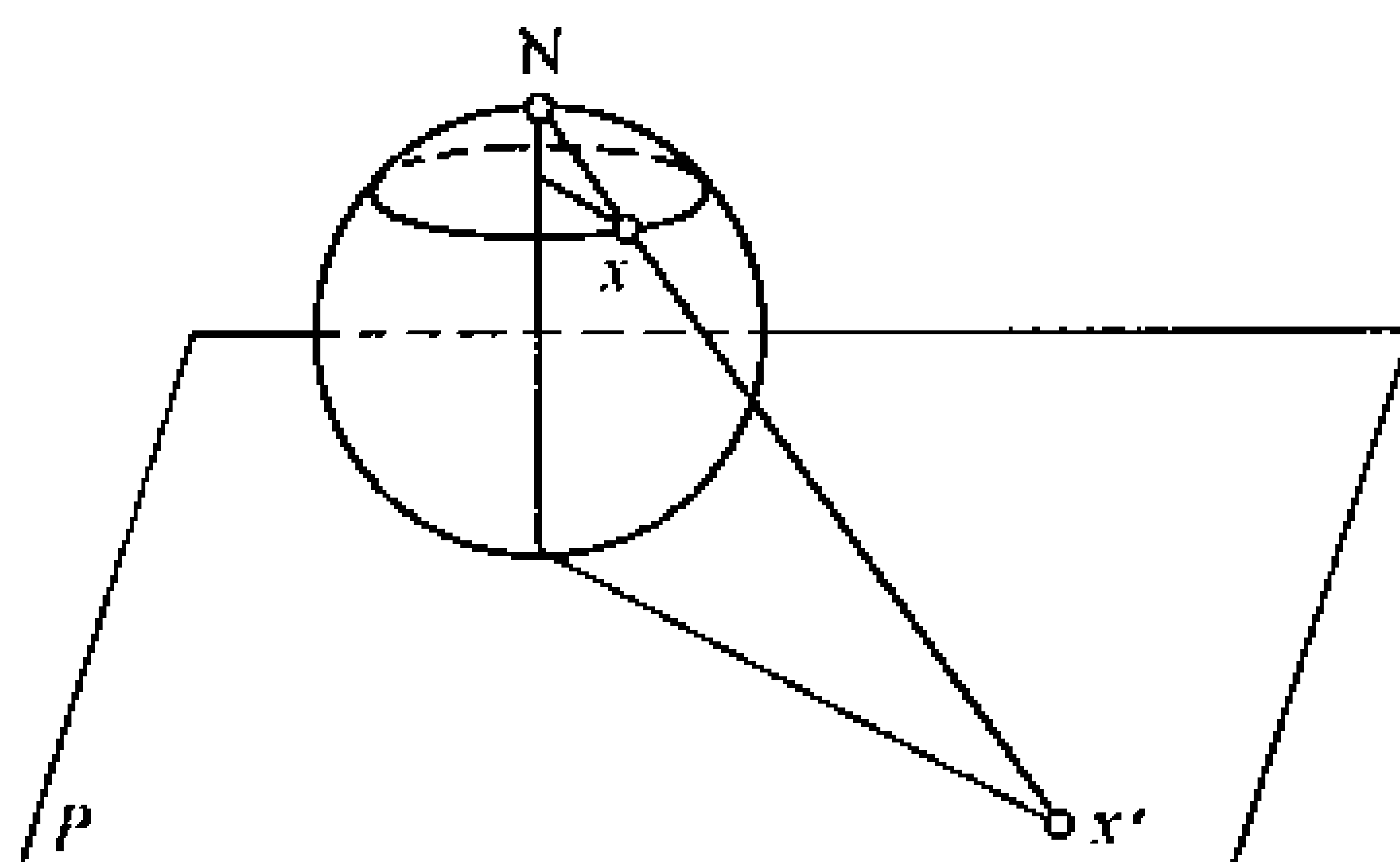


图 6.7

图 6.8 给出了五种正多面体所对应的平面图。利用 Euler 公式，可以获得关于正多面体的一个重要结果。

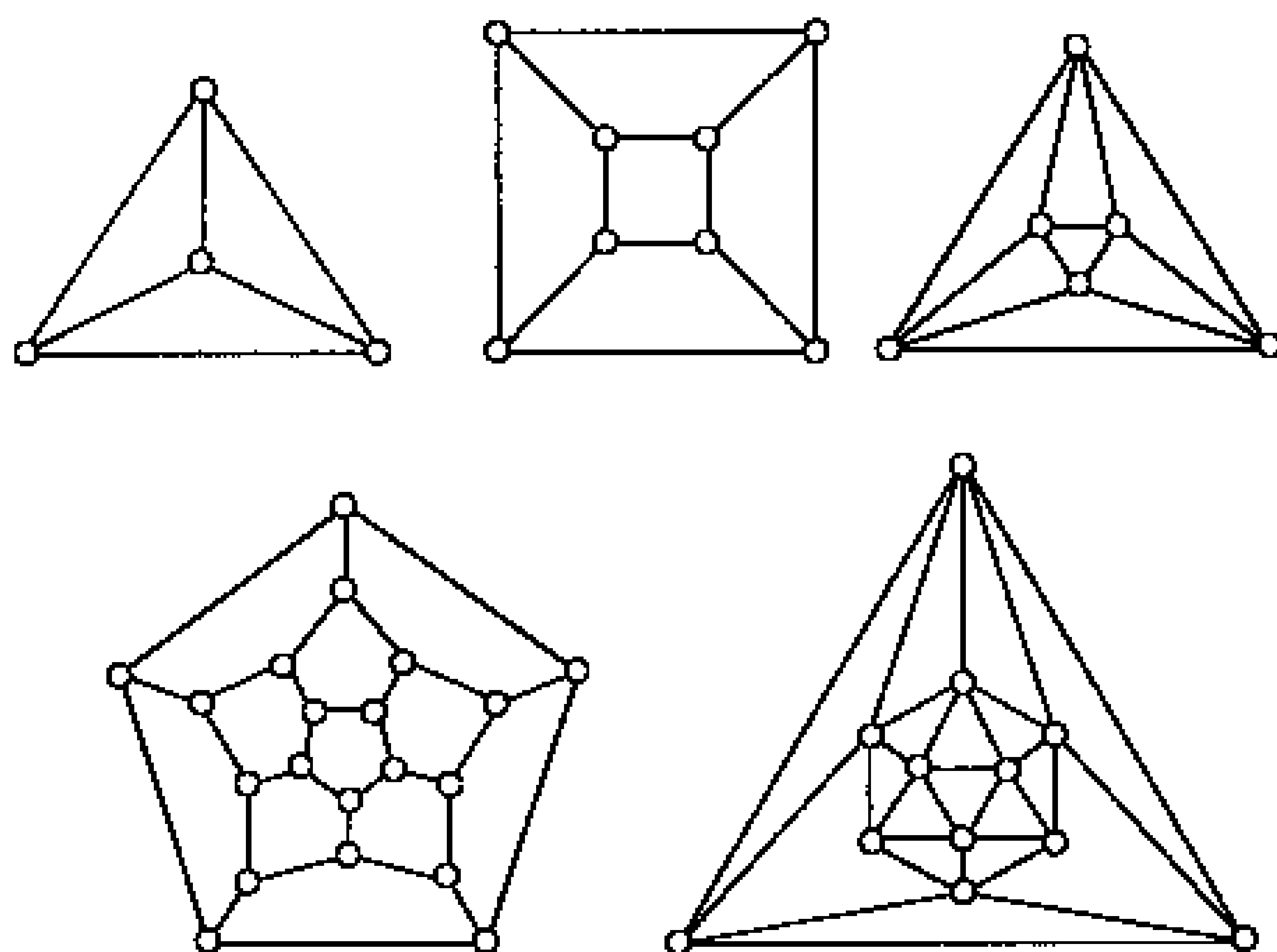


图 6.8

定理 6.2.6 存在且只存在 5 种正多面体：正四面体、正方体、正八面体、正十二面体和正二十面体。

证明　首先容易看出一个正多面体在平面上的投影所得平面图是 2 连通的正则图，而且每个面的度相同，即为 $2q(G)/\varphi(G)$。我们只要证明满足这三条的平面简单图有且只有如图 6.8 所示的 5 个平面图即可。

设平面图 G 是 r 正则、每个面的度为 r^*，则 $r \geq 3, r^* \geq 3$，并且

$$2q(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u) = r \cdot p(G) \tag{4}$$

$$2q(G) = \sum_{f \in F(G)} d_G(f) = r^* \varphi(G) \tag{5}$$

将式(4)、(5) 与 Euler 公式

$$p(G) - q(G) + \varphi(G) = 2$$

联立，解得

$$p(G) = 4r^*(2r + 2r^* - rr^*)^{-1}$$

$$q(G) = 2rr^*(2r + 2r^* - rr^*)^{-1}$$

$$\varphi(G) = 4r(2r + 2r^* - rr^*)^{-1}$$

由 $p(G)$、$q(G)$ 和 $\varphi(G)$ 均大于 0，可得

$$2r + 2r^* - rr^* > 0$$

即

$$(r-2)(r^*-2) < 4 \tag{6}$$

满足上式且至少为 3 的正整数 r 和 r^* 只有以下五对，在下表中也同时给出相应的 $p(G)$、$q(G)$ 和 $\varphi(G)$。

r	r^*	$p(G)$	$q(G)$	$\varphi(G)$	相应的正多面体
3	3	4	6	4	正四面体
3	4	8	12	6	正方体
3	5	20	30	12	正十二面体
4	3	6	12	8	正八面体
5	3	12	30	20	正二十面体

对应于上表所列出的 5 组数值确实存在着相应的正多面体，见图 6.8 所示。　　证毕。

例 4　对哪些 n,存在 n 条棱的凸多面体?(1968 年波兰数学奥林匹克试题)

解　以多面体的顶点为图的顶点,以多面体的棱为图的边,组成一个平面图 G,则 $p(G)\geqslant 4$,$\varphi(G)\geqslant 4$,每个面的度至少是 3。由 Euler 公式,$q(G)\geqslant 6$,即没有棱数小于 6 的凸多面体。

四面体是棱数为 6 的凸多面体。

若有 7 条棱的凸多面体,则存在满足上述条件,$q(G)=7$ 的平面图,由 Euler 公式得

$$p(G)+\varphi(G)=q(G)+2=9 \tag{7}$$

但 G 的每个面的度至少是 3,故

$$2q(G)=\sum_{f\in F(G)} d_G(f)\geqslant 3\varphi(G)$$

即

$$\varphi(G)\leqslant \frac{2}{3}q(G)=\frac{14}{3}$$

但 $\varphi(G)$ 为整数,所以 $\varphi(G)\leqslant 4$。同样 $p(G)\leqslant 4$,于是

$$p(G)+\varphi(G)\leqslant 8$$

这与式(7)矛盾。所以 7 条棱的凸多面体是不存在的。

现对 $k\geqslant 4$,以 k 边形为底的棱锥即为 $2k$ 条棱的凸多面体。若把底为 $k-1$ 边形的棱锥中,底角处的一个三面角"锯掉一个尖儿",得到的是一个有 $2k+1$ 条棱的凸多面体,总之,当 $n\geqslant 6$,$n\neq 7$ 时,才有 n 条棱的凸多面体。

找出一个图是平面图的充分必要条件的研究曾经持续了几十年,直到 1930 年波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowski)给出了平面图的一个非常简洁的特征。我们在这里只作简单介绍,叙述库拉托夫斯基定理,而由于它的证明较长,在此不作证明。

给定图的一个剖分是对图 G 实现有限次下述过程而得到的另一个图 G':删去 G 的一条边 uv 后,添加一个新的顶点 w 及两条新的边 wu、wv。也就是说在 G 的边上插入有限个顶点便可得到

G 的一个剖分图 G'。图 6.9 分别给出了 K_5 和 $K_{3,3}$ 的一个剖分。

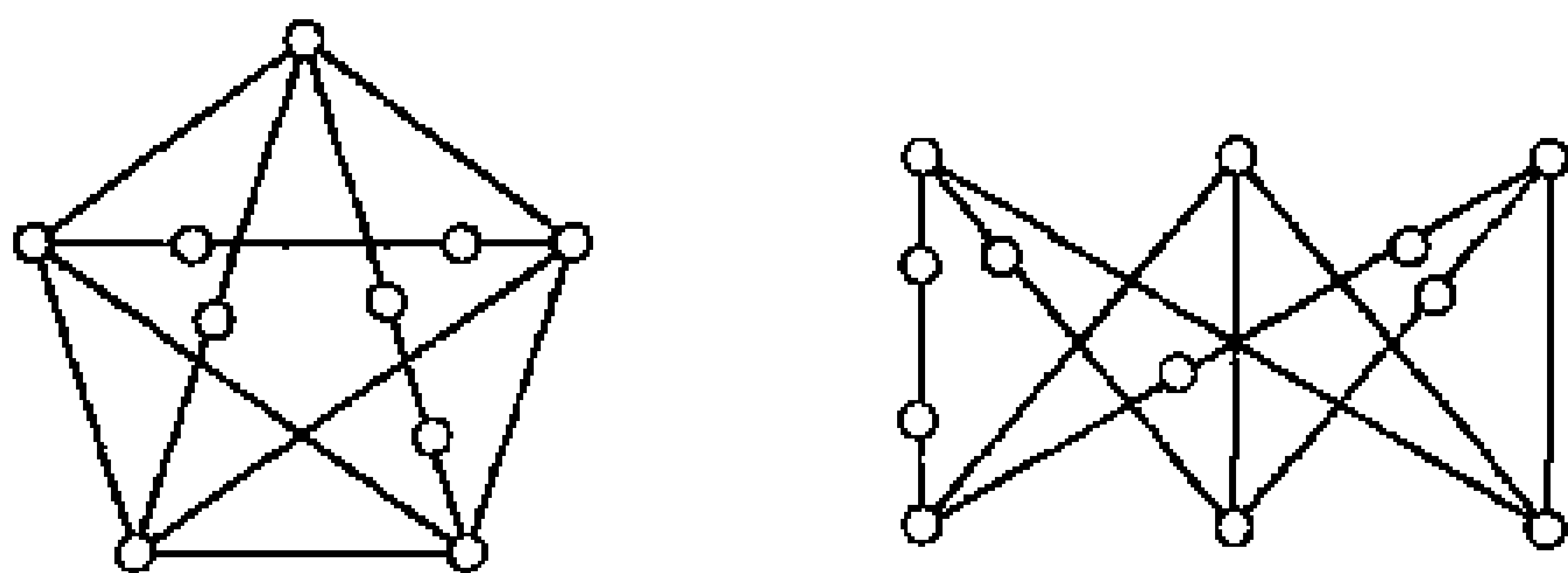


图 6.9

定理 6.2.7(Kuratowski 定理) 图 G 是平面图当且仅当它的任何子图都不是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分。

例如，在图 6.10(a) 所示的图 G 中，存在一个子图 H，它是 $K_{3,3}$ 的一个剖分，所以 G 不是平面图。

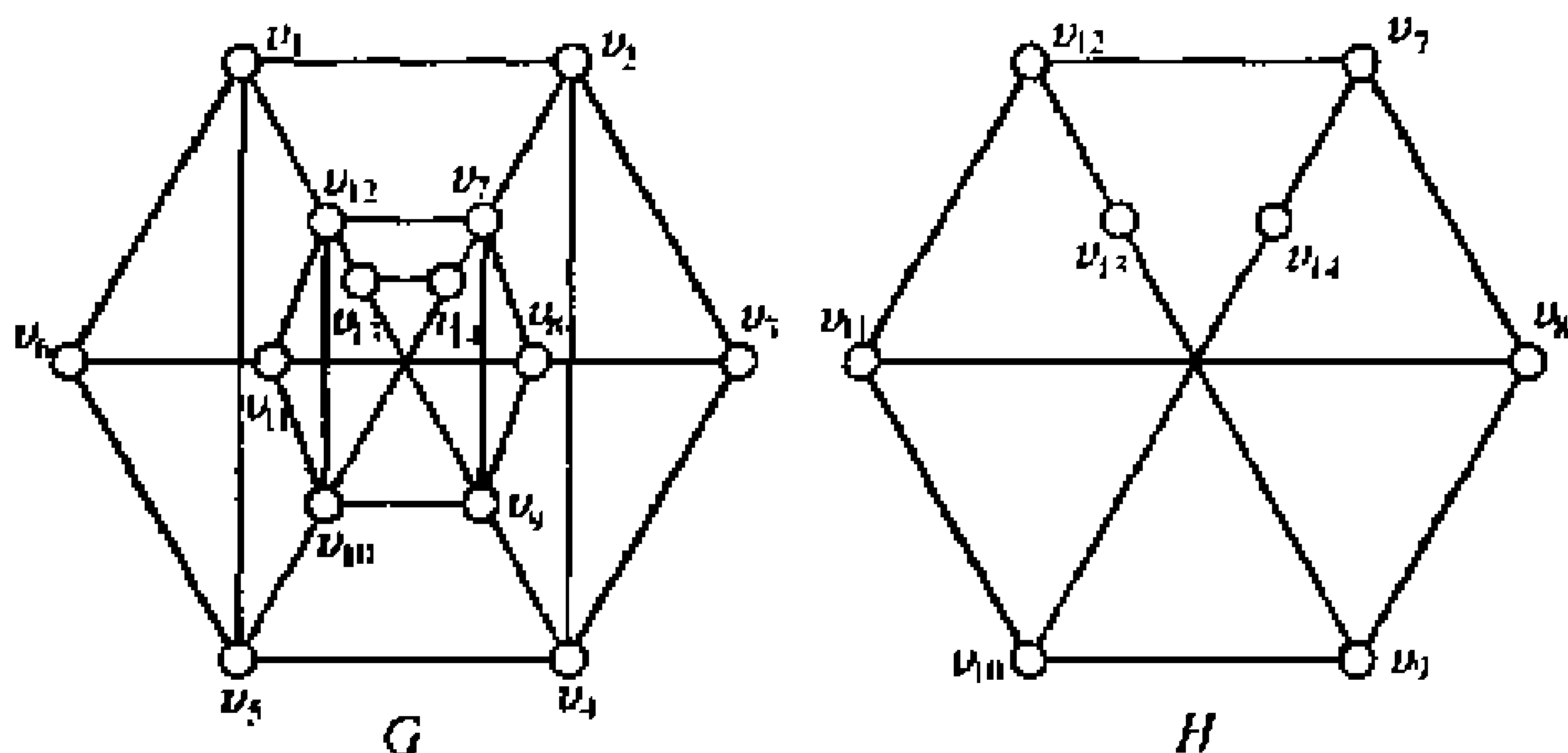


图 6.10

除以上平面图的判别以外，在 1937 年瓦格纳(K.Wagner)给出了平面图的另一判别准则。

让 $E_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 是 G 的一个边子集，e_i 的两个端点为 u_i、v_i($i = 1,2,\cdots,k$)。在 G 中除去边子集 E_1，并分别将 u_i 与 v_i 重合为一个新的顶点 w_i($i = 1,2,\cdots,k$)，所得图称为 G 收缩 E_1，记为 $G \cdot E_1$。图 6.11 给出了 Petersen 图 G 关于边子集 $E_1 = \{e_1, e_2,$

$e_3, e_4, e_5\}$ 的一个收缩，所得图 $G \cdot E_1$ 为 K_5。

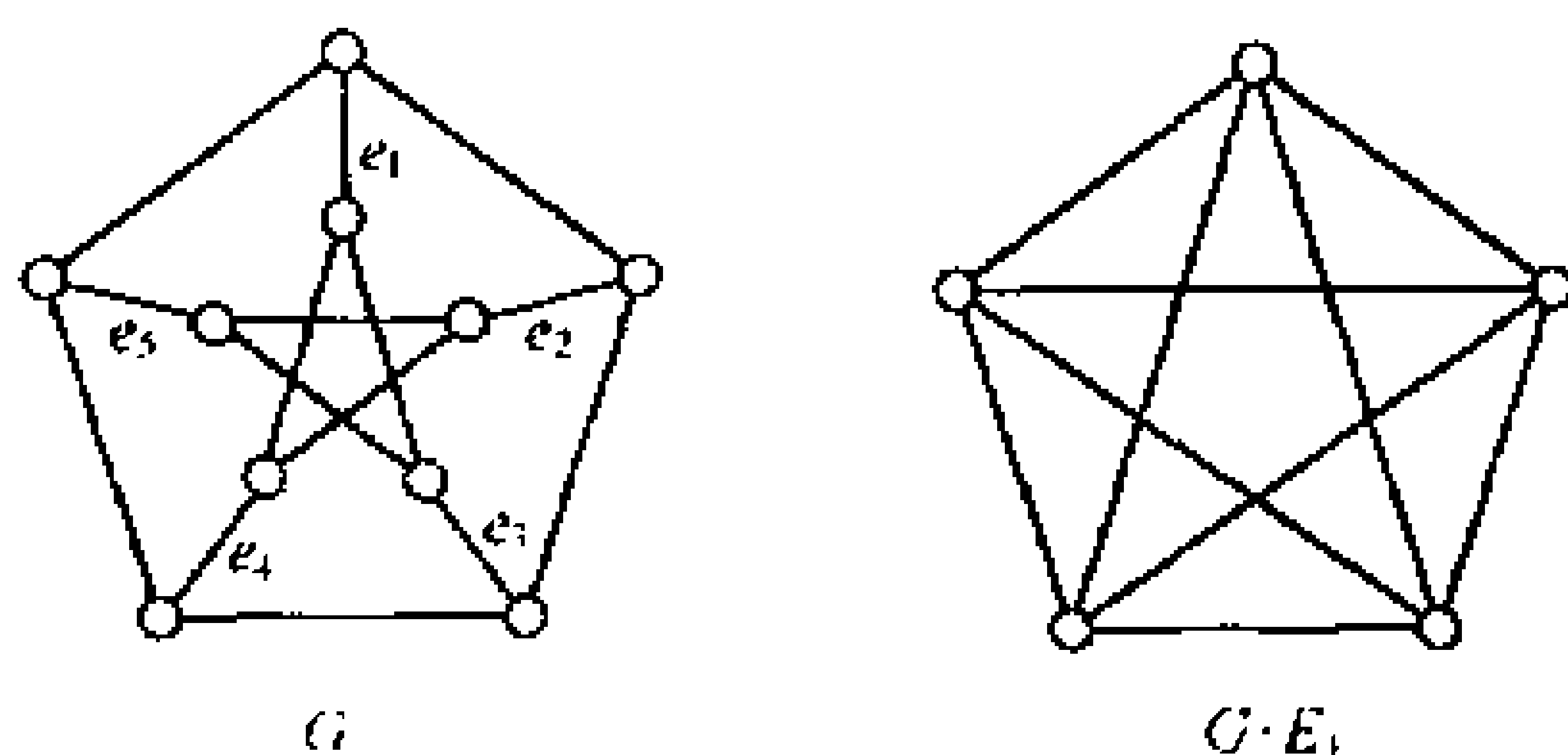


图 6.11

定理 6.2.8(Wagner 定理)　一个图为平面图当且仅当它的任何子图都不能收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$。

证明　略。

由此定理我们即可得 Petersen 图不是平面图。

最后我们介绍五色定理的证明。

定理 6.2.9　每个平面图的色数不超过 5。

证明　只要对简单图讨论即可。我们对平面图的顶点数 p 进行归纳。

当 $p \leqslant 5$ 时，结论是显然成立的。

现归纳假设对顶点数为 $p-1$ 的平面图结论成立。下设 G 是顶点数为 p 的简单平面图。我们设法证明 $\chi(G) \leqslant 5$。

反证法：设 $\chi(G) \geqslant 6$。

首先由推论 6.2.5 知 $\delta(G) \leqslant 5$，设 $v_0 \in V(G)$，$d_G(v_0) = \delta(G)$。作 $G' = G - v_0$。此时 G' 是阶为 $p-1$ 的简单平面图，由归纳假设得，$\chi(G') \leqslant 5$。如果 $\chi(G') < 5$，则只要将第五种颜色分配给 v_0，即可得 $\chi(G) \leqslant 5$，矛盾，故 $\chi(G') = 5$。设已给 G' 的顶点染上五种颜色 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$，使 G' 中相邻顶点染以不同的颜色。

如果 $d_G(v_0) < 5$，则只要将五种颜色中，在 $N_G(v_0)$ 内不出现的一种颜色分配给 v_0，就有 $\chi(G) \leqslant 5$，矛盾。故 $d_G(v_0) = 5$。设 v_0 的五个邻点依次为 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5(见图 6.12 所示)。下分两种情况。

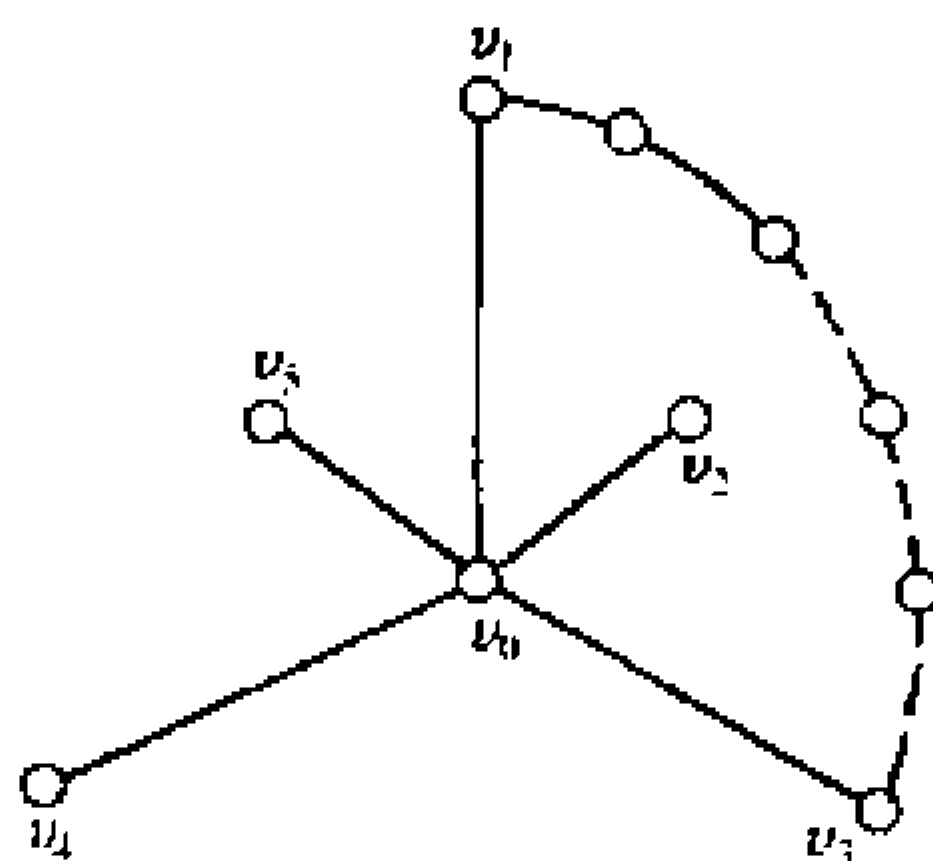


图 6.12

情况一　在 G' 中，v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 所染的颜色有相同的，则只要将在 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 中没有出现的这种颜色分配给 v_0，就有 $\chi(G) \leqslant 5$，矛盾。

情况二　G' 的所有 5 染色中，v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 所染的颜色互不相同。

不妨取 G' 的一个 5 染色，使 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 所染的颜色分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$。让 V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 为 G' 的色划分。

现考虑 G' 的子图 $G'_{1,3} = G'[V_1 \cup V_3]$。如果在 $G'_{1,3}$ 中 v_1 与 v_3 不在同一个连通分支中，则可以把 $G'_{1,3}$ 中含 v_1 的这个连通分支内的 α_1 和 α_3 两种颜色互换，而 G' 中其余顶点颜色不变，就得 G' 的另一个 5 染色。此时 v_1 与 v_3 同时染上 α_3 这种颜色，与该情况的假设矛盾。所以 v_1 与 v_3 在 $G'_{1,3}$ 的同一个连通分支中，于是在 $G'_{1,3}$ 中存在一条从 v_1 到 v_3 的路，记为 $P(v_1, v_3)$(见图 6.12)。

同样考虑子图 $G'_{2,4} = G'[V_2 \cup V_4]$，在 $G'_{2,4}$ 中存在从 v_2 到 v_4 的路 $P(v_2, v_4)$。

从这二条路 $P(v_1, v_3)$ 和 $P(v_2, v_4)$ 的构造可知，$P(v_1, v_3)$ 与 $P(v_2, v_4)$ 不相交(即无公共顶点)。

但在 G 中，回路 $C = v_0 v_1 P(v_1, v_3) v_3 v_0$ 将 v_2 与 v_4 分隔在两个不同的区域内，而 G 是平面图，所以路 $P(v_2, v_4)$ 必然和 C 相交于某个顶点。由于 $V(P(v_2, v_4)) \subseteq V(G - v_0)$，因此 $P(v_2,$

v_4) 与 $P(v_1, v_3)$ 相交于一个顶点，矛盾。 证毕。

虽然四色猜想已借助于计算机而获得证明，但并不是说所有有关平面图的顶点染色问题都得以解决了，所存的问题还很多。如无需借助于计算来证明四色定理仍然是一个未获解决的问题；什么样的地图只需三种颜色就可以区分相邻的地区，我们现在还不能回答这个问题；再一个问题就是至今没有找到一个好的办法来确定图的色数。所以图的顶点染色问题仍是图论中一个重要的、有价值的研究领域。

最后讨论非平面图的平面分解问题。

一个非平面图是不能嵌入在一个平面上的，但它们可分成若干个子图，分别可嵌入在一些平面上。若 G 可表示为若干个平面图的并图，称这种平面图的最小数为 G 的**厚度**，记为 $\theta(G)$，于是 $\theta = 1$ 当且仅当 G 是平面图。

易见，研究一个非平图的厚度是有实际意义的。例如在设计一个印刷电路时，需要把设计好的电网络在平面上实现。如果不能在一块印刷板上实现，则至少需要几块印刷电路板来实现呢？

然而，不幸的是，关于非平面图的厚度问题是一个比较复杂的问题，至今为止，一个任意非平面图的厚度是一个难于确定的问题。

对于一些特殊的图，它们的厚度已确定。例如，$\theta(K_p) = \left[\frac{p+7}{6}\right]$ $p \neq 9, 10$，又如，$\theta(K_{p,p}) = \left[\frac{p+5}{4}\right]$，$\theta(K_9) = 3$，$\theta(K_{10}) = 3$ 等等。

关于厚度，有如下平凡的下界。

定理 6.2.10 设 G 是具有围长 g 的一个非平面图，则

$$\theta(G) \geqslant \left[\frac{q(G)(g-2)}{g(p(G)-2)}\right]$$

其中 $[m]$ 表示不小于 m 的最小整数($g \geqslant 3$)。

证明 因 G 是非平面图，$g \geqslant 3$，因此，对于任一平面图，由推

论6.2.4得

$$0 < q(G) \leqslant \frac{g(p(G)-2)}{g-2}$$

即

$$0 < \frac{q(G)(g-2)}{g(p(G)-2)} \leqslant 1$$

这意味着定理成立。 证毕。

最后介绍交叉数概念。要把一个非平面图 G 画在一个平面上，一定会有一些边，除端点外可能还有公共点即有一些也会出现交叉，最小交叉的数目称为 G 的**交叉数**。

到目前为止，只有少数非平面的交叉数被确定。对任何一个图，目前还没有一个公式给出交叉数，也没有给出厚度和交叉数之间的关系。

6.3 边染色

本节所讨论的图仅限于无环图。

定义6.3.1 无环图 G 的一个**k 边正常染色**是指 k 种颜色 $1, 2, \cdots, k$，对于 G 的各边的一个分配，使得相邻的两条边染以不同的颜色。若 G 有 k 边正常染色，则称 G 是 **k 边可染色的**。G 的**边色数**是指 G 为 k 边可染色的最小值 k，记为 $\chi'(G)$。若 $\chi'(G) = k$，则称 G 是 **k 边色的**。

例如，图6.13中的图 G_0 是4边可染色的，其中 a、g 染第一色，b、h 染第二色，c、e 染第三色，d、f 染第四色。可以验证 G_0 不存在3边正常染色，故 $\chi'(G_0) = 4$。

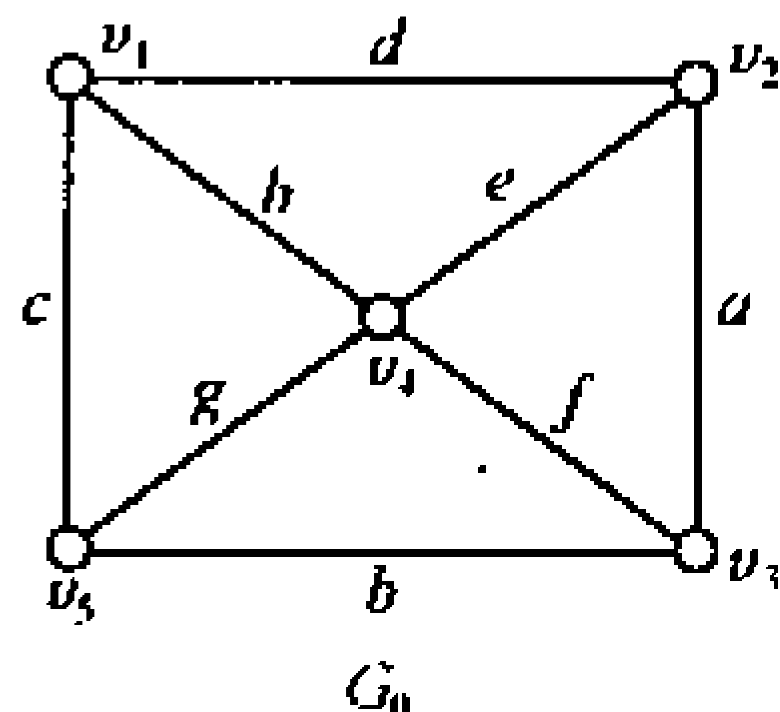


图6.13

从定义可见，对任何自然数 k，只要 $\chi'(G) \leqslant k$，G 是 k 边可染色的。又若 G

的最大度为Δ,则必须有$\chi'(G)\geqslant\Delta$。从图6.13的G_0可知,这个不等式允许出现等号,又在该图G_0中去掉一边h,容易验证$\chi'(G_0-h)=4$,而$\Delta(G_0-h)=3$,即$\chi'(G)\geqslant\Delta(G)$也可以出现严格不等式。下面我们将证明对于二分图$G$,有$\chi'(G)=\Delta(G)$。为了证明此结论,我们先讨论$G$的一个$k$边正常染色与对集之间的关系。

设G有一个k边正常染色,置E_i为G中所有染以第i种颜色的边的全体,则$E_1,E_2,\cdots,E_k$是G的k个边不相交的对集,并且

$$E(G)=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_k$$

因而$E_1,E_2,\cdots,E_k$是$E(G)$的一个划分。即G的一个k边正常染色可以看作是把$E(G)$划分为k个互不相交的对集$E_1,E_2,\cdots,E_k$(E_i可以是空集)。

反之,如果G的边集$E(G)$可以划分为k个互不相交的对集$E_1,E_2,\cdots,E_k$,则只要把E_i中的边染上第i色,就能得到G的一个k边正常染色。因而,下面我们直接用$\mathscr{E}=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$表示$G$的一个$k$边正常染色,其中$E_1,E_2,\cdots,E_k$是$E(G)$的一个对集划分。

从以上两者之间的关系可以看出,要证明二分图G的边色数为$\Delta(G)$,就只要证明二分图G的边集$E(G)$可以划分为$\Delta(G)$个互不相交的对集。

定理 6.3.1 二分图$G=(X,Y;E)$的边色数$\chi'(G)=\Delta(G)$。

证明不妨设$|X|\geqslant|Y|$。首先在G中加上$|X|-|Y|$个新顶点,将Y扩充为Y^*,使$|X|=|Y^*|$。记$G_1=(X,Y^*;E)$。再在G_1中,依次将X中度数最小的顶点与Y^*中度数最小的顶点加一条新边,直到X和Y^*中各点的度为$\Delta(G)$为止。这样得到一个含G的$\Delta(G)$正则二分图G^*(G^*可以不是简单图),图6.14给出一个图例,虚线表示新增加的边。

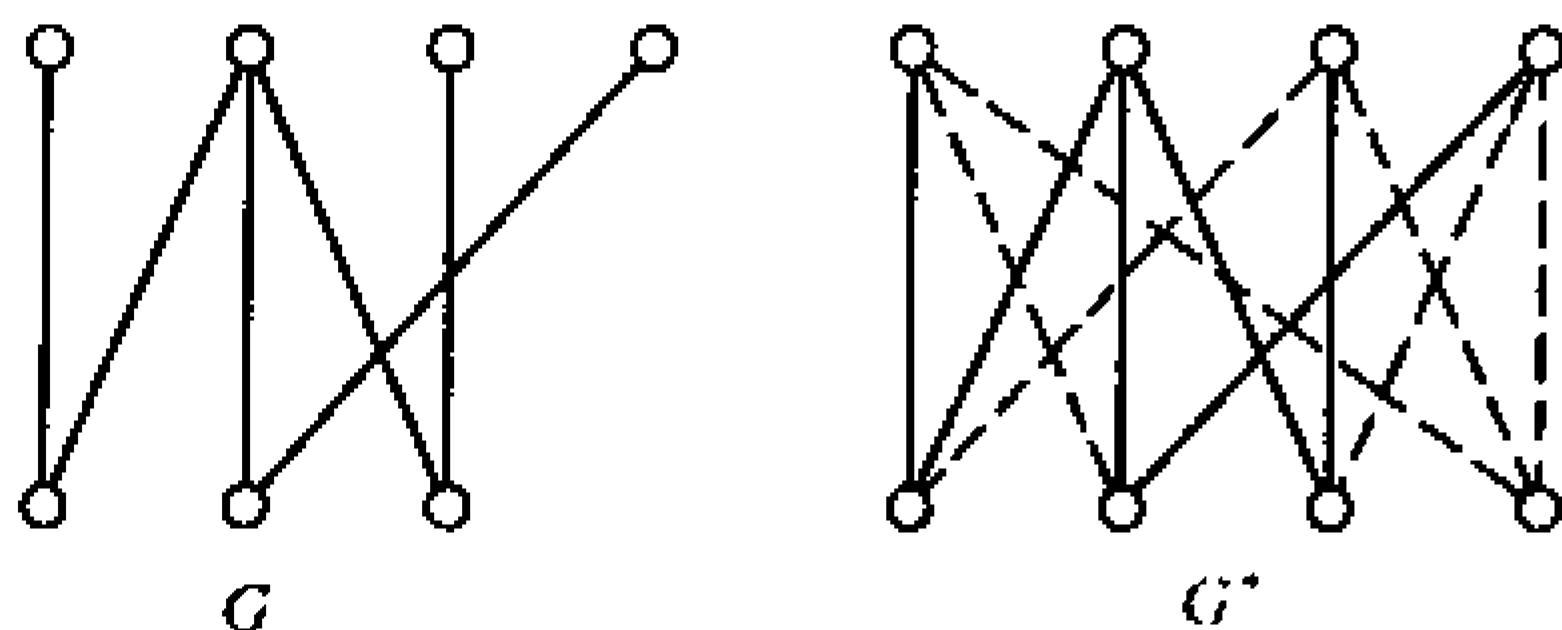


图 6.14

应用习题 5.15，G^* 中有 $\Delta(G^*) = \Delta(G)$ 个完美对集 M_1，$M_2,\cdots,M_{\Delta(G)}$，使

$$E(G^*) = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{\Delta(G)}$$

取 $E_i = E(G) \cap M_i, i = 1,2,\cdots,\Delta(G)$，则 $E_1,E_2,\cdots,E_{\Delta(G)}$ 是 $E(G)$ 的一个对集划分。故 $\chi'(G) \leqslant \Delta(G)$，因而有 $\chi'(G) = \Delta(G)$。 证毕。

对于非二分图 G 来说，$\chi'(G) = \Delta(G)$ 就未必成立。如图 6.13 所示的 G_0，$\chi'(G_0 - h) = 4 > \Delta(G_0 - h) = 3$。Vizing(1964 年）和 Cupta(1966 年）各自独立地得出一个重要的结论：

定理 6.3.2 若 G 是简单图，则

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

证明 我们只要证明 $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$。

对边数 $q(G)$ 进行归纳。

当 $q(G) = 0$ 时，G 为空图，显然有 $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$。设对于任何一个具有 $q(G) - 1$ 条边的简单图 G_1，$\chi'(G_1) \leqslant \Delta(G_1) + 1$ 成立。取 $e_1 = xy_1 \in E(G)$，于是

$$\chi'(G - xy_1) \leqslant \Delta(G - xy_1) + 1 \leqslant \Delta(G) + 1$$

因此可以假设 $G - xy_1$ 已经有了一个 $\Delta(G) + 1$ 边正常染色 $\mathscr{C}_1$，亦即图 G 中除边 xy_1 外一切其余的边都已用 $\Delta(G) + 1$ 种颜色 $\{1,2,\cdots,\Delta(G) + 1\}$ 正常染色，以下将通过对边的染色进行调整最后能

得到整个图 G 的一个 $\Delta(G)+1$ 边正常染色。

我们约定如果与顶点 v 关联的边均未染某种颜色 i_0，就称顶点 v 缺少 i_0。考虑前述的图 G 中除边 xy_1 外一切其余的边的 $\Delta(G)+1$ 边正常染色 $\mathscr{E}_1$。因 G 的最大度为 $\Delta(G)$，因此它的每个顶点至少缺少 $\Delta(G)+1$ 种颜色里的某一种。设 x 缺少颜色 s，y_1 缺少颜色 t_1。现在令与 x 关联的颜色为 t_1 的那条边为 xy_2，设 y_2 缺少颜色 t_2。再令与 x 关联颜色为 t_2 的那条边为 xy_3，设 y_3 缺少颜色 t_3。继续进行上面的过程。当选好边 xy_h 时，如图 6.15(a) 那样。图中边 xy_1 用虚线给出，表示没有染色；顶点旁边圈里的数字为该点缺少的颜色；边上的数字表示这条边的颜色。

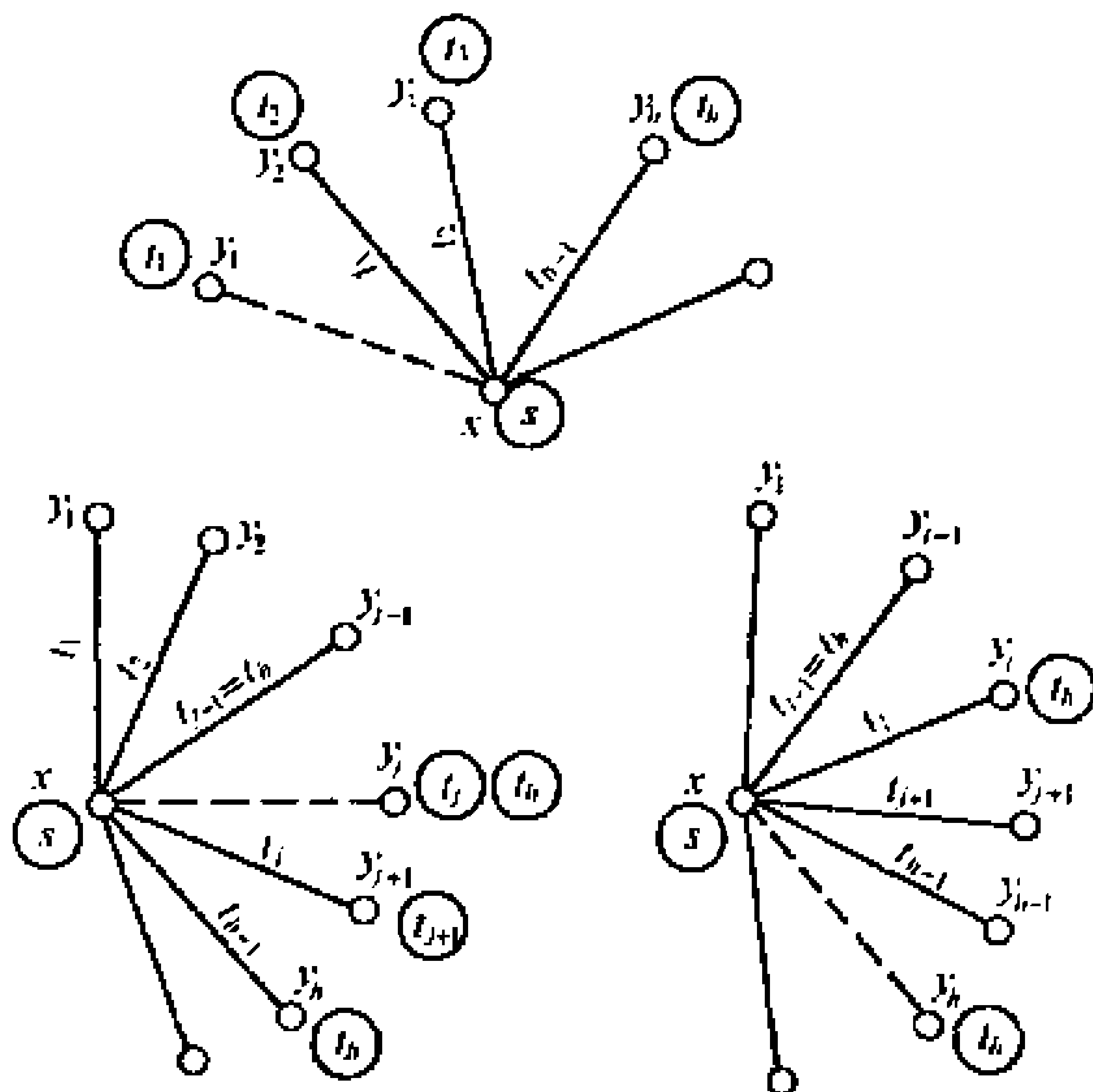


图 6.15

在上述过程中可能遇到的情况只有二种：

(1) 当排列到 $xy_1, xy_2, \cdots, xy_h$ 时，在与 x 关联的边中找不到

染有色 t_h 的边，即顶点 x 缺少颜色 t_h。这时只要把 xy_1 染成颜色 t_1，xy_2 改染为 t_2，…，xy_h 改染为 t_h。除这 h 条边外，其余各边颜色均不动。显然，这就是 G 的一个 $\Delta(G)+1$ 边正常染色。

(2) 当排列到 $xy_1, xy_2, \cdots, xy_h$ 时，前面的某条边 xy_i 已染了颜色 t_h。即 $t_h = t_{j-1}, j < h$。这时先把 xy_1 染为 t_1，把 xy_2 改染为 t_2，…，xy_{j-1} 改染为 t_{j-1}，并取消 xy_j 上的染色，使 xy_j 成为未染色的边。经过上以调换后状况如图 6.15(b) 所示。现在考虑由染有颜色 s 及 t_h 的边构成的集合的导出子图 $H = H(s, t_h)$。由于 H 中的边只有两种颜色，所以 $\Delta(H) \leqslant 2$，故 H 的每个连通分支是回路或路。在 $H(s, t_h)$ 中，由于 x 缺少颜色 s，但 xy_{j-1} 已染上了 $t_{j-1} = t_h$ 故 $d_H(x) = 1$。因为取消了 xy_j 上的颜色 $t_{j-1} = t_h$，所以 y_j 至少缺少颜色 t_h，故 $d_H(y_j) = 1$（对应于颜色 s 在 y_j 出现的情况），或 y_j 根本不是图 H 的顶点（对应于颜色 S 在 y_j 不出现的情形）。y_h 原来就缺少颜色 t_h，从而同样有 $d_H(y_h) = 1$ 或 y_h 不是 H 的顶点。由此可知 x, y_j, y_h 不能同时在 H 的一个连通分支内。分别处理以下两种情形：

(i) x, y_j 不属于 $H(s, t_h)$ 的同一分支。如果 y_j 是 $H(s, t_h)$ 的顶点，只要把 y_j 所在的图 H 的连通分支中各条边的颜色 s 与 t_h 互换，y_j 就缺少了颜色 s，这时 xy_j 染上颜色 s 即可；如果 y_j 不是 $H(s, t_h)$ 的顶点，说明 y_j 缺少 s、t_h 两色，直接把 xy_j 染上颜色 s。无论哪一种情形都得到了 G 的一个 $\Delta(G)+1$ 边正常染色。

(ii) x, y_h 不属于 $H(s, t_h)$ 的同一分支。这时把 xy_j 染成色 t_j，$xy_{j+1}, \cdots, xy_{h-1}$ 分别改染为颜色 $t_{j+1}, \cdots, t_{h-1}$，并取消 xy_h 上的颜色，这时边着色状况如图 6.15(c) 所示。由于上述的颜色变化根本不牵涉颜色为 t_h 和 s 的边。故这时由颜色为 s 和 t_h 的边导出的子图仍然是原先的子图 H，所以 x 与 y_h 仍然不在同一连通分支内。若 y_h 是 H 的顶点，在 y_h 所在的连通分支中对调颜色 s 与 t_h，使得 y_h

缺少颜色 s，这时把 xy_h 染以颜色 s；若 y_h 不是 $H(s,t_h)$ 的顶点，说明 y_h 缺少颜色 s 和 t_h，直接把 xy_h 染上颜色 s 即可。因而 G 也有一个 $\Delta(G)+1$ 边的正常染色。

综上所述，可得 $\chi'(G)\leqslant\Delta(G)+1$。　　　　证毕。

定理 6.3.2 实际上可以推广到任何无环图的情况。若无环图 G 中，任一对顶点之间至多有 k 条边，则

$$\Delta(G)\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta(G)+k$$

图 6.16 说明了此上界是最好的可能，这时 $\Delta(G)=2k$，而 $\chi'(G)=3k=\Delta(G)+k$。

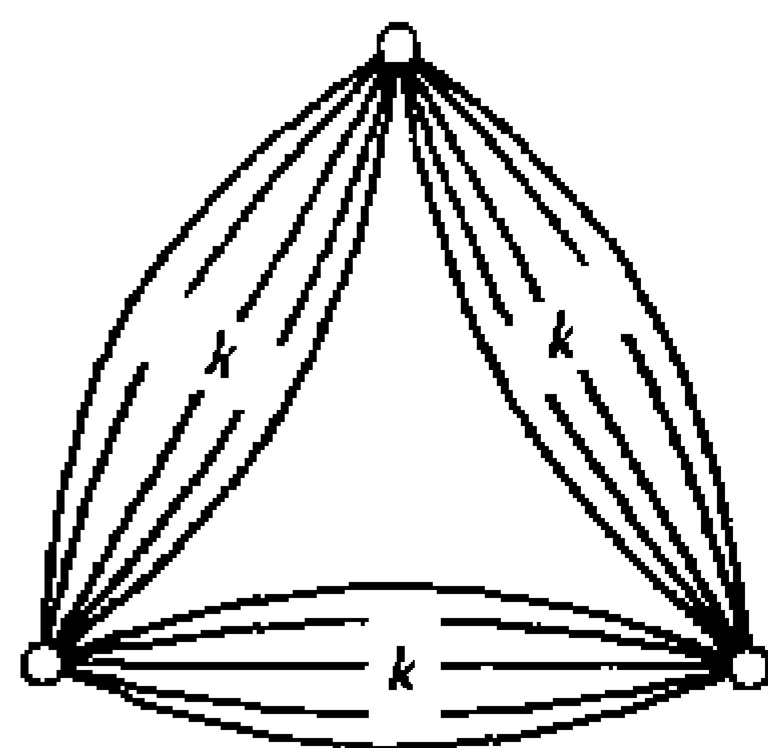


图 6.16

现在我们对简单图的点色数和边色数作一比较。图 G 的最大度为 $\Delta(G)$。G 的点色数 $\chi(G)$ 可以取到 1 与 $\Delta(G)+1$ 之间的每一个数值；而边色数只能取 $\Delta(G)$ 或 $\Delta(G)+1$ 这两个数值。从这一点看，对边色数的了解似乎更确切些。可是另一方面，布鲁克斯定理告诉我们 $\chi(G)=\Delta(G)+1$ 的图只可能是奇回路或完全图。而 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ 的图可能是哪些图却远没有弄清楚。

定义 6.3.2　若图 G 满足 $\chi'(G)=\Delta(G)$，则称 G 为第一类图；若 G 满足 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$，则称 G 为第二类图。

由定理 6.3.1 可知二分图是第一类图。

推论 6.3.3　G 是 p 阶图，如果 $q(G)>\Delta(G)\left[\frac{p}{2}\right]$，则 G 为第二类图。

证明　假设 $\chi'(G)=\Delta(G)$，现给 G 的一个 $\Delta(G)$ 边正常染色，由边染色与对集之间的关系可知，G 中染以同一种颜色的边数最多为 $\left[\frac{p}{2}\right]$，则

$$q(G) \leqslant \chi'(G)\left[\frac{p}{2}\right] = \Delta(G)\left[\frac{p}{2}\right]$$

这与给定的条件相矛盾。 证毕。

排课表是边染色问题在实际应用中一个具有代表性的例子。

在一所学校有 m 位教师 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 和 n 个班级 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。在明确教师 x_i 需要给班级 y_j 和 p_{ij} 节课后，要求制订一张课时尽可能少的完善的课表。这个问题就称为排课表问题。现在利用边染色理论来进行讨论。

先构造一个二分图 $G = (X, Y; E)$，$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，顶点 x_i 和 y_j 有 p_{ij} 条边连接着。根据实际情况，可假设在任何一个课时里，一位教师只能给一个班级上课，并且每个班级也最多由一位教师上课。所以关于一个课时的教学时间表对应于图 G 中的一个对集。反之，G 的一个对集对应于在一个课时里若干教师到若干班级去上课的一种可能分配。因此排课表问题就是把 $E(G)$ 划分为若干个对集，而使对集个数尽可能地少，或等价地，把 G 的边用尽可能少的颜色去正常染色。由于 G 是二分图，从定理 6.3.1 可知 $\chi'(G) = \Delta(G)$。因此若没有教师多于 p 节课，也没有班级上课节数多于 p，则教学要求可用一张 p 课时的课表安排出来。其安排方法可利用定理 6.3.1 的证明过程，作出相应二分图的 $p(p \geqslant \Delta(G))$ 个边不相交的对集。于是排课表问题就有了完善的解决。

以上所考虑的问题中有几个教室可供使用是没有限制的。假定可供上课的教室数给定，那以要安排一张完善的课表需多少课时呢？

假定总共有 q 节课 $\left(q = \sum\limits_{i,j} p_{ij}\right)$，安排在一张 t 课时的课表里，则明显地在每一课时里要平均开出 q/t 节课。即在某一课时里，必需要用 $\{q/t\}$（$\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数）个教室。为此先证明一个引理。

引理 6.3.4 设 M 和 N 是 G 的两个不相交的对集，$|M| >$

$|N|$。则存在不相交的对集 M' 和 N'，使 $|M'| = |M| - 1$，$|N'| = |N| + 1$，并且 $M' \cup N' = M \cup N$。

证明 作 $G' = G[M \cup N]$，由于 M 和 N 是 G 的两个不相交的对集，G' 中每一个顶点的度为 1 或 2。所以 G' 中的每个连通分支或者是其边在 M 和 N 中交替出现的长为偶数的回路，或者是其边在 M 和 N 中交替出现的路。由于 $|M| > |N|$，所以 G' 中必有一个连通分支是一条路 P，且这条路始于 M 的边也终止于 M 的边。设为

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_{2k+1} v_{2k+1}$$

则 $\{e_1, e_3, \cdots, e_{2k+1}\} \subseteq M$，$\{e_2, e_4, \cdots, e_{2k}\} \subseteq N$。令

$$M' = (M - \{e_1, e_3, \cdots, e_{2k+1}\}) \cup \{e_2, e_4, \cdots, e_{2k}\}$$

$$N' = (N - \{e_2, e_4, \cdots, e_{2k}\}) \cup \{e_1, e_3, \cdots, e_{2k+1}\}$$

则 M' 与 N' 是 G 中两个不相交的对集，并且 $|M'| = |M| - 1$，$|N'| = |N| + 1$，$M' \cup N' = M \cup N$。 证毕。

该引理的证明过程可参见图 6.17。

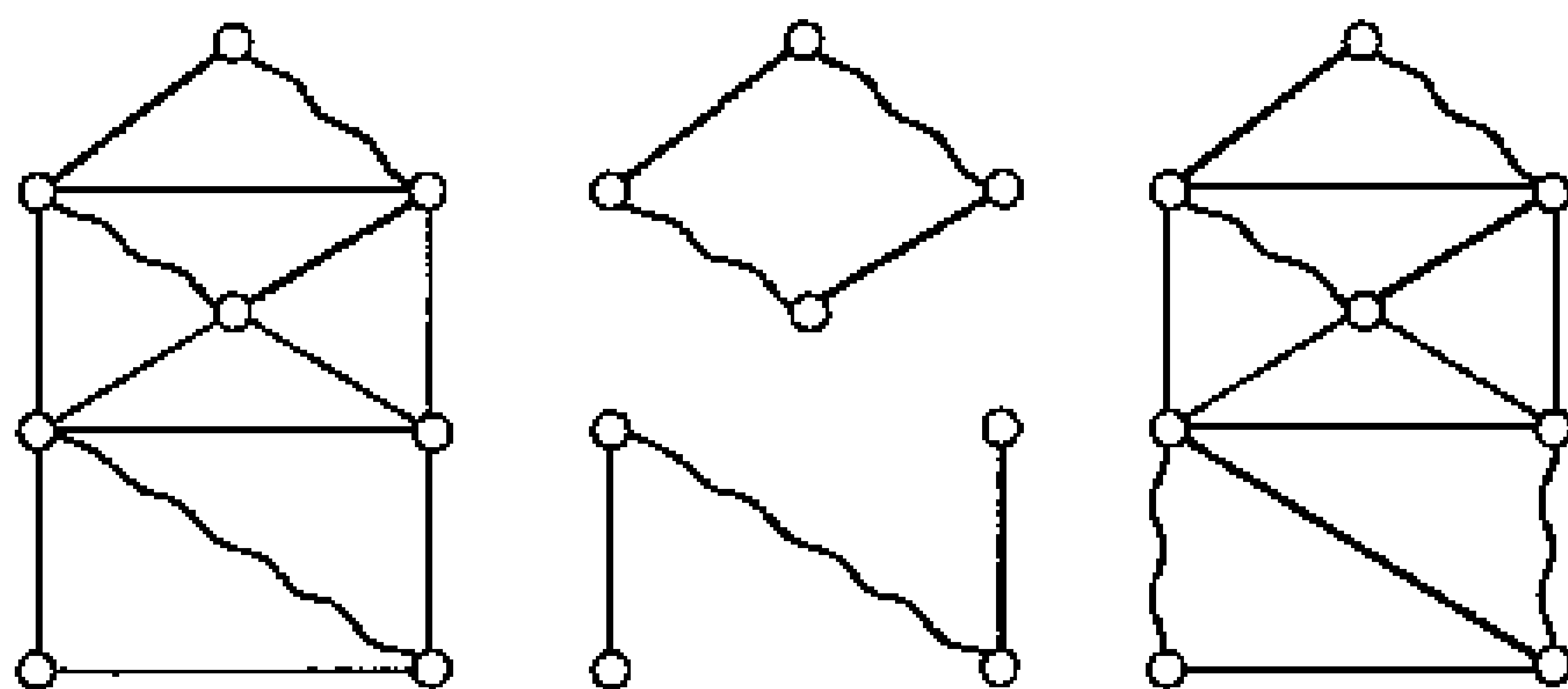


图 6.17

定理6.3.5 若 G 是二分图，$t \geq \Delta(G)$。则存在 t 个互不相交的对集 $M_1, M_2, \cdots, M_t$，使得

$$E(G) = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_t$$

并且对每个 $1 \leq i \leq t$，有

$$[q(G)/t] \leqslant |M_i| \leqslant \{q(G)/t\}$$

证明　G 是二分图，由定理 6.3.1 的证明可知，G 中存在 $\Delta(G)$ 个互不相交的对集 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_{\Delta(G)}$。所以对任意 $t \geqslant \Delta(G)$，G 中存在 t 个互不相交的对集 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_t$（对 $i > \Delta(G)$，M'_i 可以取空集），使

$$E(G) = M'_1 \cup M'_2 \cup \cdots \cup M'_t$$

在这 t 个对集里，可以反复应用引理 6.3.4 对边数相差大于 1 的两对集进行调整。最后可得到 G 的 t 个满足要求的对集 $M_1, M_2, \cdots, M_t$。　　证毕。

例 1　假设有 4 位教师和 5 个班级，教学要求的矩阵 $P = (p_{ij})_{4\times 5}$ 如下所示。请设计一个可能采用的 4 课时的课表。

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

	1	2	3	4
x_1	y_1	y_1	y_3	y_4
x_2	y_2	—	y_4	—
x_3	y_3	y_4	—	y_2
x_4	y_4	y_5	—	—

作一个教学要求的矩阵 P 所对应的二分图 G（见图 6.18(a)）。由于 $\Delta(G) = 4$，$E(G)$ 可分解为 4 个对集（见图 6.18(a)）：细边为 M_1，表示第一课时，继续边为 M_2，表示第二课时；波浪边为 M_3，表示第三课时；粗边为 M_4，表示第四课时）。

一个可能采用的 4 课时的课表见图 6.18(b) 所示。

从课表中我们可以看到在第一课时需 4 个教室，然而由于 $q(G) = 11$，由定理 6.3.5，对于 4 课时的课表来说，可以安排出每一课时至多占用 $\{11/4\} = 3$ 个教室的课表。事实上，因为 $|M_1| = 4$，$|M_4| = 2$，故在 $G[M_1 \cup M_4]$ 中有一个连通分支是一条路，这条跟始于 M_1 的边，终止于 M_1 的边。在 $G[M_1 \cup M_4]$ 中不难看出 $P = y_1 x_1 y_4 x_4$ 就是其中的一个连通分支（见图 6.18(b)）。在 P 中把 M_1 与 M_4 的边互换，即得

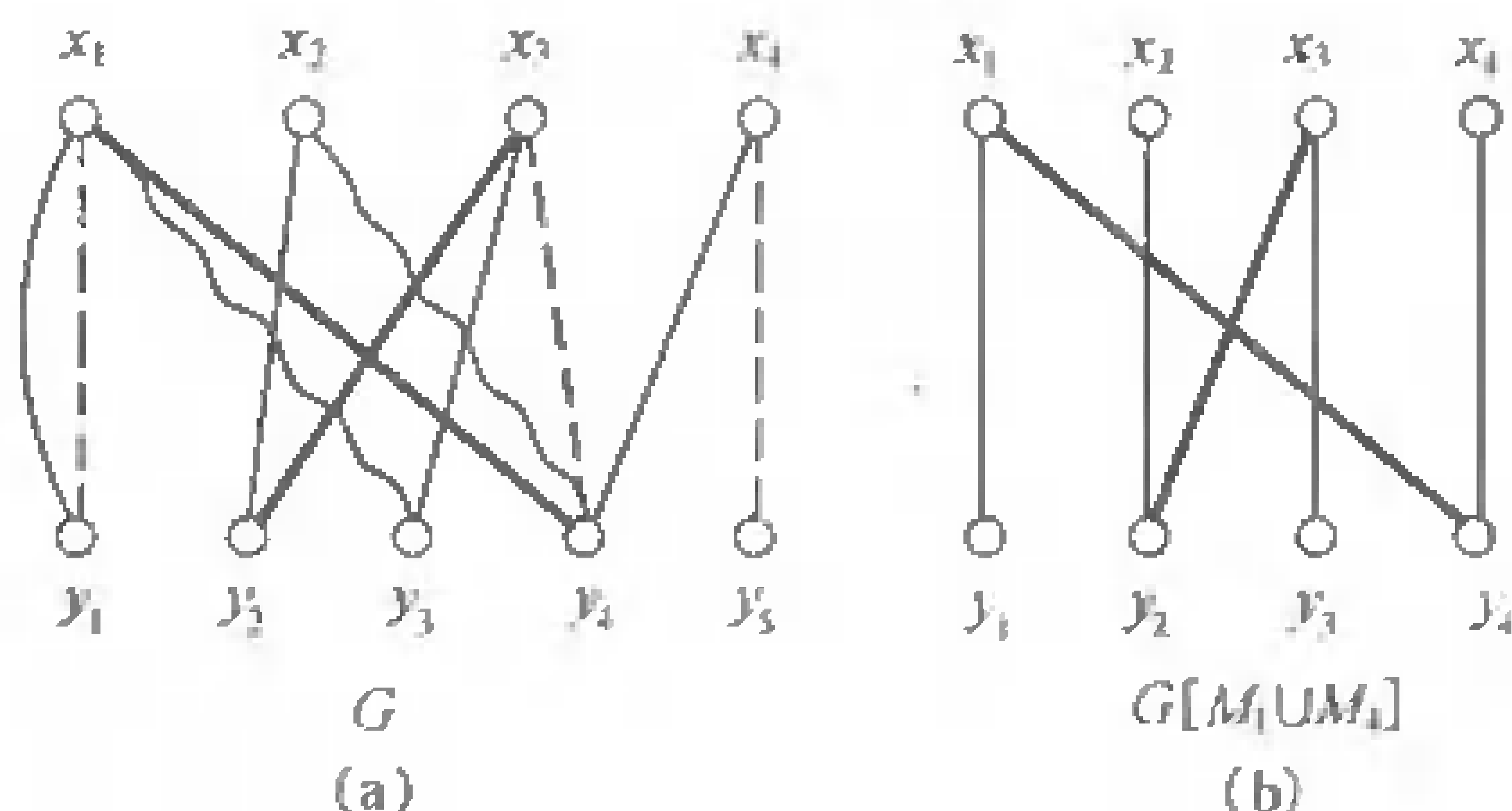
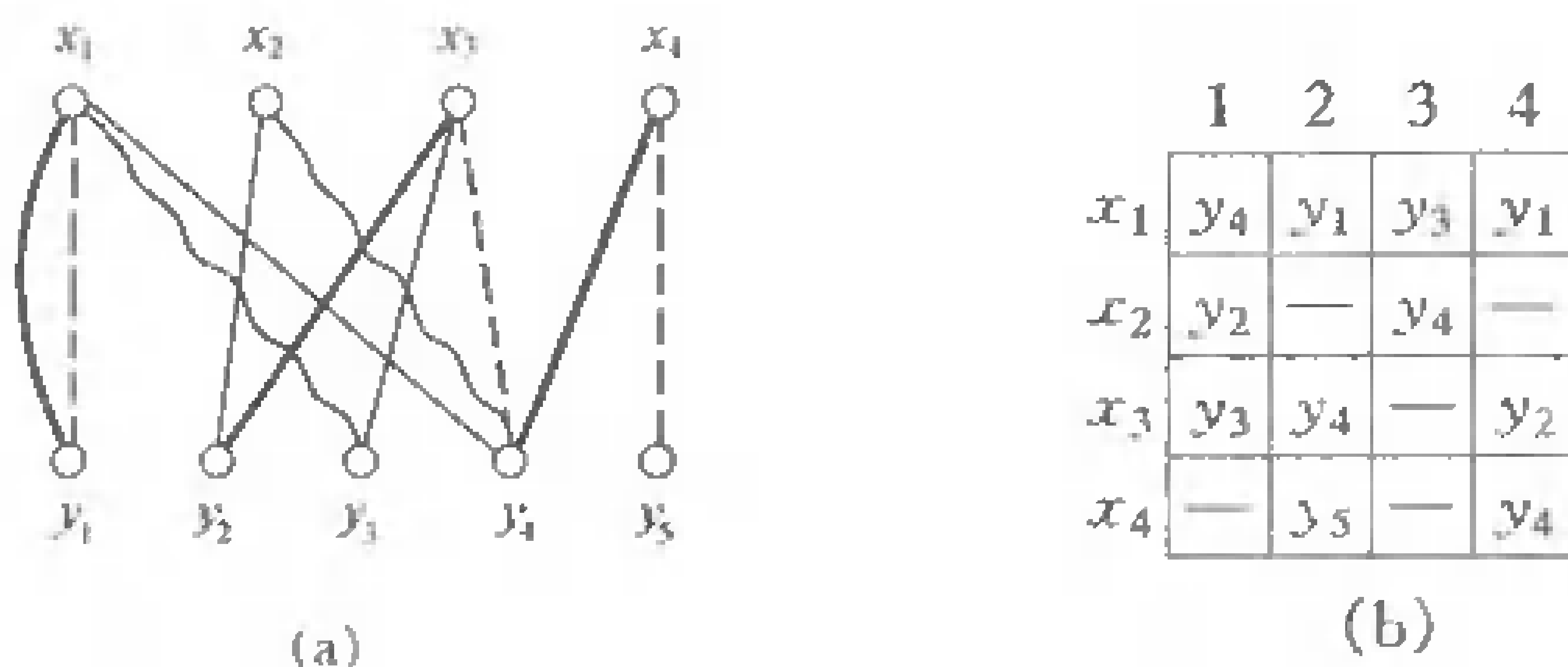


图 6.18

$$M_1 \quad \{x_1y_4, x_2y_2, x_3y_3\}, M_4 \quad \{x_1y_1, x_4y_4, x_3y_2\}$$

其他两个对集 M_2 与 M_3 不变,即可得调整后的 $E(G)$ 的一个分解(见图 6.19(a))。由此分解可以作出修改后的课表(见图 6.19(b)),在这个课表中,每一课时内最多占用 3 个教室。



	1	2	3	4
x_1	y_4	y_1	y_3	y_1
x_2	y_2	—	y_4	—
x_3	y_3	y_4	—	y_2
x_4	—	y_5	—	y_4

(b)

图 6.19

6.4 列表染色

列表是指多种颜色构成的集合。一个图 G 是 k 顶点染色是指给 G 的每个顶点 x 分配一种颜色 $c(x) \in \{1,2,\cdots,k\}$,使得任意

两相邻的顶点分配以不同的颜色。现在我们考虑一个 k 顶点可染色的图 G,给它的每个顶点 x 分配一个列表 $L(x)$,其中 $L(x)$ 中有 k 种颜色,即 $|L(x)| = k$。能否从每个顶点的列表中分配一种颜色给这个顶点,使得任意两相邻的顶点分配到不同的颜色?

下面我们给出一个例子说明这个问题。如图 6.13,设图 G 是一个 $K_{3,3}$ 二分图,顶点集 $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$,此图 $\chi(G) = 2$, 给出每个顶点的列表 $L(x_i) = L(y_i) = \{1,2,3\} - \{i\}$, $i = 1,2,3$。从这个给定的列表中选一种颜色给每个顶点染色,V_1 中三个顶点至少用 2 种颜色,不妨设 1 和 2,这样 V_2 中所有点只能染 3,从这个给定的列表中可看出这种情形不存在。所以我们需要定义另一种重要的色数变量,即列表着色数。

定义 6.4.1 给图 G 的每个顶点 x 一个列表 $L(x)$,称 G 是 L 可染色的是指对每个顶点 $x \in V(G)$,都可从其对应列表 $L(x)$ 中找到一种染色 $c(x) \in L(x)$,使得 c 是 G 的一个正常的顶点染色。如果每个顶点列表长度都相同,此时列表着色数 $\chi_l(G)$ 定义为满足下面条件的最小的正整数 k,使对 G 的任一顶点 $x \in V(G)$,只要当 $|L(x)| \geqslant k$ 时,G 都是 L 可染色的。

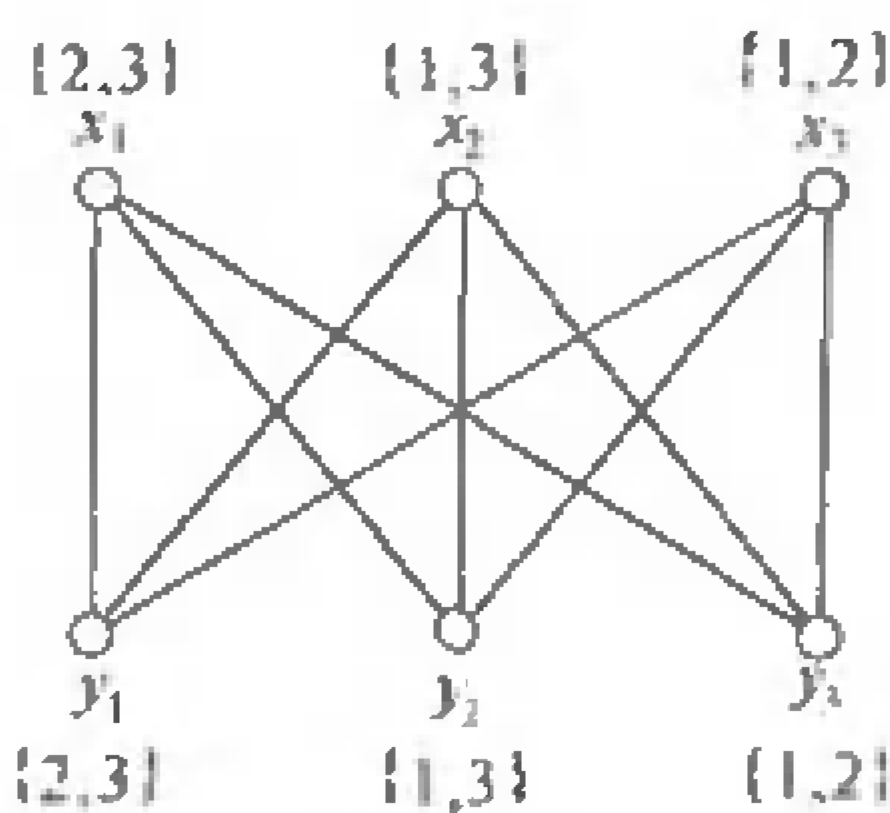


图 6.20

顶点染色是给每个顶点分配一种颜色,而列表染色是给每个顶点每分配一个列表.从它们定义可看出,对任一图 G 都有 $\chi_l(G) \geqslant \chi(G)$,上面的例子有 $\chi_l(G) \geqslant 3$,但 $\chi(G) = 2$。事实上,对任一给定数 $k \geqslant 2$,我们都可以构造一个二分图 G,使 $\chi_l(G) > k$,从而看出 $\chi_l(G)$ 与 $\chi(G)$ 可相差很大。另一方面,类似于 $\chi(G)$,同样有 $\chi_l(G) \leqslant \Delta(G) + 1$。例如完全图 K_n, $\chi_l(K_n) \geqslant \chi(K_n) = n$, $\Delta(K_n) = n - 1$, $\chi_l(K_n) \leqslant \Delta(K_n) + 1 = n$,所以 $\chi_l(K_n) = n =$

$\chi(K_n)$。

列表染色是一个很困难的问题，我们仅对平面图作一些讨论。从 6.2 节知道每个平面图都是 5 顶色可染色的，即五色定理，对于平面图的列表染色，我们有相似的结论。为了给出这个结论，先给出一个近三角平面。称一个平面图是近三角的是指该平面图的外面是一个圈，所有内面都是三角形。如图 6.21(a) 是一个近三角平面图，而图 6.21(b) 不是近三角平面图。

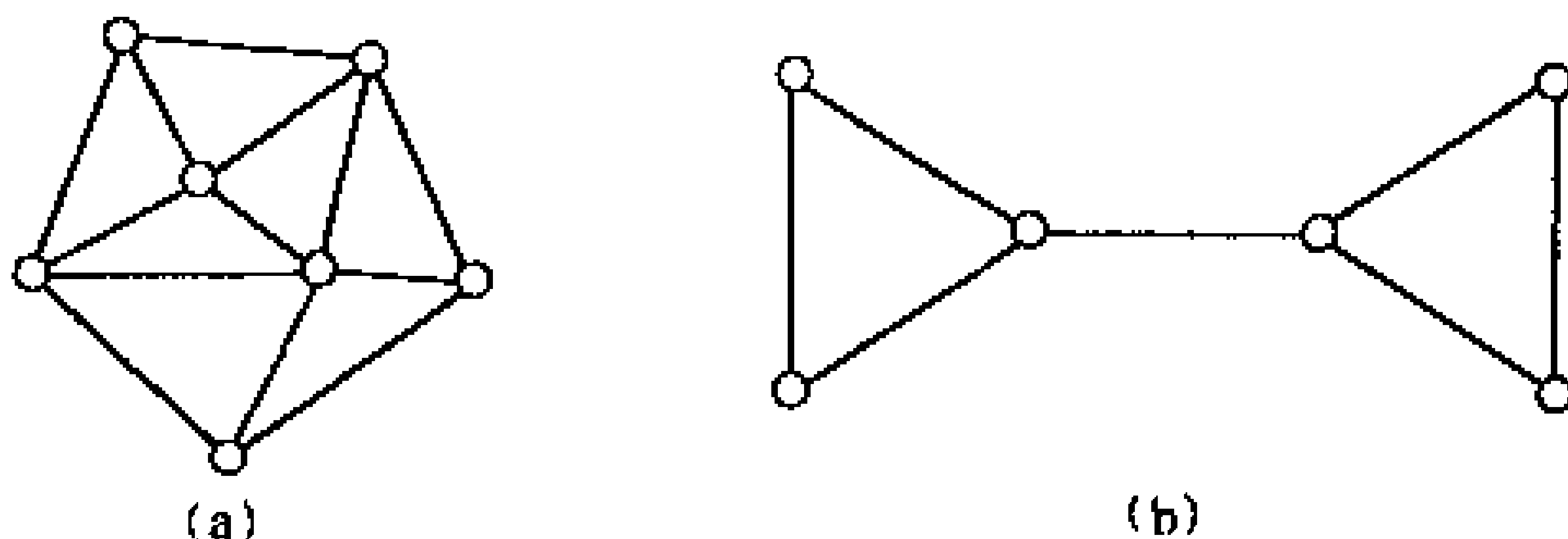


图 6.21

定理 6.4.1 设 G 是一个近三角平面图，其外圈 $C = x_1x_2\cdots x_kx_1$，对每个顶点 $x \in V(G)$，都有一个列表 $L(x)$，并且满足 $L(x_1) = \{1\}$，$L(x_2) = \{2\}$，$L|(x_i)| \geqslant 3$，$i = 3,\cdots,k$；对 $\forall x \in V(G - C)$ 有 $|L(x)| \geqslant 5$，证明 G 是 L 可染色的。

证明 对 G 的顶点用归纳法。当 $|G| = 3$ 时显然成立。假设 $|G| > 3$ 时，对所有顶点数小于 $|G|$ 的图结论均成立。下面考察图 G，给图 G 的每个顶点 x 一个满足条件的列表 $L(x)$，我们分两种情况加以讨论。

1° 假设 G 含有 C 的"对角线" x_kx_j，$2 \leqslant j \leqslant k-2$，即 $x_kx_j \in E(G)$。对于圈 $x_kx_1x_2\cdots x_jx_k$ 及其内部利用归纳假设，此图是 L 可染色的，在这个 L 可染色中，x_k 和 x_j 的染色选定，且染不同的颜色，再考察圈 $x_kx_jx_{j+1}\cdots x_{k-1}x_k$ 及其内部，知其是 L 可染色的，从而 G 是 L 可染色的。

2° G 不含有边 $x_kx_j, 2 \leqslant j \leqslant k-2$，设与 x_k 相邻的点为 $x_{k-1}, y_1, y_2, \cdots, y_l$ 和 x_1。$x_kx_{k-1}y_1, x_ky_1y_2, \cdots, x_ky_lx_1$ 是平面图 G 的内面，设 a, b 是 $L(x_k)$ 中异于 1 的两种颜色。$x \notin \{y_1, \cdots, y_l\}$。设 $L'(x) = L(x), L'(y_i) = L(y_i) - \{a, b\}, 1 \leqslant i \leqslant l, G' = G - x_k$，$G'$ 的外圈是 $x_1x_2\cdots x_{k-1}y_1y_2\cdots y_lx_1$，利用归纳假设和 G' 是 L' 可染色的，将 G' 的 L' 可染色扩充到 G，只要给 x_k 染 a 或 b 使 x_k 与 x_{k-1} 染不同颜色，这样 G 就是 L 可染色的。

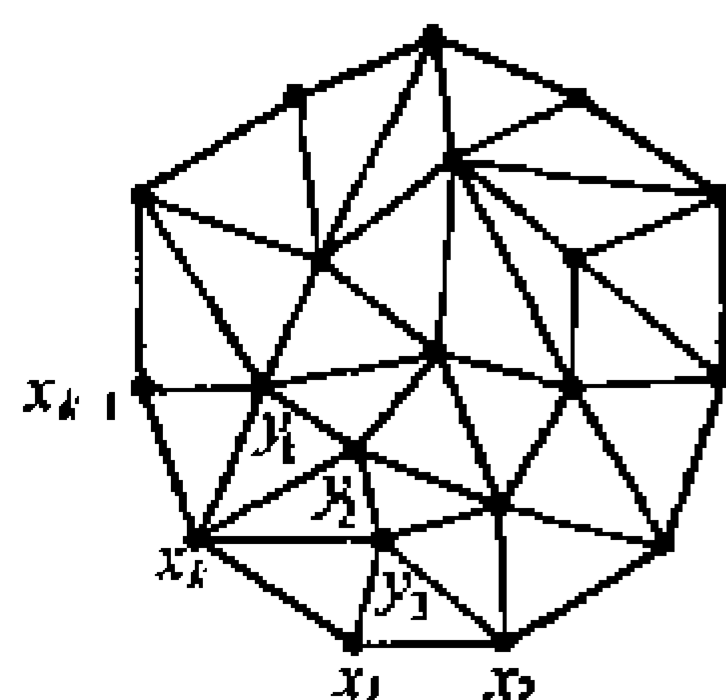


图 6.22

从定理 6.4.1，可看出任一平面图 $\chi_l(G) \leqslant 5$。Voigt 等人又构造出这样的平面图 χ_l 恰好为 5。从这个意义上说，定理 6.4.1 比五色定理的结论要强。

6.5 圆染色和圆色数

考虑设计一个十字路口的交通信号控制系统。分配给每个交通流一个时间段，在此时间段它可通行，即绿灯亮。一个完整的交通信号周期是指使每个交通流都轮到一次绿灯的一段时间。我们需要设计一个红绿灯周期，使这个周期能永远被重复下去，设每个绿灯时间段是一个单位长度，我们的目标是使一个完整的交通信号周期的长度最小。

现在我们把这一问题转化成一个图论问题。图 G 的每个顶点表示一个交通流。如果两个交通流有交织，则相应的两顶点连一条边。很自然，要解决这个交通信号控制问题，实际上就是寻找对应图 G 的点色数问题，即把图 G 的顶点分成个数最少的独立集，给每个独立集一个绿灯时间段，使不同的独立集对应不同的绿灯时间段。这个完整交通周期长度就等于图 G 的点色数 $\chi(G)$。

然而，我们将看到这个方法没有提供最优的解决方案。我们把一个完整的交通信号周期看成一个圆 C，每个顶点（即每个交通流）分配给一个单位长度的时间段（这个时间段表示此交通流轮到一次绿灯）。两个相邻的顶点在 C 上分配给不相交的时间段。我们的目标是使圆 C 的总长度最小。这就导出了图的圆染色和圆色数的概念。

定义 6.5.1 设 C 是欧氏长度为 r 的圆。一个圆 G 的 r 圆染色是指存在一个映射 c，G 的每个顶点 x 都分配给圆上一个单位长度开弧 $c(x)$，使得对 $\forall xy \in E(G)$，有 $c(x) \cap c(y) = \varnothing$。如果图 G 存在一个 r 圆染色，称此图是 r 圆可染色的。图 G 的圆色数定义如下：

$$\chi_c(G) = \inf\{r: G \text{ 是 } r \text{ 圆可染色的}\}。$$

很显然，如果 $\chi_c(G) = r$，那么对任意 $r' \geqslant r$，G 一定是 r' 圆可染色的。同样对任一子图 $H \subseteq G$，有 $\chi_c(H) \leqslant \chi_c(G)$。

我们把圆 C 在任一点处切开，得到一长度为 r 的区间。记此区间为 $[0, r)$，对于 C 上每一段弧 $c(x)$，记 $c'(x)$ 是 $c(x)$ 初始点，$c(x)$ 沿顺时针方向，c' 是从 $V(G)$ 到 $[0, r)$ 上的一个映射，对 $\forall xy \in E(G)$，有 $1 \leqslant |c'(x) - c'(y)| \leqslant r - 1$，上述这个过程是可逆的。因此，$G$ 有一个 r 圆可染色对应有一个映射 $c': V \to [0, r)$，对 $\forall xy \in E(G)$，有 $1 \leqslant |c'(x) - c'(y)| \leqslant r - 1$。

下面我们定义一个 r 区间染色，对 G 的每个顶点 x，分配一个单位长度的开子区间 $g(x) \subset [0, r)$，使得 G 的任意两相邻顶点对应子区间不相交。G 的点色数 $\chi(G)$ 等于 G 存在 r 区间染色中最小的 r，同样 G 的一个 r 区间染色对应一映射 f，$f: V(G) \to [0, r)$，对 $\forall xy \in E(G)$，$1 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant r - 1$，更进一步对 $\forall x \in V(G)$，$f(x) \leqslant r - 1$。因此 G 的 r 区间染色对应 G 的一个 r 圆染色。另一方面对于 G 的任一 r 圆染色 $c': V(G) \to [0, r)$，设 $s = \max\{c'(x), x \in V(G)\}$，$c'$ 可以看成 G 的一个 $(s+1)$ 一区

间染色，且 $s < r$，所以有下面的结论。

定理 6.5.1 对于图 G 有 $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leqslant \chi(G)$

定理 6.5.1 告诉我们 $\chi_c(G)$ 包含比 $\chi(G)$ 更多的信息，如果我们知道图 G 的 χ_c，则 $\chi(G) = \lceil \chi_c \rceil$；另外，两个图虽然具有相同的点色数 χ，但圆色数可以不同，χ_c 与 χ 相差不大，χ_c 是 χ 的一个提炼，而 χ 是 χ_c 的一个近似。

下面给出圆色数的另一等价定义，这对计算 χ_c 有帮助。

定义 6.5.2 对于两整数 $1 \leqslant d \leqslant k$，图 G 的一个 (k,d) 染色是指给图 G 的每个顶点 x 一映射 $c: V(G) \to \{0,1,\cdots,k-1\}$，使得对 $\forall xy \in E(G)$ 有 $d \leqslant |c(x) - c(y)| \leqslant k - d$，圆色数 χ_c 定义为：

$$\chi_c(G) = \inf\{k/d: \text{存在 } G \text{ 的一个}(k,d)\text{ 染色}\}$$

对于整数 k，图 G 的一个 $(k,1)$ 染色就是图 G 的一个 k 染色。

假设 c 是 G 的一个 (k,d) 染色。设 $c': V(G) \to [0, k/d)$ 且 $c'(x) = c(x)/d$，对 $\forall xy \in E(G)$，$1 \leqslant |c'(x) - c'(y)| \leqslant \frac{k}{d} - 1$，因此，$G$ 的一个 (k,d) 染色对应 G 的一个 k/d 圆染色，另一方面，可验证如果 c' 是 G 的一个 k/d 圆染色，则映射 c 就是 G 的一个 (k,d) 染色，其中 $c(x) = [c'(x)d]$，因此定义 6.5.2 关于圆染色及圆色数的定义与定义 6.5.1 是等价的。

例 1 求 C_5 的圆色数。

证明 用 $[a,b]$ 表示圆上从 a 沿顺时针方向到 b 这一弧上点的集合，用 $|[a,b]|$ 表示该弧的长度。圆距离是指在圆上两点之间较短的那段弧的长度。

令 $C_5 = v_1v_2v_3v_4v_5$，设 C 是一个周长为 5/2 的圆周，定义 $c: V(C_5) \to [0, 5/2)$，其中 $c(v_1) = 0$，$c(v_2) = 1$，$c(v_3) = 2$，$c(v_4) = 1/2$，$c(v_5) = 3/2$，不难验证任意两相邻顶点的象的圆距离不小于 1，所以 $\chi_c(C_5) \leqslant 5/2$。

下面我们来证明 $\chi_c(C_5)\geqslant 5/2$,若不然,设 $\chi_c(C_5)=r<5/2$ 令 C 是一个周长为 r 的圆周,设 $c:V(C_5)\to[0,r)$,是一个映射满足任意两相邻顶点的象的圆距离不小于 1。不失一般性,$c(v_1)=0,c(v_i)=x_i,i=2,3,4,5$。易见 $x_2,x_5\in[1,r-1]$,不妨设 $x_2\geqslant x_5$,显然 $x_2-x_5<1/2$,因为 $v_2v_3\in E(C_5),v_4v_5\in E(C_5)$,因此有 $x_3,x_4\in[x_2+1,x_2-1]\cup[x_5+1,x_5-1]=[x_5+1,x_2-1]$ 而 $|[x_5+1,x_2-1]|=r-2+x_2-x_5<1$ 矛盾。所以 $\chi_c(C_5)=5/2$。

习　题　六

6.1　证明:对任何图 G,$\chi(G)\leqslant 1+m(G)$,$m(G)$ 表示 G 的最长路的长度。

6.2　证明:对任何图 G 都包含长为 $\chi(G)-1$ 的路。

6.3　设 G 是连通图,证明 $q(G)\geqslant\binom{\chi(G)}{2}$。等号成立当且仅当 G 为完全图。

6.4　证明:一个无环图 G 的色数是 2 当且仅当 G 是至少有一条边的二分图。

6.5　证明:若 G 的任何两个奇回路都有一个公共顶点,则 $\chi(G)\leqslant 5$。

6.6　证明:若 G 是 p 阶简单图,则 $\chi(G)\geqslant\dfrac{p^2}{p^2-2q(G)}$,$(p\geqslant 3)$。

6.7　对每一个 p 阶图 G,证明

$$\frac{p}{\beta_0(G)}\leqslant\chi(G)\leqslant p-\beta_0(G)+1。$$

6.8　若 G 是至少有4个顶点的简单平面图,$\delta(G)\geqslant 1$。证明 G 至少有 3 个顶点的度不超过 5。

6.9 设 G 是简单平面图，$p(G) \leqslant 11$。证明 $\delta(G) \leqslant 4$。

6.10 设 G 是有 w 个连通分支的 p 阶简单平面图。证明 $p - q(G) + \varphi(G) = w + 1$。

6.11 每个面的度都是3的平面图称为平面三角剖分图。设 G 是 $p \geqslant 3$ 的简单平面图。证明下列三个命题等价：

(1) G 是平面三角剖分图；

(2) $q(G) = 3p(G) - 6$；

(3) $\varphi(G) = 2p(G) - 4$。

6.12 利用定理6.2.10确定 Petersen 图的厚度。

7　网络选址问题

所谓网络选址问题，是在指定网络图上，根据所要求的某些指标，选择最满意的场址。网络选址是网络理论的重要内容之一。人们在规划和设计商业中心、自来水厂、污水处理厂、消防站、医院、飞机场、停车场、仓库等时候，常常会遇到网络选址问题。

7.1　基本概念

网络图是由弧（包括无向弧，有向弧）和顶点构成的。为了描述不同类型的网络选址问题，需要引入网络图的各种距离形式。

定义 7.1.1　顶点到顶点的距离

网络图中顶点 i 至顶点 j 的最短路长度，称为该网络图顶点 i 到顶点 j 的距离，记为 d_{ij}。

对于棋盘式结构的网络图，设顶点 i 和 j 的坐标分别为(x_i, y_i)和(x_j, y_j)，则两顶点间的距离可表示为：

$$d_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j| \tag{1.1}$$

式中，d_{ij} 表示网络图中顶点 i 至顶点 j 的距离。

定义 7.1.2　顶点到弧的距离

在网络图中，从顶点 i 到弧(r, s)中距离顶点 i 最远的一点处的距离，称为顶点 i 到弧(r, s)的距离，记为 $d(i,(r,s))$。

令 d_{ir} 和 d_{is} 分别表示顶点 i 到顶点 r 和 s 的最短距离，$d(r,s)$ 表示弧(r,s)的长度，则当弧(r,s)为无向弧时，顶点 i 到弧(r,s)的距离为：

$$d(i,(r,s))=\frac{d_{ir}+d_{is}+d(r,s)}{2} \tag{1.2}$$

如果弧(r,s)上距顶点 i 最远的点在弧的内部,可以证明从顶点 i 到该点至少有 2 条最短路,一条经过顶点 r,另一条经过顶点 s。

而当弧(r,s)为有向弧时,顶点 i 到弧(r,s)的距离为:

$$d(i,(r,s))=d_{ir}+d(r,s) \tag{1.3}$$

并且弧(r,s)上离顶点 i 最远的一点,或者是顶点 s;或者在弧(r,s)上无限接近顶点 s。

定义 7.1.3　点到顶点的距离

为了表示弧(r,s)上的点,我们用该点与弧顶点 r 的距离来描述,将弧(r,s)上距顶眯 r 为$f\cdot d(r,s)$的点称为弧(r,s)上的 f - 点,其中 $0\leqslant f\leqslant 1$

在网络图中,弧(r,s)上的 f - 点到顶点 i 的最短路长度,称为点到顶点距离,记为 $d(f(r,s),i)$。

当(r,s)是无向弧时

$$d(f(r,s),i)=\min\{f\cdot d(r,s)+d_{ri},(1-f)d(r,s)+d_{si}\} \tag{1.4}$$

而当(r,s)是有向弧时

$$d(f(r,s),i)=(1-f)\cdot d(r,s)+d_{si} \tag{1.5}$$

定义 7.1.4　点到弧的距离

在网络图中,弧(r,s)上的 f - 点到弧(t,u)上点的最大距离,称为点到弧的距离(具体地说,是弧(r,s)上的 f - 点到弧(t,u)的距离),记为 $d(f(r,s),(t,u))$。

类似于定义 7.1.3 的距离公式,当弧(r,s)是无向的且$(r,s)\neq(t,u)$

$$\begin{aligned}&d(f(r,s),(t,u))\\&\quad=\min\{f\cdot d(r,s)+d(r,(t,u)),(1-f)d(r,s)\\&\qquad+d(s,(t,u))\}\end{aligned} \tag{1.6}$$

式中 $d(r,(t,u))$ 和 $d(s,(t,u))$ 由式(1.2)或式(1.3)计算,具体视弧 (t,u) 为有向或无向而定。

当弧 (r,s) 是有向的且 $(r,s) \neq (t,u)$

$$d(f(r,s),(t,u)) = (1-f)d(r,s) + d(s,(t,u)) \tag{1.7}$$

特别地,如果 (r,s) 与 (t,u) 是同一条弧,即 $(r,s)=(t,u)$ 时,$d(f(r,s),(r,s))$ 在无向弧时,表示弧 (r,s) 上的 f - 点到弧 (r,s) 上点的最大距离;在有向弧时,表示包含 (r,s) 上 f - 点的最短(有向)圈的长度。

在给出了各种网络距离后,我们来对网络选址问题进行分类。根据选址的判据(或目标函数),可以将选址问题分为中心点问题和中位点问题。

其中目标函数为"使最大距离达到最小"的选址问题,称为中心点问题。通常消防站、医院、自来水管网的测压点等,都采用这样的判据来选址,因而它们都属于中心点问题。

根据网络选址问题中所采用的不同距离形式,可以将中心点(中位点)问题的解称为中心点(中位点)、一般中心点(中位点)、绝对中心点(中位点)和一般绝对中心点(中位点)。

而目标函数为"使距离的总和达到最小"的选址问题,称为中位点问题。通常邮局、电话交换台、汽车站、商业中心等,都采用这样的判据来定位,它们均属于中位点问题。

根据网络选址问题中所采用的不同距离形式、可以将中心点(中位点)问题的解称为中心点(中位点)、一般中心点(中位点)、绝对中心点(中位点)和一般绝对中心点(中位点)。

这里需要说明的是,有些实际问题的选址判据为"使距离的总和达到最小",例如城市的大商场选址,根据选址问题的分类,应称为商业中位点。由于城市规划工作者习惯的原因,仍称之为商业中心点。

下面两节分别介绍中心点问题和中位点问题的求解。

7.2 中心点问题

本节先讨论一般网络中的中心点问题，然后讨论棋盘形网络的中心点问题。一般网络中的中心点问题，采用穷举法来进行求解；而对棋盘形网络的中心点问题，可以有简单的求解方法。

一、一般网络的中心点问题

1. 中心点的定义和计算方法

定义 7.2.1 设 MVV(i) 表示图 G 中顶点 i 到所有顶点的距离的最大者，即

$$\mathrm{MVV}(i) = \max_{i}\{d_{ij}\} \tag{2.1}$$

在所有 i 中($i = 1,2,\cdots,n$)，使 MVV(i) 取最小值的顶点 x，称为图 G 的中心点。

定义 7.2.1 用数学符号可表示为

$$\mathrm{MVV}(x) = \min_{i}\max_{j}\{d_{ij}\} \tag{2.2}$$

式中，d_{ij} 表示网络的顶点 i 到顶点 j 的最短路距离。

根据式(2.2)，不难确定出求中心点 x 的步骤：

第 1 步：根据网络图中每条弧的长度(可以是时间或费用等)，计算图中顶点到顶点的距离矩阵 D。矩阵 D 的第 i 行第 j 列的元素为 d_{ij}，它表示顶点 i 到顶点 j 的最短路长度。

第 2 步：求出 D 中第 i 行的最大元素 MVV(i) = ($i = 1,2,\cdots,n$)。这将求出顶点 i 到所有其它顶点的最大距离。

第 3 步：求出具有最小 MVV(i) 的顶点 x，x 就是要选择的中心点。

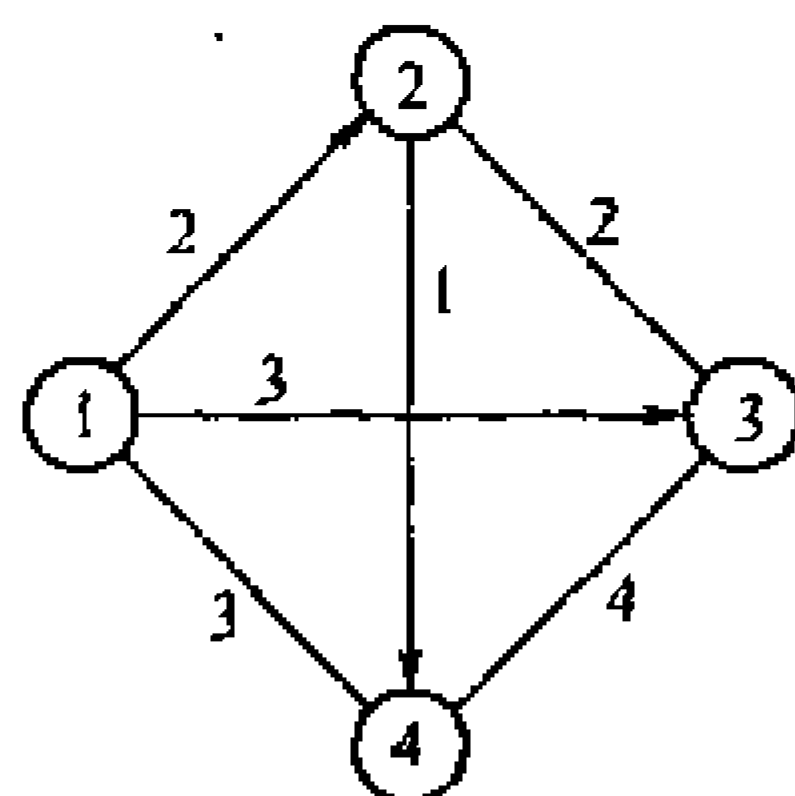


图 7.1

例 1 试求图 7.1 的中心。其中顶点的标号和弧的长度示于

图中;弧的编号及其端点列于表 7.1。

表 7.1

弧	端点号
1	(1,2)
2	(1,3)
3	(1,4)
4	(2,4)
5	(2,3)
6	(3,4)

解　用福劳德算法求出顶点之间的距离矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$\mathrm{MVV}(1) = 3, \quad \mathrm{MVV}(2) = 4$$
$$\mathrm{MVV}(3) = 6, \quad \mathrm{MVV}(4) = 5$$

所以 $\mathrm{MVV}(x) = \min\{3,4,6,3\} = 3 = \mathrm{MVV}(1)$。因而,顶点 1 是图的中心点。从顶点 1 到其他顶点距离最远是 3 个单位。而其他顶点的最远距离都大于 3 个单位。

2. 一般中心的定义和计算方法

定义 7.2.2　设 $\mathrm{MVA}(i)$ 表示网络图 G 中顶点 i 到所有的弧的距离的最大者,即

$$\mathrm{MVA}(i) = \max_{(r,s)}[d(i,(r,s))] \tag{2.3}$$

在所有 $i(i = 1,2,\cdots,n)$ 中,使 $\mathrm{MVA}(i)$ 取最小值的顶点 x,称为图 G 的一般中心点。

定义 7.2.2 用数学符号可表示为

$$\mathrm{MVA}(x) = \min_{i} \max_{(r,s)} \{ d'(i,(r,s)) \} \tag{2.4}$$

式中 $d(i,(r,s))$ 表示网络图中的顶点 i 到弧(r,s) 上最远点的距离。

根据式(2.4),求一般中心点 x 的步骤:

第 1 步:根据顶点和弧的距离的定义,计算顶点到弧的距离矩阵 D',矩阵 D' 的第 i 行第 j 列的元素为 $d'(i,j)$,它表示了顶点 i 到弧 j 的最短路长。

第 2 步:求出 D' 中第 i 行的最大元素 $\mathrm{MVA}(i)(i = 1,2,\cdots,n)$。这一步求出的是顶点 i 到所有弧的距离的最大者。

第 3 步:求出具有最小的 $\mathrm{MVA}(i)$ 的顶点 x,x 就是要选择的一般中心点。

例 2　求图 7.1 的图的一般中心。其中弧的参数、编号及顶点的编号同上。

解　根据上例算出的顶点到顶点的距离矩阵 D 和本题给定的弧长,可以计算出顶点到弧的距离矩阵 D' 为

$$D' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3.5 & 5 \\ 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3.5 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 2 & 3.5 \\ 5 & 6 & 3 & 6 & 5.5 & 4 \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathrm{MVA}(1) = 5, \qquad \mathrm{MVA}(2) = 7$$
$$\mathrm{MVA}(3) = 9, \qquad \mathrm{MVA}(4) = 6$$

所以,$\mathrm{MVA}(x) = \min\{5,7,9,6\} = 5 = \mathrm{MVA}(1)$。因而,顶点 1 是图 G 的一般中心点。从顶点 1 到弧的距离最大值为 5 个单元,距顶点 1 最远的点是弧(3,4) 的中点。

3、绝对中心点的定义和计算方法

定义 7.2.3　设 $\mathrm{MPV}(f(r,s))$ 表示网络图 G 中弧(r,s) 上的 f - 点到所有顶点距离的最大者,即

$$\mathrm{MPV}(f(r,s)) = \max_{j}\{d(f(r,s),j)\} \tag{2.5}$$

在所有弧上的 f－点中，使 $\mathrm{MPV}(f(r,s))$ 取最小值的点 x，称为图 G 的绝对中心点。

定义 7.2.3 用数学符号可表示为

$$\mathrm{MPV}(x(r,s)) = \min_{(r,s),f}\max_{j}\{d(f(r,s),j)\} \tag{2.6}$$

显然有向弧的内点不能成为绝对中心点。因为有向弧的终点比任一内点更接近于图中的每一个顶点。这样，在寻求绝对中心点时，我们只须考虑顶点和无向弧的内点。

考虑任一无向弧 (r,s)，从 (r,s) 上的 f－点到顶点 j 的距离为

$$d(f(r,s),j) = \min\{fd(r,s)+d_{rj},(1-f)d(r,s)+d_{sj}\} \tag{2.7}$$

可以画出其图形，如图 7.2 所示。请读者自行分析三种类型的实际意义。

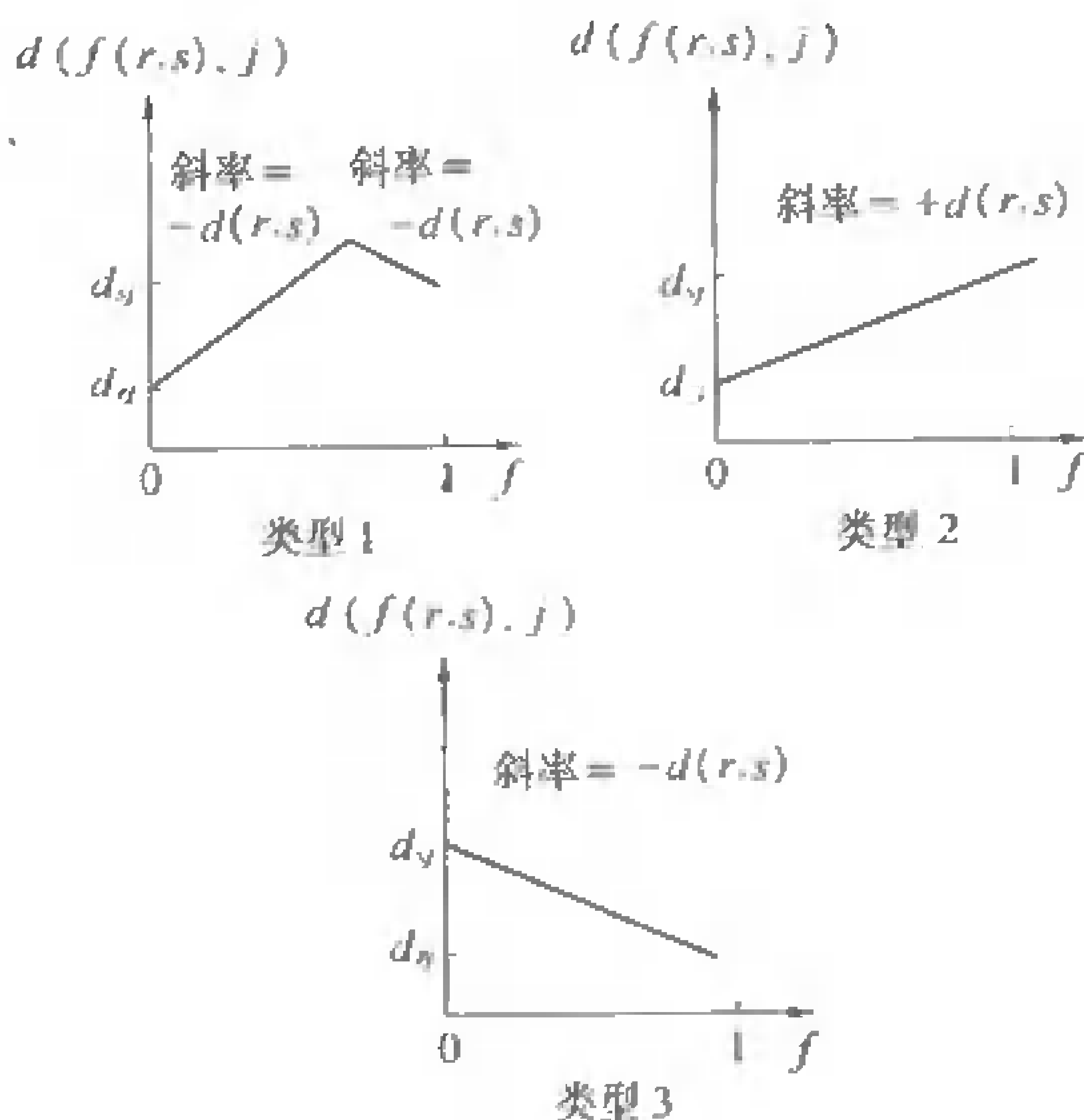


图 7.2

对于每一无向弧(r,s)，逐条画出它与各个顶点j的距离$d(f(r,s),j)$的图形。将其中具有最大值(在图中的最上部分)，作为$\max d(f(r,s),j)$，两条曲线(实际上是折线)的交点f^*处是绝对中心点的最佳选择点之一；如果没有两条曲线而只有一条曲线在最上部分，则只取该条曲线的最小值。.

用这种方法，一定可以找出每条无向弧的最佳选择点。比较所有选择点，其中具有最小距离的选择点就是绝对中心点。

求图G是绝对中心点的步骤为：

第1步：先求出图G的顶点到顶点的距离矩阵D，求出图G的中心点，作为绝对中心备择点。

第2步：找出图G中的无向弧，逐条建立起该弧的f－点与各顶点距离的关系。一般用图形表示，称哈基密(Hakimi)法。

第3步：将每条无向弧到所有顶点的距离的图形画在同一坐标上，取曲线的最上面部分(实质上是最大距离)，求出最小值，从而得f^*(实质上是调整f值，使该弧到所有顶点的距离最大值尽可能小)。

第4步：比较所有无向弧的f^*－点，具有最小距离的弧(r,s)上的f^*－点也作为绝对中心点的备择点。

第5步：比较第1步和第4步所得绝对中心点的距离值，具有最小值的点就是绝对中心点。

例3　试求图7.1的绝对中心。已知条件同前所述。

解　首先根据求中心点的步骤，得出该图的中心点是顶点1，它是绝对中心的备择点之一。它距最远点为3个单位。

该图中有三条无向弧(1,4)，(2,3)和(3,4)。

下面逐条求出弧的f值和各顶点距离的关系。首先考虑弧(3,4)。由式(2.7)计算得

$$d(f(3,4),1)=\begin{cases}4f+6,\text{当 } f\leqslant \frac{1}{8}\\ 7-4f。\text{当 } f\geqslant \frac{1}{8}\end{cases}$$

$$d(f(3,4),2)=\begin{cases}4f+2,\text{当 } f\leqslant \frac{7}{8}\\ 9-4f,\text{当 } f\geqslant \frac{7}{8}\end{cases}$$

$$d(f(3,4),3)=4f(\text{对所有 } f,0\leqslant f\leqslant 1)$$

$$d(f(3,4),4)=\begin{cases}4f+3,\text{当 } f\leqslant \frac{1}{8}\\ 4-4f,\text{当 } f\geqslant \frac{1}{8}\end{cases}$$

根据这些点到顶点距离，可以作出图形如图 7.3。

从图 7.3 可以看到，各条曲线的最上部分由 $d(f(3,4),1)$ 和 $d(f(3,4),2)$ 组成。由这两条曲线的函数表达式和图中交点的位置，可求出 f－点的 f^* 值。

$$7-4f^*=4f^*+2$$

$$\Rightarrow f^*=\frac{5}{8}.$$

$$d(f^*(3,4),1)$$
$$=d(f^*(3,4),2)$$
$$=4.5$$

因而，$f^*(3,4)$ 为绝对中心的备择点。

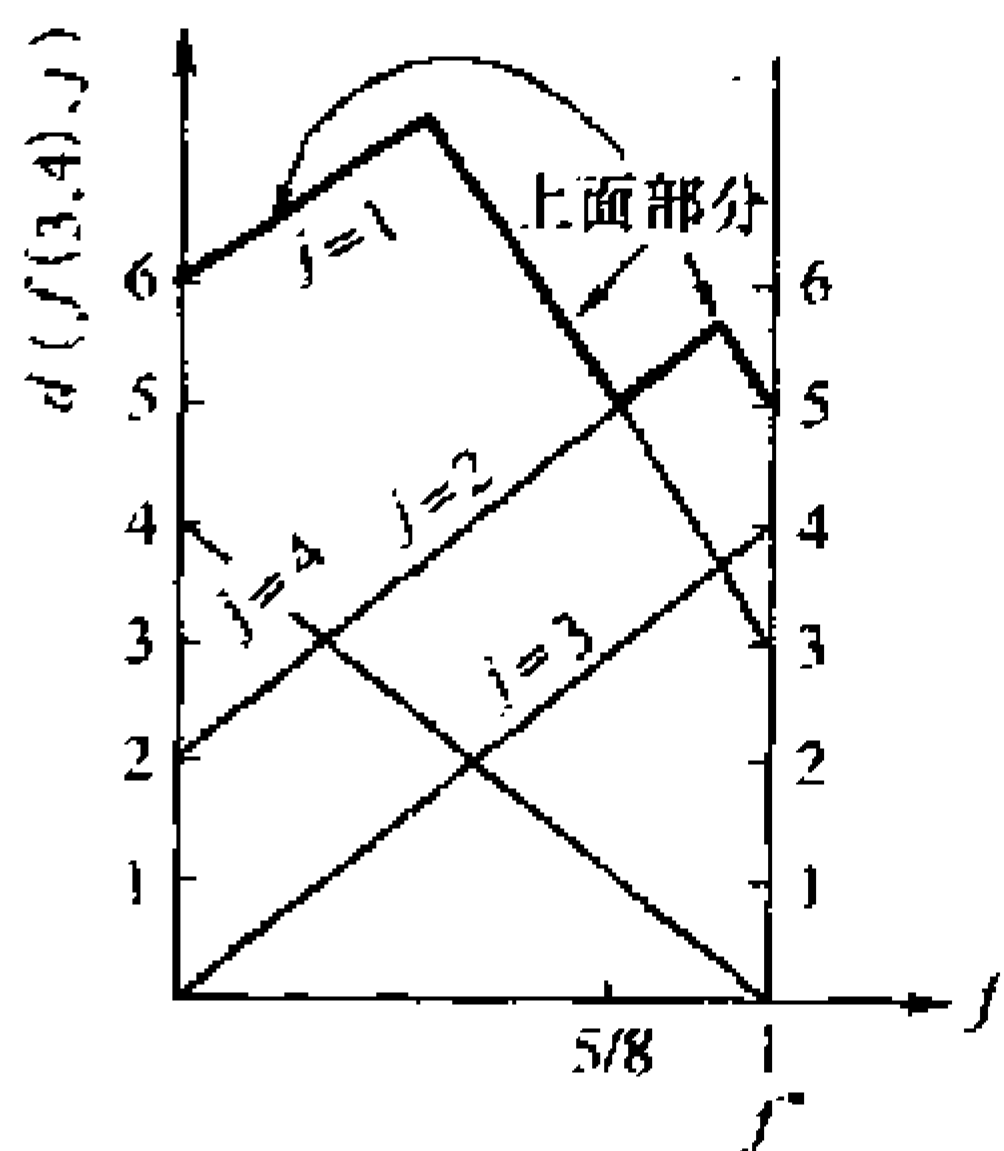


图 7.3　点到顶点距离 $d(f(3,4),f)$ 的图形

对无向弧(1,4)，采用与(3,4)同样的步骤，可得出点到顶点距离的图形如图 7.4。

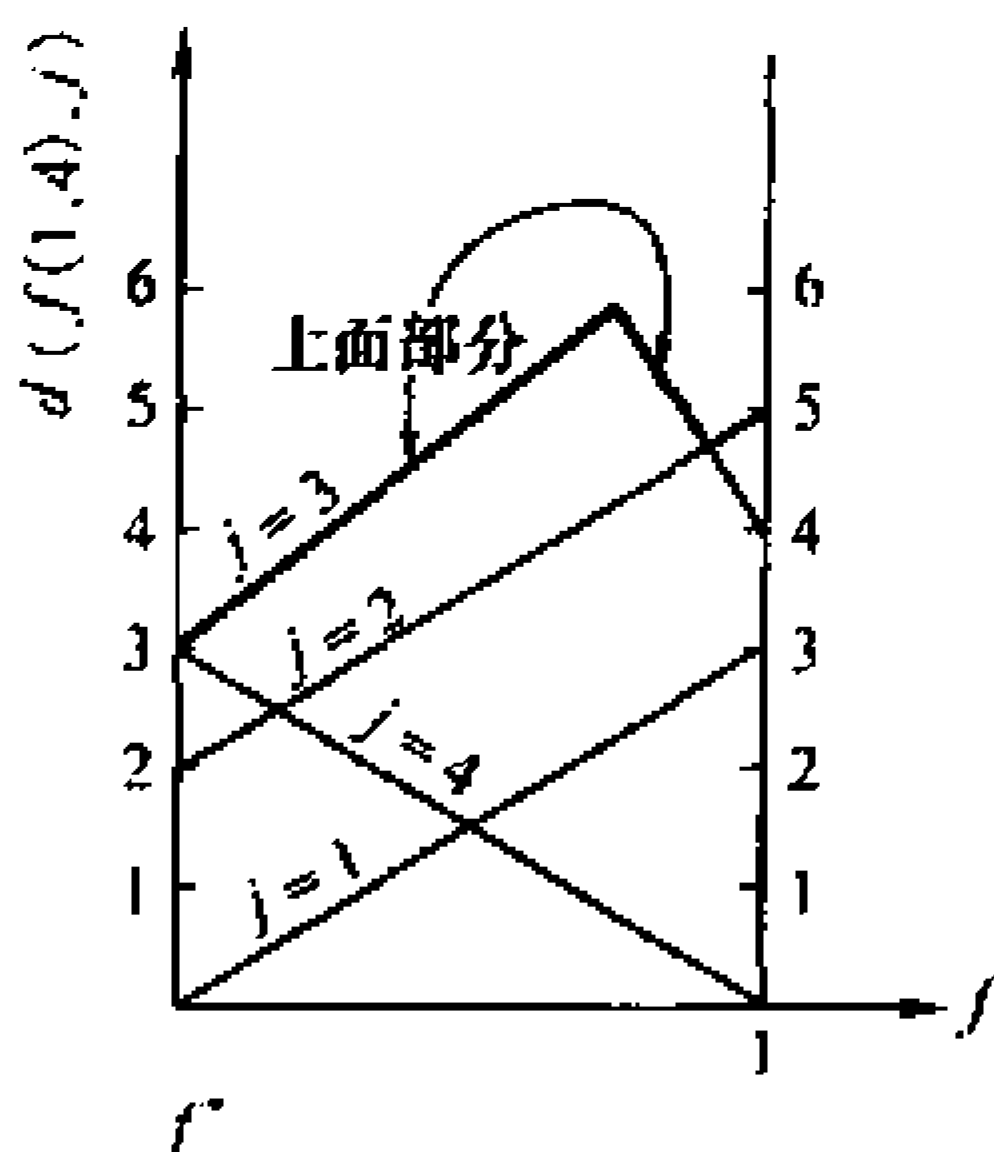


图 7.4　点到顶点距离 $d(f(1,4),f)$ 的图形

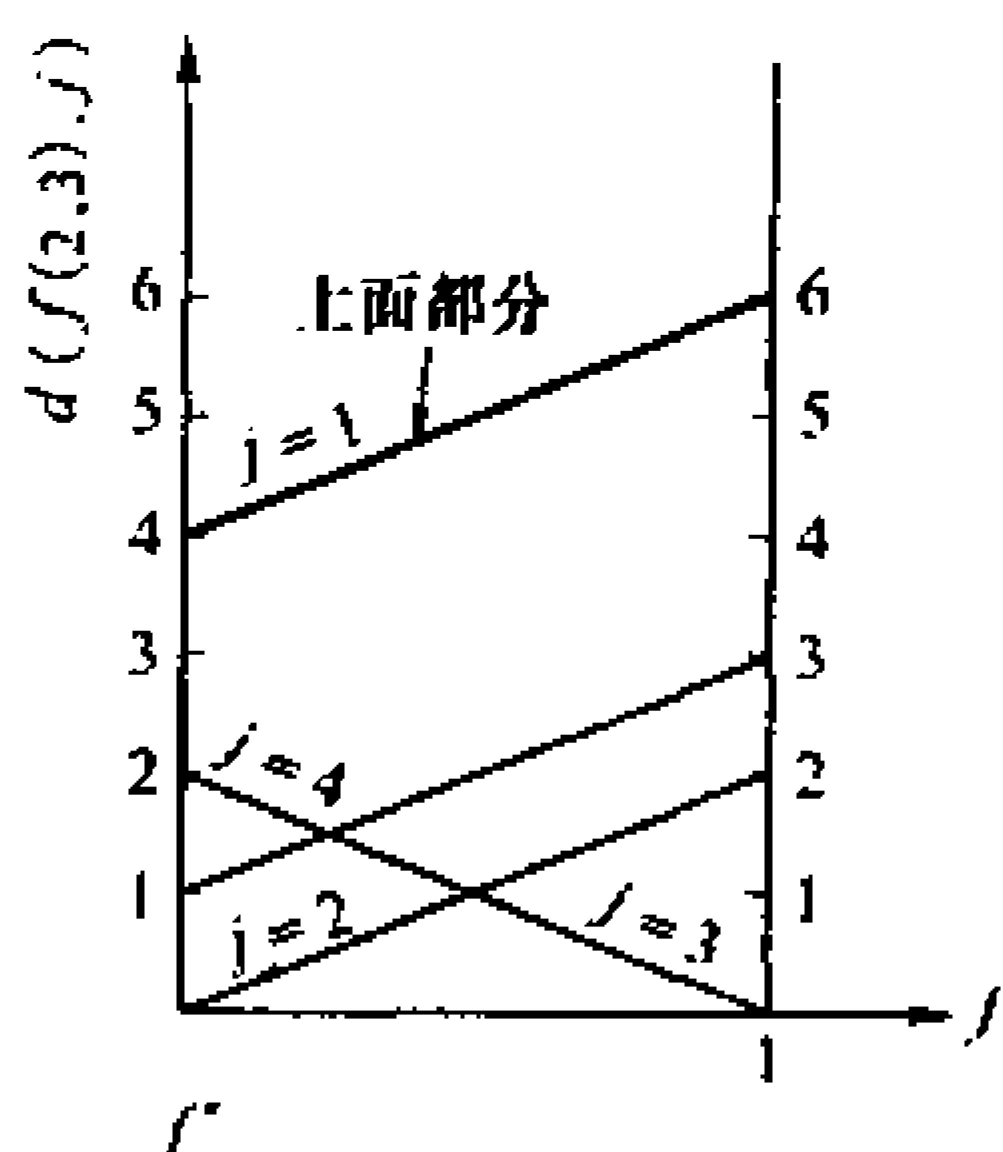


图 7.5　点到顶点距离 $d(f(2,3),f)$ 的图形

从图 7.4 可以看到，各条曲线的最上部分由 $d(f(1,4),2)$ 和 $d(f(1,4),3)$ 组成。由这两条曲线，可求出 f－点的 f^* 值为 $f^*=0$。它表示顶点 1 为绝对中心点的备择点。它与每一个顶点的距离都在 3 个单位之内。

对无向弧(2,3)，用同样的步骤可得到点到顶点的距离如图 7.5。

从图 7.5 清楚地看到，各条曲线的最上部分就是 $d(f(2,3),1)$。分析可知，$f^*=0$ 时，该曲线具有最小值，最小值为 4。这表示顶点 2 到每一个顶点的距离都在 4 个单位之内。顶点 2 也是图 G 的绝对中心点的备择点。

最后，比较中心点，即顶点 1 和三条无向弧上的备择点；可见顶点 1 是最优的备择点，所以顶点 1 是该图的绝对中心点，它距最远顶点的距离不超过 3 个单位。

4. 一般绝对中心有关问题

定义 7.2.4　设 MPA($f(r,s)$) 表示网络图 G 中弧(r,s)上的 f－点到所有弧的距离的最大者，即

$$\mathrm{MPA}(f(r,s)) = \max_{(t,u)}\{d(f(r,s),(t,u))\} \qquad (2.8)$$

在所有弧上的 f - 点中，使 $\mathrm{MPA}(f(r,s))$ 取最小值的点 x，称为图 G 的一般绝对中心点。

用数学符号定义 7.2.4 可表示为

$$\mathrm{MPA}(x(r,s)) = \min_{(r,s),f}\{\max_{(t,u)}(d(f(r,s),(t,u))\} \qquad (2.9)$$

由式(2.9) 和式(2.6) 的相似性可以推测出：有向弧的内点不能成为一般绝对中心点。

寻找一般绝对中心点的过程和寻找绝对中心点的步骤相似，仅仅是用点到弧距离代替点到顶点的距离。因而，可以参照求绝对中心点的技巧来解决该问题。

二、棋盘形网络的中心问题

所谓棋盘形网络是指网络结构如同中国象棋的棋盘一样，每个网孔为矩形或方形的网络。

由于网络有特殊的结构，寻求网络的中心问题不必使用穷举法，而可用更简单的方法。

1. 位于同一直线上 n 个点的中心点问题

设有 n 个点都在 x 轴上，它们的坐标分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，不失一般性，设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，要求找出这 n 个点的中心点 x。

显然 x 只能在区间$[x_1,x_n]$之内，否则最大距离将会更大。如果中心的位置沿着 $x_1 \to x_n$ 的方向移动，开始时 x 和各个点的最大距离取决于 $|x_n - x|$，因而 $x\uparrow$，$|x_n - x|\downarrow$，当 $x = \frac{1}{2}(x_n + x_1)$ 时，$|x_n - x| = |x_1 - x|$，设该点为 M。过了 M 点以后，$x\uparrow$，则 $|x_1 - x|\uparrow$，见图 7.6。易见 $x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_n)$ 曲线取极小值。

因此，$|x_i - x_M|$ 取最小值的点为中心点。如果 x_M 和 $x_1,x_2,$

$\cdots, x_n$ 中的某点重合，则中心的坐标就是 x_M。应该指出，在已知的点位于同一直线上的条件下，中心点和一般中心点位置相同；一般情况下，$x = x_M$ 就是图 G 的绝对中心点，并且它也是问题的一般绝对中心点。

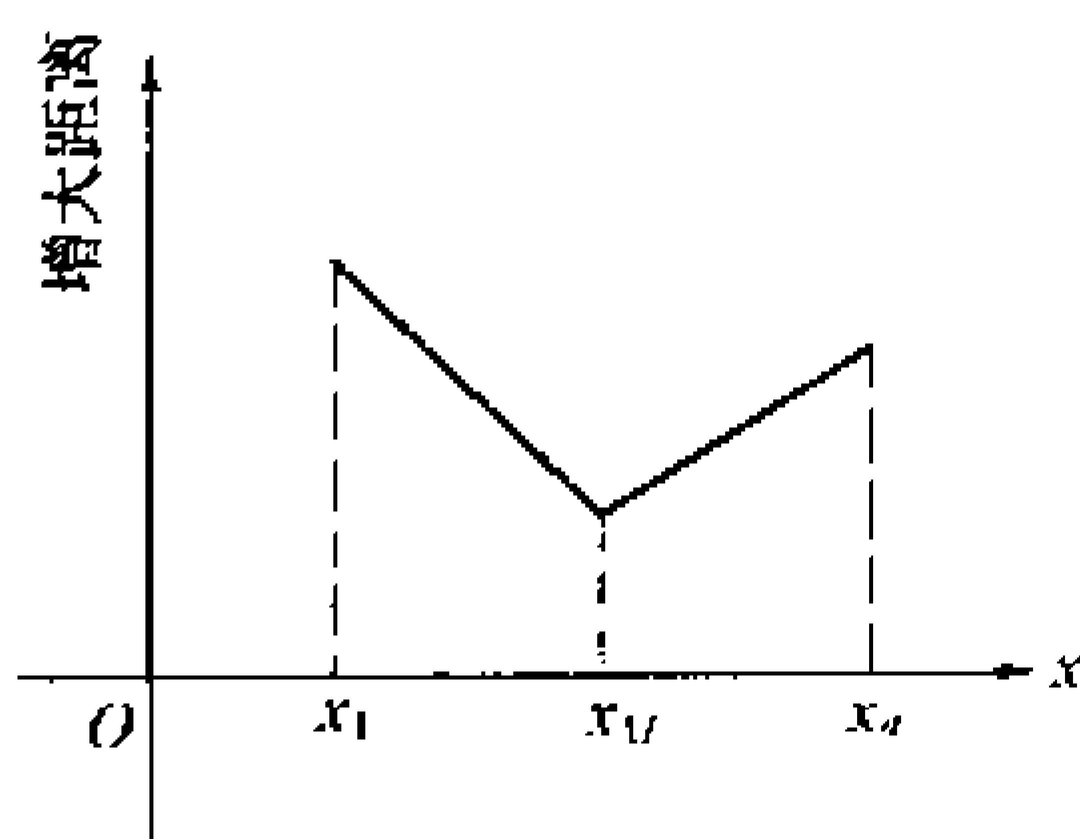


图 7.6

2. n 个点不在同一直线

因为网络为棋盘格，因此，图 G 中任一已知点 i 和中心距离为

$$d = |x_i - x| + |y_i - y| \tag{2.10}$$

式中 x、y 分别为中心点（或绝对中心点）的横坐标和纵坐标。

可见，可以分别研究 $|x_i - x|$ 和 $|y_i - y|$，以便决定中心点的位置。

根据前面的分析，可以有如下结论：

当 $|x_i - x_M|$ 取最小值，同时 $|y_j - y_M|$ 取最小值，则顶点 (x_i, y_j) 为图 G 的中心点（或一般中心点）；

同样可以得到图 G 的绝对中心点（或一般绝对中心点）。

7.3 中位点问题

在网络的选址问题中，确定中位点一类问题的应用相当广泛。本节与上一节相似，对一般网络结构和棋盘格网络结构两种类型分别讨论。

一、一般网络的中位点问题

1. 中位点的定义和计算方法

定义 7.3.1 设 SVV(i) 表示网络图 G 中顶点 i 到所有顶点的距离的总和，即

$$SVV(i) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \tag{3.1}$$

在所有 $i(i = 1,2,\cdots,n)$ 中，使 SVV(i) 取最小值的顶点 x，称为图 G 的中位点。

定义 7.3.1 用数学符号可表示为

$$SVV(x) = \min_{i} \left\{ \sum_{j=1}^{n} d(i,j) \right\} \tag{3.2}$$

式(3.2) 中 d_{ij} 表示顶点 i 到顶点 j 的距离。

根据式(3.2)，得到求中位点 x 的步骤：

第 1 步：用图 G 中已知参数，由最短路计算法建立该图的顶点到顶点的距离矩阵 D。

第 2 步：对矩阵 D 的每一行进行相加，即可得的顶点 i 到所有的顶点的总距离 SVV(i)($i = 1,2,\cdots,n$)。

第 3 步：选出 SVV(i) 中的最小值 SVV(x)，则 x 就是图 G 的中位点。

与求中心点的步骤相比，仅仅第 2 步的计算公式不同。

例 4　试求图 7.1 的中位点。

解　由前面的计算结果，可知该图的顶点到顶点的距离矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

因此

$$SVV(1) = 8, \quad SVV(2) = 7$$
$$SVV(3) = 11, \quad SVV(4) = 12$$

因而，$\min_{i}\{SVV(i)\} = \min\{8,7,11,12\} = 7 = SVV(2)$。所以，顶点 2 就是图的中位点。从顶点 2 到所有的顶点的总距离最小是 7 个

单位。

2. 一般中位点的定义和计算方法

定义 7.3.2 设 SVA(i) 表示网络图 G 中顶点 i 到所有弧的距离的总和，即

$$\mathrm{SVA}(i)=\sum_{(r,s)\in A}d(i,(r,s)) \tag{3.3}$$

在所有 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 中，使 SVA(i) 取最小值的顶点 x，称为图 G 一般中位点。

用数学符号定义 7.3.2 可表示为

$$\mathrm{SVA}(x)=\min_i\left\{\sum_{(r,s)\in A}d(i,(r,s))\right\} \tag{3.4}$$

式(3.4) 中 $d(i,(r,s))$ 表示网络图中顶点 i 到弧(r,s) 的距离。

类似于一般中心点的算法，可以得到一般中位点的计算步骤。请读者自行写出。

例 5 试求图 7.1 的一般中位点。

解 由例 2 计算结果(见 7.2 节)，知该图的顶点到弧的距离矩阵为

$$D'=\begin{bmatrix}2&3&3&3&3.5&5\\6&7&4&1&2&3.5\\8&9&6&3&2&3.5\\5&6&3&6&5.5&4\end{bmatrix}$$

因此

$$\mathrm{SVA}(1)=19.5,\qquad \mathrm{SVA}(2)=23.5$$
$$\mathrm{SVA}(3)=31.5,\qquad \mathrm{SVA}(4)=29.5$$

所以

$$\min_i\{\mathrm{SVA}(i)\}=\min\{19.5,23.5,31.5,29.5\}$$
$$=19.5=\mathrm{SVA}(1)$$

可见，顶点 1 就是该图的一般中位点。从顶点 1 到所有各条弧的总距离最小为 19.5 个单位。

3. 绝对中位点的定义和计算方法

定义 7.3.3 设 SPV($f(r,s)$) 表示图 G 中弧 (r,s) 上的 f－点到所有顶点的距离的总和，即

$$\mathrm{SPV}(f(r,s)) = \sum_{j=1}^{n} d(f(r,s),j) \tag{3.5}$$

在所有弧上的 f－点中，使 SPV($f(r,s)$) 取最小值的点 x，称为图 G 的绝对中位点。

有数学符号，定义 7.3.3 可表示为

$$\mathrm{SPV}(x(r,s)) = \min_{(r,s),f}\left\{\sum_{j=1}^{n} d(f(r,s),j)\right\} \tag{3.6}$$

为了计算图 G 的绝对中位点，我们证明下面的定理。

定理 7.3.1 在网络选址问题中，至少有一个顶点是绝对中位点。

证明 首先，从逻辑推理可以断定，有向弧的内点不可能成为图的绝对中位点，这是因为有向弧的端点到所有顶点的距离的总和比内点到所有顶点的距离总和更小的缘故。其次，我们研究无向弧的内点，根据式(1.4)，容易分析得知，若将 f 看作变数，$d(f(r,s),j)$ 看作 f 的函数，则其图形只能是图 7.2 的三种情况。这三种情况的图形有共同的性质：用一条直线连结图形上的任意两点，则该直线不是图形的一部分，就是位于图形之下，具体见图 7.7。可见 $d(f(r,s),j)$ 是 f 的凹函数。另外，根据凹函数的性质，凹函数之和仍然为凹函数，所以 SPV($f(t,u)$) 也为凹函数。它的极小值只能落在边界上。

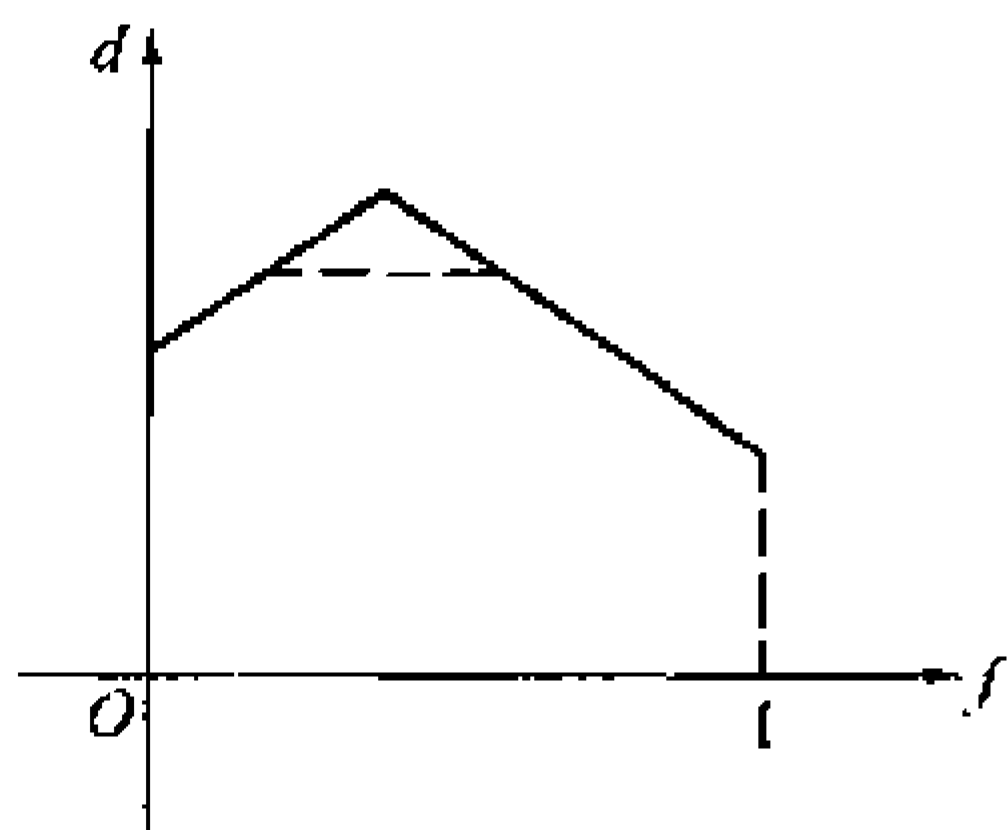


图 7.7

综合有向弧和无向弧两种情况的推理，可以得出这样的结论：

每条边的端点是绝对中位点的备择点，并且优于或至少不劣于相应的边的内点。故命题得证。

从定理 7.3.1 可清楚地看到，寻求网络图的绝对中位点只需考虑顶点到顶点的距离，不需要考虑弧的内点。可以这样说：中位点就是绝对中位点。因而，求图的中位点的算法完全适于求绝对中位点。

4. 一般绝对中位点的定义和计算方法

定义 7.3.4 设 $\mathrm{SPA}(f(r,s))$ 表示网络图 G 中弧 (r,s) 上的 f - 点到所有弧的距离的总和，即

$$\mathrm{SPA}(f(r,s)) = \sum_{(x,y)} d(f(r,s),(x,y)) \tag{3.7}$$

在所有弧上的 f - 点中，使 $\mathrm{SPA}(f(r,s))$ 取最小值的点 x，称为图 G 的一般绝对中位点。

用数学符号，定义 7.3.4 可表示为

$$\mathrm{SPA}(x-r,s)) = \min_{(r,s),f}\left\{\sum_{(x,y)} d(f(r,s),(x,y))\right\} \tag{3.8}$$

从式(3.8)可以看到，一般绝对中位点的计算不像中位点和一般中位点那样直截了当。并且也不存在类似于定理 7.3.1 的结论呢?原因是点到弧距离并非 f 的凹函数(或凸函数)。但是通过分析，我们知道：有向弧的内点不可能是一般绝对中位点；对无向弧，有定理 7.3.2 和 7.3.3，据此可使计算过程得以简化。

结论是：有向弧的内点不可能是一般绝对中位点。

对无向弧，有定理 7.3.2 和定理 7.3.3。

定理 7.3.2 如果 $|\mathrm{SVA}(r)-\mathrm{SVA}(s)| > \frac{1}{2}[d(r,s)+d(s,r)]$ (3.9)

则无向弧 (r,s) 的内点不是一般绝对中位点。

(证明略)

定理 7.3.3 网络图上的任一条无向弧(r,s)上的任一内点f,它到图中所有弧的距离总和$\mathrm{SPA}(f(r,s))$满足:

$$\mathrm{SPA}(f(r,s)) \geqslant \mathrm{SVA}(r) - \frac{1}{2}d(r,s) \tag{3.10}$$

和

$$\mathrm{SPA}(f(r,s)) \geqslant \mathrm{SVA}(s) - \frac{1}{2}d(s,r) \tag{3.11}$$

(证明略)

根据前面对图的有向弧的分析以及定理7.3.2、定理7.3.3的结论,可以概括出求图G的一般绝对中位点的步骤如下:

第1步:用最短路算法求出图G的顶点到顶点距离矩阵D。

第2步:由式(1.2)、式(1.3)和矩阵D,算出顶点到弧的距离矩阵D',找出具有最小$\mathrm{SVA}(i)$的顶点,作为一般绝对中位点的备择点。

第3步:在图G的弧的集合中,排除所有的有向弧。

第4步:利用第1、第2步的计算结果,消去满足式(3.9)的无向弧。

第5步:在弧集合的剩下的无向弧中,进一步用式(3.10)和式(3.11)进行检验,消去下界值大于已选作备择一般绝对中位点确定界值的弧。

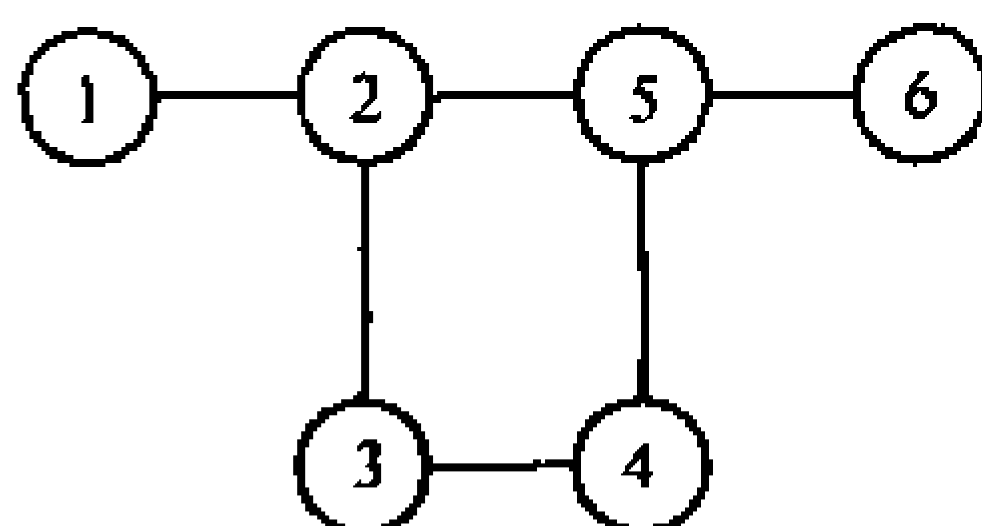
第6步:对于每一条未被消去的无向弧(r,s)的内点进行检验,即计算出$\mathrm{SPV}(f(r,s))$,选择出内点中具有最小$\mathrm{SPA}(f(r,s))$的点作为一般绝对中位点的备择点。

第7步:将第2步和第6步初步确定出的一般绝对中位点的备择点,进一步选优,确定出最后结果。

例6 试求图7.8中的一般绝对中位点。

解 用最短路算法,求出顶点到顶点距离矩阵D为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



(图中所有的弧长都等于 1)

图 7.8

然后，将边的次序排列如下：

①(1,2)　②(2,3)　③(3,4)　④(4,5)　⑤(5,6)　⑥(2,5)

由 D 和式(1.6)，可以算出顶点到弧距离矩阵 D'，得

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathrm{SVA}(1) = 14, \qquad \mathrm{SVA}(2) = 9$$

同理

$$\mathrm{SVA}(3) = 11, \qquad \mathrm{SVA}(4) = 11$$

$$\mathrm{SVA}(5) = 9, \qquad \mathrm{SVA}(6) = 14$$

因而，顶点 2 和顶点 5 是一般绝对中位点的最佳顶点备择点。因为这两个顶点到所有各条弧的总距离等于 9 个单位。

然后，应用定理 7.3.2 的条件式(3.9)，消去某些边的内点。可以看出，图中所有各弧都是无向的，因而，条件式(3.9) 的右边成为 $d(r,s)$。

① 弧(1,2) 可以消去，由于

$$|\mathrm{SVA}(1) - \mathrm{SVA}(2)| = |14 - 9| = 5 > 1 = d_{12}$$

同样 ② 弧(2,3)，弧(4,5)，弧(5,6) 可以消去；而 ③ 弧(3,4)，⑥ 弧(2,5) 不能消去。

再应用定理 7.3.3 的条件式(3.10) 和式(3.11),检查有无可能进一步消去任一条弧。

弧(3,4) 由条件(3.10) 可以消去,因为

$$\mathrm{SPA}(f(3,4)) \geqslant \mathrm{SVA}(3) - \frac{1}{2}d(3,4) = 11 - \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$$

该数大于选择一个顶点作为一般绝对中位点所达到的 9 个单位。而边(2,5) 不能由条件(3.10) 或(3.11) 消去,仅只是弧(2,5) 须考虑。计算弧(2,5) 上的 f - 点到弧的距离:

$$d(f(2,5),(1,2)) = 1 + f$$
$$d(f(2,5),(2,3)) = 1 + f$$
$$d(f(2,5),(3,4)) = \min\{f + 2, 3 - f\}$$
$$d(f(2,5),(4,5)) = 1 + (1 - f)$$
$$d(f(2,6),(5,6)) = 1 + (1 - f)$$
$$d(f(2,5),(2,5)) = \max\{f, (1 - f)\}$$

将这些点到弧距离相加,得

$$\begin{aligned}\mathrm{SPA}(f(2,5)) &= 1 + f + 1 + f + \min\{f + 2, 3 - f\} + 2 \\ &\quad - f + 2 - f + \max\{f, 1 - f\} \\ &= 6 + \min\{f + 2, 3 - f\} + \max\{f, 1 - f\}\end{aligned}$$

曲线 $f + 2$ 和曲线 $3 - f$ 的交点为 $f = \frac{1}{2}$;同样,曲线 f 和曲线 $1 - f$ 的交点也为$\frac{1}{2}$。因而,可以作如下分析:

当 $f \leqslant \frac{1}{2}$ 时

$$\mathrm{SPA}(f(2,5)) = 6 + f + 2 + 1 - f = 9$$

当 $f \geqslant \frac{1}{2}$ 时

$$\mathrm{SPA}(f(2,5)) = 6 + 3 - f + f = 9$$

可见,SPA($f(2,5)$) 与 f 取值无关。所以弧(2,5) 上所有的内点都可作为一般绝对中位点的备择点,其到所有弧的距离的总和

是9个单位。由于顶点2和5仅是 $f=0$ 和 $f=1$ 的特例，它也能作为备择点，和这前面得到的结果一致。可以这么说：弧(2,5)上任一点都可以作为图7.8的一般绝对中位点，这是因为图7.8是一个棋盘形网络。

下面我们就来讨论棋盘形网络的中位点问题。

二、棋盘形网络的中位点问题

前几节的选址问题，每个顶点带有相同的权，每一条弧也带有相同的权。在实际问题中，顶点和弧存在带有不同的权的情况，例如在运输问题中，每一顶点常有不同的运量；每条弧的单位长度单位运量的费用也会不同。因而，在下面的讨论中，将考虑每个顶点带有不同权的情况。若令所有顶点的权相同，则所得结论也适于不带权的情况。举一反三，弧的带权问题可按顶点带权的思路进行类推。

1. 同一直线上 n 个点的加权绝对中位点问题

设有 n 个点都在 x 轴上，其横坐标分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$。每个点相应的权为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$；$A_1\sim A_n$ 均为正数。不失一般性，设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$。现在，要求找出一点 p，其坐标为 x，使

$$F=A_1|x-a_1|-A_2|x-a_2|+\cdots+A_n|x-a_n|$$

趋于最小。

将上式简记成

$$F=\sum_{j=1}^{n}A_j|x-a_j| \tag{3.12}$$

约束条件为 $A_j>0$，a_j 为任何实数，$j=1,2,\cdots,n$；而且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$。

当 $a_s\leqslant x\leqslant a_{s+1}(s=1,2,\cdots,n-1)$ 时

$$F=\sum_{j=1}^{s}A_j|x-a_j|+\sum_{j=s+1}^{n}A_j|x-a_j|$$

$$=\sum_{j=1}^{s}A_j(x-a_j)+\sum_{j=s+1}^{n}A_j(a_j-x)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{s} A_j - \sum_{j=s+1}^{n} A_j\right]x + \left[-\sum_{j=1}^{s} A_j a_j + \sum_{j=s+1}^{n} A_j a_j\right] \tag{3.13}$$

为简化起见,将式(3.13)记为

$$F^{(s)} = M^{(s)}x + D^{(s)} \tag{3.14}$$

式(3.14)是一个斜截式直线方程,斜率为 $M^{(s)}$,截距为 $D^{(s)}$。

对于特殊的情况,首先设 $x \leqslant a_1$,那么

考虑直线

$$F^{(s)} = M^{(s)}x + D^{(s)} \quad x \in [a_s, a_{s+1}]$$

与直线

$$F^{(s-1)} = M^{(s-1)}x + D^{(s-1)} \quad x \in [a_{s-1}, a_s]$$

关系:

由式(3.13)和式(3.14),可得

$$M^{(s)} - M^{(s-1)} = 2A_s \tag{3.15}$$

$$D^{(s)} - D^{(s-1)} = -2A_s a_s \tag{3.16}$$

由式(3.14)、式(3.15)和式(3.16)可以分析出:当 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时,目标函数 F 为分段连续的折线,即 F 是 x 的分段线性函数。而且由式(3.15)可以看出:这条分段连续的折线斜在不断增加,于是目标函数 F 的图形,如图 7.9 所示。

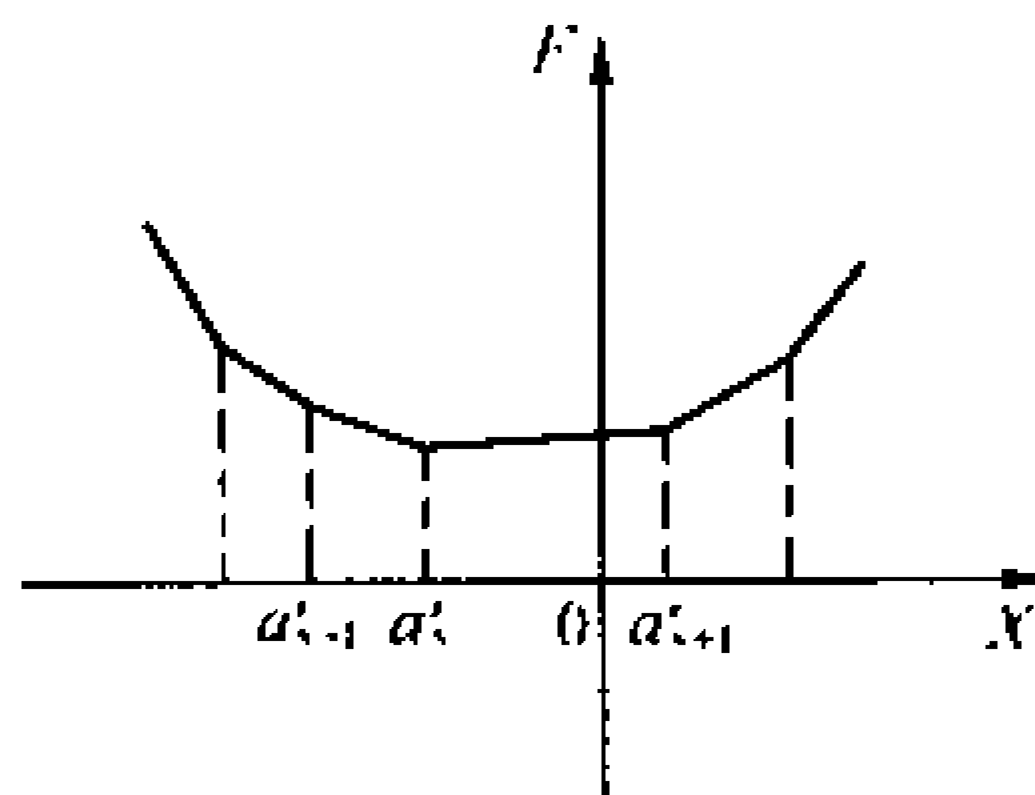


图 7.9

从图形 7.9 和 F 的变化规律,可以推测出:在 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化过程中,F 的曲线的斜率,必然会出现下列两种情况之一:

(1) $M^{(s'-1)} < 0,\ M^{(s')} > 0$ (3.17)

(2) $M^{(s'-1)} < 0,\ M^{(s')} = 0, M^{(s'+1)} > 0$ (3.18)

在情况(1)时，目标函数 F 在 $x = a_{s'}$ 取得取小值，且此时(3.17)可以写成

$$\sum_{j=1}^{s'-1} A_j < \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j \quad 且 \quad \sum_{j=1}^{s'} A_j > \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j \tag{3.19}$$

而在情况(2)时，目标函数 F 在 $[a_{s'}, a_{s'+1}]$ 上的任一点均取最小值，且此时条件(3.18)等价于

$$\sum_{j=1}^{s'} A_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j \tag{3.20}$$

根据上面的推导结果，可得出如下结论：

1° 如果同一直线上的 n 的个点，其坐标为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，相应的权为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$。设 $A_j (j = 1,2,\cdots,n)$ 大于零，并且，$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。如果存在条件(3.19)，则顶点 $a_{s'}$ 为图形的加权中位点(或加权绝对中位点)。

2° 如果存在条件(3.20)，则顶点 $a_{s'}$ 和 $a_{s'+1}$ 是其加权中位点；而线段 $a_{s'}a_{s'+1}$ 上所有的点都可以是图的加权绝对中位点。

3° 令 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 1$，则上面的结论就是不加权的情况。

2. 不在同一直线上 n 个点的中位点问题

前面研究了在一维情况下，n 个点的绝对中位点问题。如果在平面内网络为棋盘形的话，那么上述的方法和结论完全可以推广到二维的情况。在二维的情况下，问题的提法为：

设平面内有 n 个点，其横坐标分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，相应的权为 $A_j > 0 (j = 1,2,\cdots,n)$；其纵坐标为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，相应的权为 $B_i > 0 (i = 1,\cdots,n)$；并且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n, b_1 < b_2 < \cdots < b_n$，求出网络的绝对中位点位置，使其各已知点的加权距离的总和最小，即

$$F = \sum_{j=1}^{n} A_j |x - a_j| + \sum_{i=1}^{n} B_i |y - b_i|$$

趋于最小

因为网络为棋盘格，在 F 中 x 和 y 是分离的，所以使 F 极小可等效为和式中每一项各自求极小。因此，可以直接利用一维情况下的结论。

设使 F 取极小的点为 P，其位置为 (x,y)，如果 n 个点的权满足

$$\sum_{j=1}^{s'-1} A_j < \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j \quad 且 \quad \sum_{j=1}^{s'} A_j > \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j$$

则 $x = a_{s'}$；如果 n 个点的权满足

$$\sum_{j=1}^{s'} A_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j$$

则 $a_{s'} \leqq x \leqq a_{s'} + 1$。

同理，如果 n 个点的权满足

$$\sum_{i=1}^{t'-1} B_i < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B_i \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{t'} B_i > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B_i$$

则 $y = b_{t'}$；如果 n 个点的权满足

$$\sum_{i=1}^{t'} B_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B_i$$

则 $b_{t'} \leqq y \leqq b_{t'} + 1$

可见，如果 n 个已知点的横坐标和纵坐标都处于情况(1)，则 P 是一个点，这时，中位点和绝对中位点相同；如果 n 个已知点横坐标和纵坐标有一个处于情况(1)，另一个处于情况(2)，则 P 是一条直线，这时中位点有两个位置，绝对中位点是一条直线；如果 n 个已知点的横坐标和纵坐标都处于情况(2)，则 P 是一个矩形区域，这时中位点有四个位置，绝对中位点是该矩形区域围绕的四条边上的所有的点。

例 7 棋盘形网络上的五个地点和运量如表 7.2，求最优厂址，使总的运输费用最小(为方便起见，设每单位长度单位运输费用为 1)。

表 7.2

n	x_i	y_j	A_j
1	2	6	80
2	5	5	20
3	8	3	40
4	3	2	50
5	6	9	60

解　首先将 x 从小到大进行排列为 2,3,5,6,8;运量实际上就是每个点的权,因此,横坐标的权相应为 80,50,20,60,40;同样 y 重新排列为 2,3,5,6,9;相应的权相应为 50,40,20,80,60。

其次,因为 $\sum_{j=1}^{n} A_j = 250$,而 $80 + 50 = 130 > \frac{1}{2} \times 250$,所以,$x^* = 3$;另一方面,$50 + 40 + 20 + 80 = 190 > \frac{1}{2} \times 250$,所以 $y^* = 6$,所以最优厂址是(3,6)。相应的最小运费为 F_{min} 为 1020。计算结果见图 7.10。

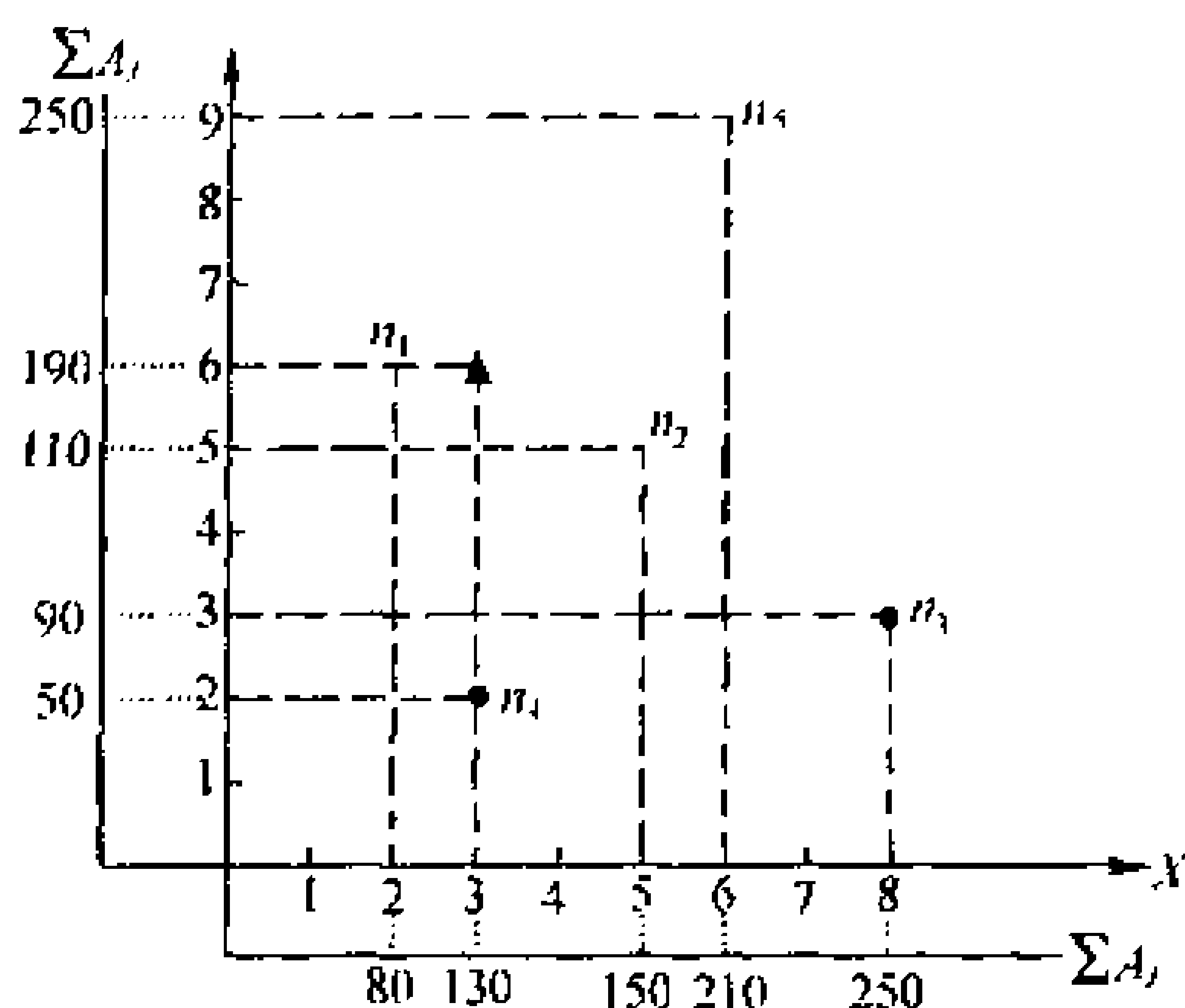


图 7.10

8 网络流

网络流问题是图论与组合最优化中内容丰富、应用广泛的一个问题。运输问题，分派问题，通讯问题等许多问题都可转化为网络流来解决。一般有向网络中，每条弧的权，不是表示弧的长度，而是象表示弧的宽度。例如，公路运输网络中路面的宽度或管道输送网络中管道的直径，它是单位时间内允许通过实体的限量。所以将弧权称为弧的容量。

本章将介绍网络流基本理论和求解网络流问题的主要算法及有关应用。

8.1 基本概念和基本定理

本章主要将讨论如下的网络。

定义 8.1.1 设有向连通图 $D=(V,A)$ 满足

(1) D 包含两个特定的顶点 x 和 y，其中 x 仅有出弧而没有入弧，称为**发点**；y 仅有入弧而没有出弧，称为**收点**；D 中其余顶点既有出弧，又有入弧，称为**中间点**；

(2) 在 D 的弧集 A 上定义非负整值函数 e，称为**容量函数**，对任意的弧 $a \in A$，称 $C(a)$ 为弧 a 上的**容量**；

此时称有向图 D 构成一个**网络**，记为 $N=(V,A,C)$。

对于任意一个有多个收、发点的网络，可以通过一个简单的方法化成只有一个发点和一个收点的网络，具体做法是在给定网络 N 基础上，构作一个新的网络 N' 如下：

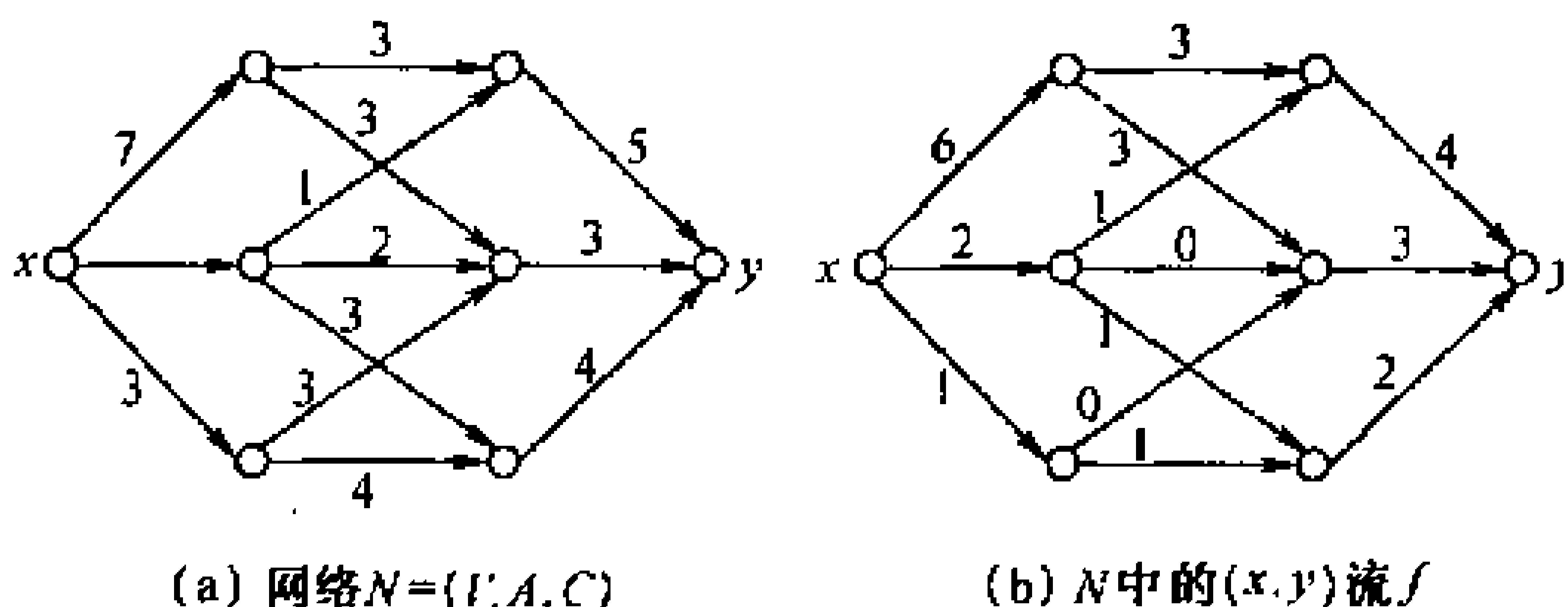
(1) 在 N 中添加两个顶点 x 和 y；

(2) 用容量为 ∞ 的弧把 x 连接到 X 中的每一个发点;

(3) 用容量为 ∞ 的弧把 Y 中的每个收点都连接到 y;

(4) 指定 x 为 N' 的发点,y 为 N' 的收点。

图 8.1(a) 所示的是一个整容量网络,弧 a 上的数值为容量 $C(a)$。



(a) 网络 $N=(V,A,C)$　　(b) N 中的 (x,y) 流 f

图 8.1

定义 8.1.2　对于网络 $N=(V,A,C)$,称定义在弧集 A 上的函数 f 为**网络 N 上的流**;对于弧 $a\in A$,$f(a)$ 称为**弧 a 上的流量**,如果 $a=(v_i,v_j)$,$f(a)$ 也可记为 $f(v_i,v_j)$ 或 f_{ij};对于顶点 $v\in V$,记 $f^+(v)=\sum\limits_{v_i=v}f_{ij}$,$f^-(V)=\sum\limits_{v_j=v}f_{ij}$,分别称为**流出和流入顶点 v 的流量**。如果流 f 进一步满足:

(1) 容量限制条件:

$$0\leqslant f(a)\leqslant C(a)\qquad \forall a\in A \tag{1}$$

(2) 平衡条件:

$$f^+(v)=f^-(v)\quad \forall v\in V\setminus\{x,y\}$$

则称为 f 为**网络 N 的一个可行流**。

显然,可行流总是存在的,例如 $f\equiv 0$ 是一个可行流。

对于上述的网络 N 和 N',其流以一个简单方式相对应。若 f 是 N 中的流,则由

$$f'(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A \\ f^+(v)-f^-(v) & a=(x,v) \\ f^-(v)-f^+(v) & a=(v,y) \end{cases}$$

所定义的函数 f' 是 N' 中的一个流，进一步，若 f 是 N 的可行流，则 f' 是 N' 中的一个可行流。

设 f 是一个可行流，f 在弧 a 上的流量 $f(a)$，可以看作 f 中物资沿着 a 输送的数量。(1) 式表明沿一条弧的流量不能超过这条弧的容量；(2) 式表明，对于任何中间点 v，物资流入 v 的流量等于流出 v 的流量。进一步，不难证明，$f^+(x)-f^-(x)=f^-(y)-f^+(y)$。因此，称 $f^-(y)-f^+(y)$ 为可行流 f 的值，记为 $v(f)$。

网络流研究中的一个基本问题是求网络 N 中一个可行流 f，使 $v(f)$ 达到最大，这种流称为最大流，这个问题称为网络最大流问题。最大流问题等价于下述线性规划问题。

$$\begin{aligned} &\max v \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{v_j} f_{ij}-\sum_{v_j} f_{ji}=v \qquad v_i=x \\ &\qquad\ \ \sum_{v_j} f_{ij}-\sum_{v_j} f_{ji}=-v \qquad v_i=y \\ &\qquad\ \ \sum_{v_j} f_{ij}-\sum_{v_j} f_{ji}=0 \qquad v_i\neq x,y \\ &\qquad\ \ 0\leqslant f_{ij}\leqslant C_{ij} \qquad \forall (v_i,v_j)\in A \end{aligned} \tag{3}$$

因此，最大流问题可以用单纯形法或其他求解线性规划的方法解决。这里，我们希望利用问题本身的结构得到更简单的方法。

定义 8.1.3 给定网络 $N=(V,A,C)$，若 V 被剖分为两个非空集合 $S,\overline{S}$，使 $x\in S,y\in\overline{S}$，称 $(S,\overline{S})$ 是分离 x 和 y 的一个截集。因而从网络中舍弃任一个截集，则从 x 到 y 就不存在有向路。

记 $C(S,\overline{S})=\sum\limits_{(v_i,v_j)\in(S,\overline{S})} C_{ij}$，称为截集 $(S,\overline{S})$ 的容量，简称截量。

引理 8.1.1 设 f 是任一个可行流，$(S,\overline{S})$ 是任一个截集，则

$$v(f) = f^+(S) - f^-(S) \tag{4}$$

$$v(f) \leqslant C(S,\overline{S}) \tag{5}$$

证明 $v(f) = [f^+(x) - f^-(x)] + \sum\limits_{v\in S\setminus(x)} (f^+(v) - f^-(v))$

$$= \sum_{v\in S}(f^+(v) - f^-(v))$$

$$= f^+(S) - f^-(S)$$

$$= f(S,\overline{S}) + f(S,S) - f(S,S) - (f(\overline{S},S)$$

$$= f(S,\overline{S}) - f(\overline{S},S) \leqslant C(S,\overline{S})$$

这意味着(4),(5)式成立。 证毕。

由此,若能得到一个可行流 f^* 及一个截集$(S,\overline{S})$,使 $v(f^*) = C(S,\overline{S})$,则 f^* 便是最大流,而$(S,\overline{S})$是所有截集中容量最小的一个,称之为最小截集。

由 Ford 和 Fulderson 提出来的求最大流的算法,就是去找这样的可行流 f^* 和截集$(S,\overline{S})$。

设 P 是D 中一条$x-v$ 路,规定 P 的正方向是从x 到v,则 P 上的弧被分为两部分:一部分弧是与 P 的正方向相同,记为 P^+,另一部分弧是与 P 的正方向相反,记为 P^-,P^+ 和 P^- 中可能有一个是空集合。

定义 8.1.4 设f是网络N的一个可行流,P是一条$x-y$路,则 P 满足下列两条件之一的弧(v_i,v_j)称为增广弧。

(1) $(v_i,v_j) \in P^+$,且 $f_{ij} < C_{ij}$ 即为不饱和弧;

(2) $(v_i,v_j) \in P^-$,且 $f_{ij} > 0$ 即为非空弧。

如果 P 中的弧都是增广弧,则称 P 为关于f 的增广路。

引理 8.1.2 如果一个可行流存在增广路,则该可行流不是最大流。

证明 设 P 是N 的一条$x-y$ 增广路,令

$$\theta = \min\{\min_{v_iv_j\in P^+}(C_{ij} - f_{ij}),\ \min_{v_iv_j\in P^-} f_{ij}\} \tag{6}$$

构据增广路的定义，$\theta > 0$。

构造一个新的流 f' 如下：

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta & v_iv_j \in P^+ \\ f_{ij} - \theta & v_iv_j \in P^- \\ f_{ij} & v_iv_j \notin P \end{cases} \quad (7)$$

(以后称这个运算为 f 在 P 上作 θ 的平移)。不难验证，$f' = \{f'_{ij}\}$ 仍是 N 中的一个可行流，其流量为 $v(f) + \theta$，这意味着 f 不是最大流。 证毕。

上面的证明实际上是一个构造性证明，从可行流 f 和增广路 P，构建可行流 f' 的过程，称为 f 关于 P 的增广过程。

定理 8.1.3 （**增广路定理**）N 中的可行流 f 是最大流当且仅当 N 中不存在关于 f 的 $x - y$ 增广路。

证明 必要性由引理 8.1.2 可直接得到，下面证明充分性。

假设 N 中不包含关于 f 的增广路，我们证明 f 是最大流。

记网络中从 x 出发，沿增广弧可以到达的顶点集为 S，则 $x \in S$，$y \in \overline{S}$。于是，$(S,\overline{S})$ 构成 N 一个截集。从而，对于任一弧 $v_iv_j \in (S,\overline{S})$，必有 $f = C_{ij}$；对于任一弧 $v_iv_j \in (\overline{S},S)$，必有 $f_{ij} = 0$。则由引理 8.1.1 的证明得 f 必是最大流，$(S,\overline{S})$ 是最小截集。 证毕。

从定理 8.1.3 的证明可以看出寻求最大流的基本途径实际上是化成寻求从 x 到 y 的增广路的问题。由此引出的求网络最大流的算法将在下节介绍。

根据定理 8.1.3 的证明，我们也得到了网络最优化理论中的一个重要定理。

定理 8.1.4 （**最大流最小截定理**）在任何网络中，最大流的流量等于最小截集的截量。

定理 8.1.5 （**整流定理**）如果网络所有的弧容量都是整数，则存在整数最大流。

证明 对任意$(v_i, v_j) \in A$,取 $f_{ij} = 0$,得到一个零可行流。如果整数可行流 f 不是最大流,由定理 8.1.3,存在关于 f 的增广路。利用(6) 和(7) 式可以得到一个新的可行流 f',由于弧的容量均为整数,且 f 的流值也是整数,所以 f' 也是一个整数可行流。

如果 f' 不是最大流,用上述方法可以继续增广,得到的每个可行流也都是整数流,直至不可增广,就得到整数最大流。 证毕。

最大流最小截定理和增广路定理是网络流分析方法的基础。关于图的许多结果,在适当选择网络后,就可以看成定理 8.1.4 的简单推论。

设 D 是一个有向图,给定 D 中的两个顶点 x 和 y,如果规定每条弧的容量均为 1,都可以构造一个以 x 为发点,y 为收点的单位容量网络。利用该网络,可以证明下面的定理。

定理 8.1.6 (**Menger 定理**) 设 x, y 是有向图 D 中两个顶点,则 D 中弧不重的有向 $x - y$ 路的最大数目等于分离 x, y 的弧的最小数目。

设 G 是一个无向图,对于 G 的每一边 $e = uv$,用两条弧(u, v),(v, u) 代替 e,记所得到的有向图为 $D(G)$ 称为 G 的伴随有向图。通过考虑 G 的伴随有向图 $D(G)$,我们得到如下定理:

定理 8.1.7 设 x, y 是图 G 的两个点,则 G 中边不重的 $x - y$ 路的最大数目等于分离 x, y 的边的最小数目。

推论 8.1.8 图 G 是 k 边连通的当且仅当对于 G 中任意两个相异顶点 u, v,存在至少 k 条边不重的 $u - v$ 路。

现在讨论具有弧容量和点容量的网络。如果一个有向网络中,不仅弧具有容量限制,而且点也具有容量限制。也就是说,进入点 j 的总流量值不超过它的容量 w_j,即对每点 j,都有

$$\sum_{ij \in N^-(j)} x_{ij} \leqslant w_j。$$

对于这类有向网络中求最大流的问题,也可以化成在一个新

的网络中,求基本最大流的问题。具体做法如下:

在原有向网络中,把每个点 j 分为两个点 j^+ 和 j^-,同时在 j^+ 和 j^- 之间连一条弧 (j^+,j^-),其容量为 w_j,并且点 j 的每条入弧 (i,j) 都改为 (i^-,j^+),其容量不变,点 j 的每条出弧 (j,k) 都改为 (j^-,k^+),其容量也不变。

8.2 最大流问题的算法

最大流问题的算法是由 Ford 和 Fulkerson 于 1957 年最早提出的,基本思路是从任一个可行流(例如 $f\equiv 0$)出发,判断 N 中有无关于 f 的 $x-y$ 增广路。若没有这样的增广路,则 f 是最大流;若有这样的增广路,则可根据引理 8.1.2 证明中的(6)和(7)式,对 f 进行调整,得到一个新的流量更大的可行流 f';对 f' 再重复上述过程,直到找不出 $x-y$ 增广路为止。

最大流问题算法的关键在于寻找 $x-y$ 增广路,我们可以以 x 为根,逐步生长树的办法来实现。在这个树中,从 x 到树中任一点 v,有从 x 到 v 的增广路,称这样的树为增广树。一旦 y 进入树内,则得到从 x 到 y 的增广路 P。在 P 上,按定理 6.1 的证明中的方法修改流,得到一个新的流量更大的可行流。如果增广树不能再生长,而 y 不属于树,则 f 是最大流。

生长增广树可以用标号方法。在标号过程中,一个点仅有下列三种状态之一:标号已检查(有标号且所有相邻点都标号了);标号未检查(有标号,但某些相邻点未标号);未标号。一个点 v_i 的标号由两部分组成,并取两种形式 $(+j,\delta(i))$ 和 $(-j,\delta(i))$ 之一。如果 v_i 被标号且存在弧 (v_i,v_j),使得 $f_{ij}<c_{ij}$,则未标号点 v_j 给予标号 $(+i,\delta(j))$,其中

$$\delta(j)=\min\{\delta(i),c_{ij}-f_{ij}\};$$

如果 i 被标号且存在弧 (v_j,v_i),使得 $f_{ij}>0$,则未标号点 v_j

给予标号$(-i,\delta(j))$，其中

$$\delta(i)=\min\{\delta(i),f_{ji}\}.$$

当过程继续到y被标号时，一条从x到y的增广路被找到，且它的流量可以增加$\delta(y)$。如果过程不能进行，且y没有得到标号，则不存在$x-y$增广路。这时，令S是所有标号点的集合，T是所有未标号点的集合，则(S,T)是一个截集，由定理8.1.4知，截集(S,T)的容量就是最大流的值。

Ford - Fulderson **标号算法**

步骤0 令$f=\{f_{ij}\}$是任意可行流，可能是零流。令$x=v_0$，给x一个永久标号$(-,\infty)$

步骤1

1.1 如果所有标号点都被检查，转步骤3，否则，

1.2 找一个标号但未检查的点v_i，并做如下检查：对每一弧(v_i,v_j)，如果$f_{ij}<c_{ij}$且v_j未标号，则给v_j标号$(+i,\delta(j))$，其中

$$\delta(j)=\min\{\delta(i),c_{ij}-f_{ij}\}$$

对每一弧(v_j,v_i)，如果$f_{ji}>0$且v_j未标号。则给v_j标号$(-i,\delta(j))$，其中

$$\delta(j)=\min\{f_{ji},\delta(i)\}$$

如果y被标号，则转步骤2；否则返回1.1。

步骤2 由点y开始，使用标号的第一个元素构造一条增广路P(点y的标号的第一个元素表示在路中倒数第二个点的下标，而这第二个点的标号的第一个元素表示倒数第三个点的下标，等等)，在P上作$\delta(y)$平移得新的可行流f'(标号的第一个元素的正负号表示通过增加或减少弧流来增大流值)。以f'代替f，去掉点x外的所有标号，转步骤1。

步骤3 这时可行流是最大的。把所有标号点记为S，未标号点记为T，则(S,T)是一个最小截集。

从算法的过程可以看出，只要N中存在增广路，算法就一定

能找到增广路。所以当标号算法中止时，就一定达到了最大流。那么，算法能否在有限步内中止呢？当弧容量为无理数时，可以找到例子，使算法不能在有限步内终止，而且流的极限值严格小于最大流的值。实际问题中容量全为有理数，可以把容量乘上一个适当的因子，化为全是整数的情形。因此，我们可以仅讨论容量全是整数的情形。此时根据整流定理，最大流 $V(f)$ 也是整数且有上界，我们可以从一个整数可行流（例如 $f=0$）开始，每一步取 θ 为整数。若最大流值为 $v(f)$，因为每一次增广，流的值至少增加一个单位，因此，最多增广 $v(f)$ 次，即在有限步内必可求出最大流。

现在我们进一步分析上述算法的复杂性。由于增广的次数可能和最大流值有关。因此，这个算法不是有效算法。对图 8.2 中的网络 N，N 中最大流的值显然是 $2m$。如果从零流开始，并且轮流选择 $xpuvsy$ 和 $xrvuqy$ 作为增广路，因为在每一种情形下，流值每次都恰好增加 1，因此，这个标号法要增广 $2m-1$。由于 m 是任意的，所以在这个例子中完成标号法所需的计算步骤不能用 v 和 ϵ 的函数来限定，即它不是有效算法。

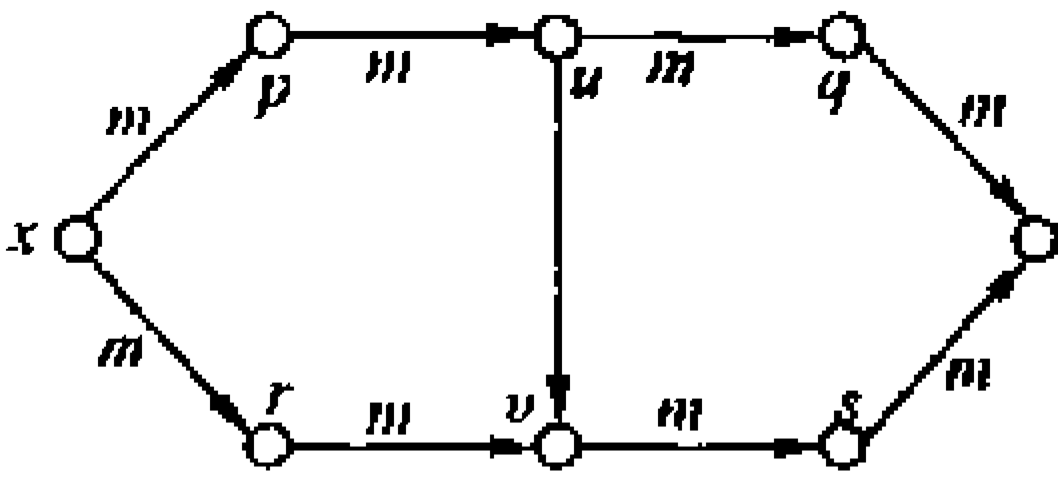


图 8.2

Edmonds 和 karp 证明：标号算法的标号过程中，遵守先标号点先检查的原则，则上述算法就转变为有效算法。利用该原则，实际上，每次增广都选择最短的增广路来进行。图 8.2 所示网络中的最大流仅用两次增广就可以求出。

例 1 求图 8.3 所示网络中从点 1 到 6 的最大流，图中弧旁的第一个数字表

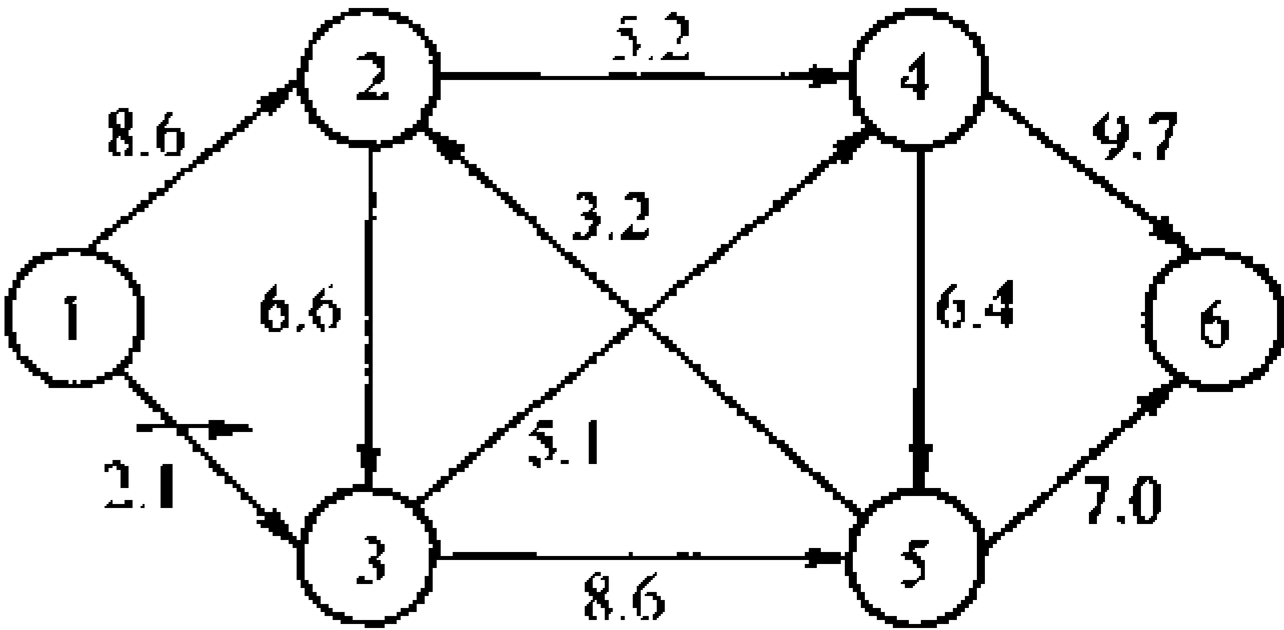


图 8.3

示容量，第二个数字表示给定的初始流。

用 Ford-Fulkerson 标号算法的迭过程表示在图 8.4 中。

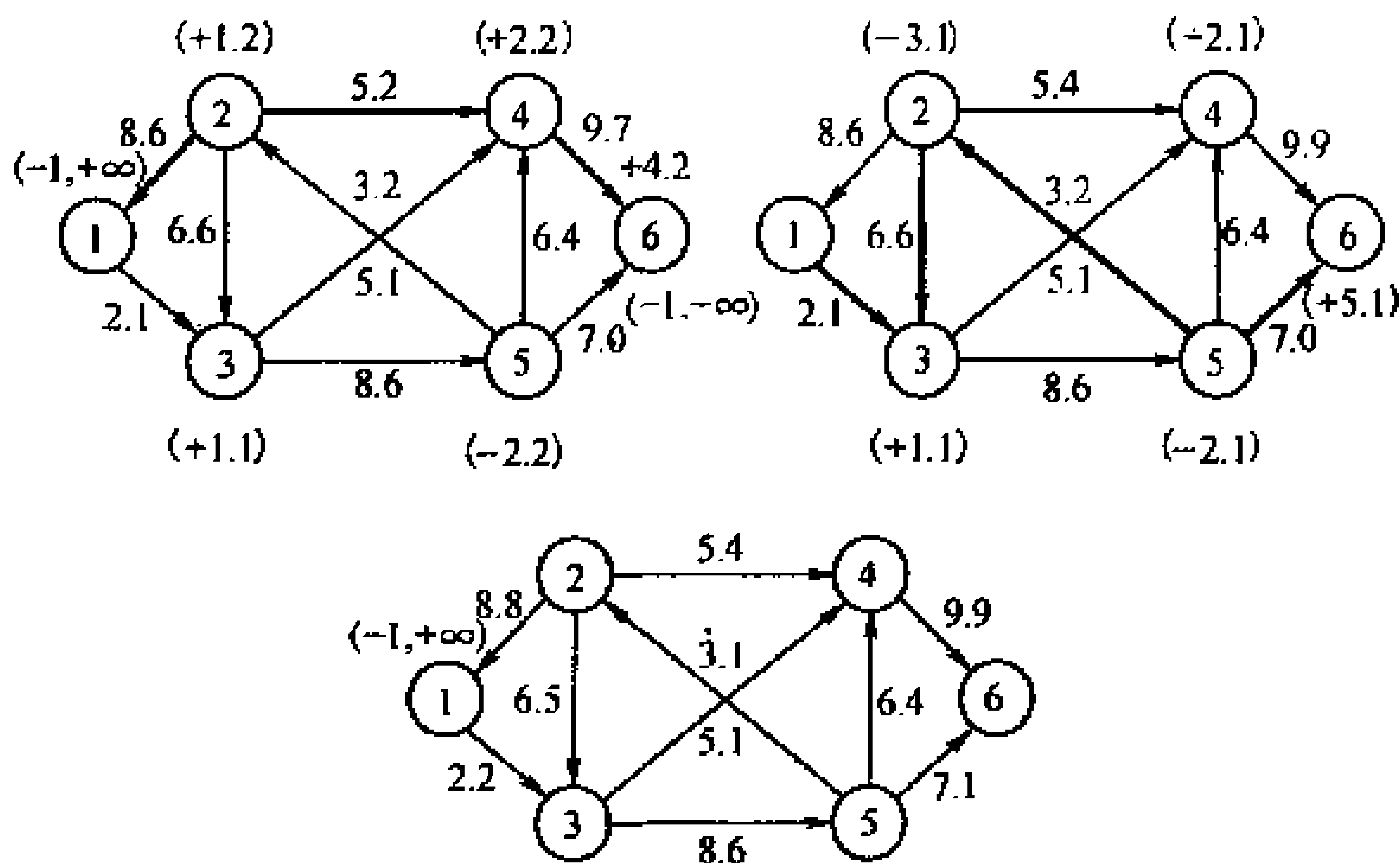


图 8.4

在 Edmons 和 Karp 之后，围绕着如何减少求网络最大流算法的计算量，相继出现了许多改进的方法。下面简要介绍根据 Karzanov 的预流推进思想提出 Dinits 方法和 MPM 方法（由 Malbotra 及 Pramodh 和 Maheshwari 提出）。

Dinits 方法的思想是对 f 求最短增广路时，首先搜索出所有的最短 $x-y$ 增广路，而不是每次找出一条，对每条这样的路作平移变换后，再重新从 x 开始搜索新的最短 $x-y$ 增广路。Dinits 方法的第一步是构造一个所谓分层网络 $N(f)=(V_f, E_f, c_f)$。

设 f 是一个可行流，令 $V_0=\{x\}$。设 $V_0, V_1, \cdots, V_{i-1}$ 已有定义（$i \geqslant 1$），令

$V_i=\{v \mid v \notin \bigcup_{j=0}^{i-1} V_j$，存在 $u \in V_{i-1}$，使 $uv \in E$ 及 $f(uv)<c(uv)$；或者使 $vu \in E, f(vu)>0\}$。

若 $V_i \neq \varnothing$，则显然 f 是最大流，否则，若 $y \in V_i$，令 $V_i = \{y\}$。否则，重复上述过程，定义 V_{i+1}。

上述确定 $V_0, V_1, \cdots$ 的过程实际上是广探法的实施。设 $V_0, V_1, \cdots, V_r$ 是被定义的集合，$V_0 = \{x\}$，$V_r = \{y\}$。则分层网络被定义如下：

设 $V_f = \bigcup_{j=0}^{r} V_j$，称 V_j 是 $N(f)$ 的第 j 层。考察任一点 $u \in V_i$，$v \in V_{i+1} (0 \leqslant i \leqslant r-1)$。若 $uv \in E$，且 $f(uv) < c(uv)$，则令 $uv \in E_f$，$c_f(uv) = c(uv) - f(uv)$（称 uv 为 E 中的第一类弧）；若 $vu \in E$，且 $f(vu) > 0$，则令 $vu \in E_f$，$c_f(uv) = f(vu)$（称 vu 为 E 中的第二类弧）。

显然，分层网络 $N(f)$ 中的每一条 $x-y$ 路对应着 N 中关于 f 的一条最短 $x-y$ 增广路。

Dinits方法的第二步是求分层网络 $N(f)$ 上的一个极大流 f_f。所谓极大流是指每条 $x-y$ 路上，都至少有一条弧 uv，使 $f_f(uv) = c_f(uv)$（称 uv 为饱和弧）。具体做法是：

设 f 是任意一个可行流，可能是零流，利用深探法求 $N(f)$ 上的一条 $x-y$ 路 P_1，令

$$\theta_1 = \min_{uv \in P_1} \{c_f(uv)\}。$$

在 P_1 上作 θ_1 的平移得 f_1，修改弧容量 $c_f(uv)$ 为

$$c_f(uv) - f_1(uv) \quad (uv \in P_1)。$$

从 $N(f)$ 中去掉饱和弧，再用深探法，重复上述过程，直到找不到 $x-y$ 路时停止，从而得极大流 f_f。

不难看出，$N(f)$ 上的极大流不一定是 $N(f)$ 上的最大流。

Dinits方法的第三步是把 f_f 加到 f 上，即令

$$f'(uv) = f(uv) + f_f(uv)，若 uv 是第一类弧$$

$$f'(uv) = f(uv) - f_f(uv)，若 uv 是第二类弧$$

$$f'(uv) = f(uv)，对 E 中其余的弧 uv。$$

则 f' 是N上的一个流量为$v(f)+v(f_f)$的可行流,这里 $v(f_f)$ 表示流 f_f 的流量。

在 Dinits 方法中,从 f_k 到f_{k+1},至少"截断"一条 $x-y$ 路,即至少有一条弧被饱和。与此对应的 MPM 方法是另一种类型的方法,它每次截断一些 $x-y$ 增广路,即有一点被"饱和"。下面就来介绍 MPM 方法。

记

$$C_f(v,V_a)=\sum_{vu\in Bf}c_f(vu),C_f(V_f,v)=\sum_{vu\in Bf}c(uv)。$$

$C_f(v,V_f),C_f(V_f,v)$ 分别表示了可以从 v 输出的流量的上界和可以输入的流量的上界。

令

$$F(v)=\begin{cases}\min\{C_f(v,V_f),C_f(V_f,v)\}, & v\neq x,y\\ C_f(v,V_f), & v=x\\ C_f(V_f,v) & v=y\end{cases}$$

设 $F(v_0)=\min\limits_{v\in Vf}\{F(v)\}$,若 $F(v_0)=0$,则 $v_0=x$ 或y时,容易看到,此时 f 已是最大流。否则,设 $v_0\neq x,y$,则丢去 v_0,重新计算 $F(v)$。若 $F(v_0)>0$,则由 $F(v_0)$ 的最小性可知:$F(v_0)$ 单位的流量可以从 x 通过v_0输送到 y 去。设 $v_0\in V_i$,我们可以设想要从 x 提取 $F(v_0)$ 单位的物资输送到 y 去,为此,我们逐一地考虑从 x 指向 V_1 的每条弧。因为这些弧的容量之和至少是 $F(v_0)$,故总可以在弧流量不超过容量的前提下,把 $F(v_0)$ 单位的物资输送到 V_1 中去。对 V_1 类似的考虑,最后可以把 $F(v_0)$ 单位的物资经过 v_0 全部输送到 y 点,从而得到流量为 $F(v_0)$ 的可行流 f_1。易见,f_1 流入点 v_0 的总量为 $F(v_0)$。由 $F(v)$ 的定义,流入点 v_0 的总量就不可能再增大了,故从 $N(f)$ 中丢去点 v_0。对 $N(f)-v_0$ 中任一弧 uv,把 $c_f(uv)$ 修改为 $c_f(uv)-f'(uv)$,再计算 $F(v)$,重复上述过程,求 f_2,直至某一步,$F(x)=0$ 或 $F(y)=0$ 时停止。于是对每个 uv

$\in E_f$,令 $f_f(uv) = f_1(uv) + f_2(uv) + \cdots$,则 $f_f = \{f_f(uv)\}$是 $N(f)$ 上的极大流。

8.3 最小费用流问题

前几节的最大流问题中,我们讨论的网络流仅仅涉及到流量,而没有考虑网络流的费用,在许多实际问题中,我们还必须考虑流的费用。例如,在标准运输问题中,往往要求在完成一定运输任务的前提下,使运输总费用最省。本节将讨论与费用有关的网络流的问题。

定义 8.3.1 给定一个有向图 $D=(V,A)$,对任意的弧 $a \in A$,设 $l(a)$,$c(a)$ 是弧 a 的下、上容量函数($0 \leqslant l(a) \leqslant c(a)$);$b(a)$ 是弧 a 上单位流量的费用,称为费用函数;对任意的顶点 $v \in V$,称 $a(v)$ 是表示顶点 v 的供应量或需求量,称为供需函数,它满足

$$\sum_{v \in V} a(v) = 0$$

此时,得到的网络 $N=(V,A,l,c,a,b)$ 称为容量 - 费用网络。

类似于最大流网络,我们也可以定义容量 - 费用网络的可行流。

定义 8.3.2 设 $f:\{f_{ij}\}$是给定的网络 N 上的一个流,如果 f 满足

$$\begin{cases} f^+(v) - f^-(v) = a(v) \\ l_{ij} \leqslant f_{ij} \leqslant c_{ij} \end{cases} \tag{4}$$

则称 f 是 N 上的一个可行流,流 f 的总费用可以表示为

$$b(f) = \sum_{(i,j) \in A} b_{ij} f_{ij}$$

最小费用流问题就是在这样的网络中寻找总费用最少的可行流。最小费用流问题也可以用线性规划来描述:

$$\min b(f) = \sum_{(i,j)\in A} b_{ij} f_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = a(V_i) \qquad \forall V_i \in V \tag{5}$$

$$l_{ij} \leqslant f_{ij} \leqslant c_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$$

设 $N=(V,A,l(a),c(a),a(v),b(a))$。我们首先研究 D 的一个流是最小费用流的判别准则。

设 C 是 D 的一个圈，若给 C 规定一个方向，则相对于这个方向，C 上的弧被分为两类 C^+，C^-。

设 f 是 D 上的一个流，如果

$$f_{ij} < c_{ij} \quad 当 (i,j) \in C^+$$

或 $$f_{ij} > l_{ij} \quad 当 (i,j) \in C^-$$

则称 C 是关于 f 的增广圈。值得注意的是，C 是否是增广圈，不仅与 f 有关，还与 C 的方向有关。

设 C 是 D 中关于 f 的增广圈，令

$$\theta = \min(\min_{c^+}(c_{ij} - f_{ij}), \min_{c^-}(f_{ij} - l_{ij}))$$

则 $\theta > 0$。

构造一个新的流 $f' = \{f'_{ij}\}$：

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta & v_i v_j \in C^+ \\ f_{ij} - \theta & v_i v_j \in C^- \\ f_{ij} & v_i v_j \notin C \end{cases}$$

称 f' 是由 f 在圈 C 上作 θ 平移而得到的，记为 $f' = f \overset{C}{-} \theta$。

不难验证，对任一点 $v \in V$，

$$f^+(v) - f^-(v) = f'^+(v) - f'^-(v)$$

即这种变换总保持在每一点的"净流出量"不变，且

$$f_{ij} < f'_{ij} \leqslant c_{ij}, \quad 对任一\ v_i v_j \in C^+,$$

$$l_{ij} \leqslant f'_{ij} < c_{ij}, \quad 对任一\ v_i v_j \in C^-。$$

显然，若 f 是 N 上的可行流，$f' = f \overset{C}{—} \theta$，则 f' 也是 N 上的可行流，现在比较一下 f 和 f' 的费用变化。

$$
\begin{aligned}
b(f') - b(f) &= \sum_A b_{ij} f'_{ij} - \sum_A b_{ij} f_{ij} \\
&= \theta\Big(\sum_{v_i v_j \in C^+} b_{ij} - \sum_{v_i v_j \in C^-} b_{ij} \Big)
\end{aligned}
$$

称 $\sum_{v_i v_j \in C^+} b_{ij} - \sum_{v_i v_j \in C^-} b_{ij}$ 为圈 C 的费用，记为 $b(C;f)$（显然，若 C 的定向不同，则 $b(C;f)$ 相差一个符号）。由 $b(f') - b(f) = \theta b(C;f)$ 及 $\theta > 0$，得：若 f 是最小费用流，则对任一关于 f 的增广圈 C，有

$$b(C;f) \geqslant 0。$$

一般地，我们有下列定理。

定理 8.3.1 可行流 f^* 是最小费用流，当且仅当 N 中不存在关于 f^* 的负费用的增广圈，即对 N 中的任意增广圈 C，都有 $b(C;f^*) \geqslant 0$。

定理 8.3.1 的证明，请参见有关文献，此处略。

由定理 8.3.1 可见，一个流 f 是否是最小费用流，看两个条件：

(1) 可行性条件：即满足：

$$
\begin{cases}
f^+(v) - f^-(v) = a(v) & v \in V \\
l(a) \leqslant f(a) \leqslant c(a) & a \in A
\end{cases}
\qquad (6)
$$

(2) 最优性条件：即不存在关于 f 的负费用的增广圈。

因此我们可以通过不同途径去解决最小费流的问题。

一个是在计算过程中，总使 f 满足可行性条件。而使 f 逐步向满足最优性条件过渡，一旦 f 满足最优性条件，即为最小费用流。

另一个是在计算过程中，总使流 f 满足最优性条件，而使 f 逐步地向满足可行性条件过渡，一旦 f 可行，即为最小费用流。

第三途径是在计算过程中，使流 f 逐步地向可行性条件和最优性条件过渡，一旦 f 同时满足了可行性条件及最优性条件，该流

即为最小费用流。

应该指出的是：最优性条件有时是通过其它条件去实现的，这一点对算法的讨论很有用，比如我们可以证明如下定理，它相当于运输问题中的“位势”条件。

定理 8.3.2 若流 f 是可行流，如果对每点 $v_i \in V$，存在数 π_i（称为“位势”），满足：

$$\begin{cases} \pi_j - \pi_i > b_{ij} \Rightarrow f_{ij} = c_{ij} \\ \pi_j - \pi_i < b_{ij} \Rightarrow f_{ij} = l_{ij} \end{cases} \tag{7}$$

则 f 是最小费用流。

证明 若 C 是关于 f 的增广圈，则

当 $v_iv_j \in C^+$ 时，$f_{ij} < c_{ij}$，从而 $\pi_j - \pi_i \leqslant b_{ij}$；

当 $v_iv_j \in C^-$ 时，$f_{ij} > l_{ij}$，从而 $\pi_j - \pi_i \geqslant b_{ij}$；

于是，

$$b(C;f) \geqslant \sum_{C^+}(\pi_j - \pi_i) - \sum_{C^-}(\pi_j - \pi_i) = 0。$$

因此，由定理 8.3.1 得结论成立。 证毕。

最后介绍一类特殊的最小费用流问题——标准运输问题。

设有 m 个发点，n 个收点，分别有产量 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和销量 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，这里

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

已知从第 i 个发点到 j 个收点的单位运输费用为 b_{ij}，要求运输总费用最小的运输方案。即求一组 $x_{ij}(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$，满足：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

并使$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_{ij}$达到极小。这里$x_{ij}$表示从第$i$个发点运往是$j$个收点的数量。

构造一个完全二部图$K_{m,n}=(X,Y,E)$，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，对任一边x_iy_i，定向成弧x_iy_i，并令弧x_iy_j上的容量为$l_{ij}=0$，$c_{ij}=+\infty$。另外，令

$$a(x_i)=a_i,a(y_j)=-b_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)。$$

于是得到网络$N=(V,A,l(a),c(a),a(v),b(a))$。因此，这个问题等价于在$D$上求最小费用流问题。

8.4 最小费用流的算法

本节考虑传统的单源、单汇网络的最小费用流问题，其中x为发点，y为收点，每条弧的下容量函数为0，$b(a)\geqslant 0$是定义在A上的费用函数。最小费用流问题就是在网络N中计算流值为V^*的最小费用流f；当V^*是最大流时，最小费用流f也称为最小费用最大流。下面我们讨论流值为V^*的最小费用流问题，其可行性条件为：

$$f^+(v)-f^-(v)=\begin{cases}v^* & v=x\\0 & v\neq x,y\\-v^* & v=y\end{cases}\tag{8}$$

$$0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij}\quad(v_iv_j\in A)$$

其中，v^*是网络N的指定流值。

本节介绍求最小费用问题的几个算法。

一、原始算法

这个算法是Klein根据定理8.3.1提出的，它是根据解决最小费用流的第一个途径，算法的基本思想是首先从N的任一个满足流值为v^*的流f^0出发，f_0是最小费用流当且仅当N中任一关于f^0的增广圈C上，都有$b(C,f^0)\geqslant 0$。因此一般地设已有流f^k，检

查每一个关于 f^k 的增广圈的费用。若所有增广圈的费用非负，则 f^k 就是最小费用流；若有某个增广圈 C 的费用小于零，则对 f^k 作在增广圈 C 上的平移，得 $f^{k+1} \xrightarrow{C} \theta$，这里

$$\theta = \min\{\min_{C^+}(c_{ij} - f_{ij}), \min_{C^-} f_{ij}\}$$

则 f^{k+1} 仍是具有流值 v^* 的网络流，并且 $b(f^{k+1}) < b(f^k)$，对 f^{k+1} 重复上述过程，直到没有负费用的增广圈为止。

因此，问题的关键是寻求关于 f^k 的负费用增广圈。首先注意到，若 C 是关于 f 的增广圈，则根据定义，它的费用 $b(c;f)$ 为

$$\sum_{C^+} b_{ij} - \sum_{C^-} b_{ij},$$

因而，如果把 C^- 中的弧 v_iv_j 反向，且令它的权是 $-b_{ij}$，而 C^+ 中的弧的方向不变，且令权为 b_{ij}，则 C 就是一个回路。回路的权恰好是增广圈的费用，这样，就把求负费用增广圈的问题转化成求负回路的问题。

其次，我们分析一下哪些弧可能在某个增广圈 C 上的 C^+ 中，哪些可能在 C^- 中。

设给定一个可行流 f，则 N 中的弧是如下三种类型之一：

(1) $f_{ij} = 0$，则弧 v_iv_j 只能在 C^+ 中

(2) $f_{ij} = c_{ij}$，则弧 v_iv_j 只能在 C^- 中

(3) $0 < f_{ij} < c_{ij}$，则弧 v_iv_j 可能在 C^+ 中，也可能在 C^- 中。

基于这个分析，构造一辅助有向图 $D(f)$，$D(f) = (V, A', w(a))$，其中 $D(f)$ 与 D 有相同的顶点集。

若 $v_iv_j \in A(N)$ 是(1)型弧，则 $v_iv_j \in A'$，且 $w_{ij} = b_{ij}$；

若 $v_iv_j \in A(N)$ 是(2)型弧，则 $v_jv_i \in A'$，且 $w_{ij} = -b_{ij}$；

若 $v_iv_j \in A(N)$ 是(3)型弧，则 $v_jv_i \in A'$，且 $w_{ij} = b_{ij}$，$w_{ij} = -b_{ij}$。

于是，寻求关于 f 的负费用增广圈就等价于求 $D(f)$ 的负回

路。因此，求最小费用流的原始算法可描述如下：

步骤0 应用最大流算法求 N 的满足流值为 v^* 的流 f，令 $k = 0, f^k = f$；

步骤1 构造辅助网络 $D(f^k)$；

步骤2 在 $D(f^k)$ 中寻求负回路。若无负回路，则计算结束，f^k 是最小费用流；否则，得到一个关于 f^k 的负费用增广圈 C(负回路的方向是增广圈 C 的正方向)，以 $f^k \overset{C}{-} \theta$ 代替 f^k，转步骤1。

二、对偶算法

求最小费用最大流的原始算法是由任意一个指定流出发，在保持流值的前提下，逐步改进可行流，使它的费用越来越小，直到得到费用最小的指定流。现在介绍一种最小费用流的对偶算法，即由值 $v(f) < v^*$ 的最小费用流出发，在始终保持费用最小的前提下，逐步增加可行流的值，使得可行流的值越来越大，直到达到指定流为止。开始的最小费用流总是存在的，因为 $f \equiv 0$ 是值为0的费用最小的流。

因此，我们要解决的主要问题是：若 f 是流量为 $v(f)$ 的所有可行流中费用最小的，如何从 f 过渡到下一个最小费用的可行流 f'？

我们知道，在带收发点的网络中，通过流在增广路上的平移变换可以得到另一个可行流。设 f 不是指定流，则存在关于 f 的 $x-y$ 增广路，设 P 是其中一条，对 f 作平移变换，得 $f' = f \overset{P}{-} \theta$，这时 f' 的费用为

$$b(f') = b(f) + \theta\Big(\sum_{P^+} b_{ij} - \sum_{P^-} b_{ij}\Big)$$

因此，$\Big(\sum_{P^+} b_{ij} - \sum_{P^-} b_{ij}\Big)$表示沿 P 增加单位流量所需要的费用，简称为 P 的费用，记为 $b(P;f)$。

利用定理8.3.1，我们可以证明如下结论：

定理 8.4.1 若 f 是流量 $v(f)$ 的最小费用流，P 是关于 f 的最小费用的 $x-y$ 增广路，则 $f' = f \overset{P}{—} \theta$ 是流量为 $v(f)+\theta$ 的最小费用流。

根据这个定理，从一个最小费用可行流过渡到下一个最小费用可行流的关键是要寻求最小费用的增广路。类似于原始算法，对应于可行流 f，构造辅助有向图 $D(f)$，则求关于 f 的最小费用 $x-y$ 增广路的问题转换成求 $D(f)$ 的最短 $x-y$ 有向路问题。因此，Busacker，Gowen 1961 提出对偶方法的计算步骤如下：

步骤 0 令 $f^0 = 0$（它是流量为 0 的最小费用流）；$k = 0$；

步骤 1 构造 $D(f^k)$；

步骤 2 求 $D(f^k)$ 中最短 $x-y$ 有向路，若不存在这样的路，则 f^k 是最小费用最大流，计算结束；否则得到相应的增广路 P，令

$$\theta = \min\{\min_{P^+}(c_{ij} - f_{ij}^k), \min_{P^-} f_{ij}^k\}。$$

用 $f^k \overset{P}{—} \theta$ 代替 f^k 返回步骤 1。

最后，我们介绍一下以定理 8.3.2 为基础的算法，它通常被称为原始 - 对偶算法。这个算法的基本思想是：每一点 v_i 对应一个数 ξ_i（一开始可以令所有的点都对应零），然后给定一可行流 $f = \{f_{ij}\}$，使得 ξ_i 和 f 满足定理 8.3.2 中的(7)（例如令所有 $f_{ij} = 0$），由定理 8.3.2，f 是流值为 $v(f)$ 的最小费用流。

若 $v(f) = v^*$，则 f 达到指定流，f 就是最小费用流。否则，我们可以增加流量，在增加流量的过程中，保持从可行流 f 到可行流 f' 且有定理 8.3.2 中(7)式成立，直到 $v(f) = v^*$ 为止。

由最大流算法可知，增加流量的办法是找增广路。为了得到满足(7)式的新的可行流，设 I 是满足 $f_{ij} < c_{ij}$ 且 $\xi_j - \xi_i = b_{ij}$ 的弧的全体，R 表示满足 $\xi_j - \xi_i = b_{ij}$ 且 $f_{ij} > 0$ 的弧的全体；用 U 表示不在 $I \cup R$ 中的弧的全体，则我们在 $I \cup R$ 中利用求最大流的标号

算法，找这样的增广路。如果增广路 P 被找到，则 $f' = f \overset{P}{—} \theta$ 是流值为 $v(f) + \theta$ 的最小费用流。否则，设 S 是所有标号点集合，则 $x \in S, y \in \overline{S}$。

对弧 v_iv_j，若 $v_i \in S, v_j \in \overline{S}$，则 $\xi_j - \xi_i \neq b_{ij}$ 或 $f_{ij} = c_{ij}$，否则 v_j 应得到标号。于是由(7)得 $\xi_j - \xi_i < b_{ij}$ 或 $\xi_j - \xi_i > b_{ij}$ 且 $f_{ij} = c_{ij}$。设 $A_1 = \{v_i \in S, v_j \in \overline{S}, v_iv_j \in A\}$。

$\delta_1 = \min\{b_{ij} - \xi_j - \xi_i \mid v_iv_j \in A_1$，且 $\xi_j - \xi_i < b_{ij}\}$。

则 $\delta_1 > 0$。

对弧 v_iv_j，若 $v_i \in \overline{S}, v_j \in S$，则 $\xi_j - \xi_i \neq b_{ij}$ 或 $f_{ij} = 0$，否则，v_i 应得到标号，于是由(7)得 $\xi_j - \xi_i > b_{ij}$ 或 $\xi_j - \xi_i < b_{ij}$ 且 $f_{ij} = 0$，设 $A_2 = \{v_j \in S, v_i \in \overline{S}, v_iv_j \in A\}$。

$\delta_2 = \min\{\xi_j + \xi_i - b_{ij} \mid v_iv_j \in A_2$，且 $\xi_j - \xi_i > b_{ij}\}$，则 $\delta_2 > 0$。

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则 $\delta > 0$。令

$$\xi_i = \begin{cases} \xi_i & v_i \in S \\ \xi_i + \delta & v_i \in \overline{S} \end{cases}$$

容易看出，至少有一条弧从不属于 $I \cup R$ 变成属于 $I \cup R$。

现在我们把计算步骤叙述如下：

步骤 0 令 $f \equiv 0$，对每一 $v_i \in V, \xi_i = 0$

步骤 1 构作 I, R, Q。

步骤 2 利用求最大流的标号算法，在 $I \cup R$ 上找增广路。若 $I \cup R$ 上的增广路 P 被找到，则转步骤 3；否则，转步骤 4。

步骤 3 用 $f \overset{P}{—} \theta$ 代替 f。若 $v(f) = v^*$，则计算结束；否则返回步骤 1。

步骤 4 计算 δ、所有标号点 v_i 的 ξ_i 不变，对所有未标号点 v_i，用 $\xi_i + \delta$ 代替 ξ_i，返回步骤 1。

8.5 用最大流进行薄弱环节分析

当一根链条有薄弱环节时，链条所能承受的最大拉力就应该等于其薄弱环节能承受的最大拉力，欲增加这根链条承受的最大拉力，就必须加强薄弱环节。当水流经过管道时，如果有一部分管道特别细小或被淤塞，以致使水流不畅，则这一部分管道便成为薄弱环节。显然，在一定时间内，能流过这一部分管道的水量基本上决定了流过管道的总水量。这些简单的例子，揭示了这类问题的一个共同规律，即能否正确地分析并找出薄弱环节，将直接决定对问题中的薄弱环节是显而易见的，但对稍复杂的问题，就不是那么明显了。下面介绍了如何用最大流的理论和方法来进行薄弱环节分析，我们以排水管道的翻修作为例子。

设有一城市的排水管道网的简图(如图 8.5) 所示，废水的雨水集中于点 1,2 和 3。

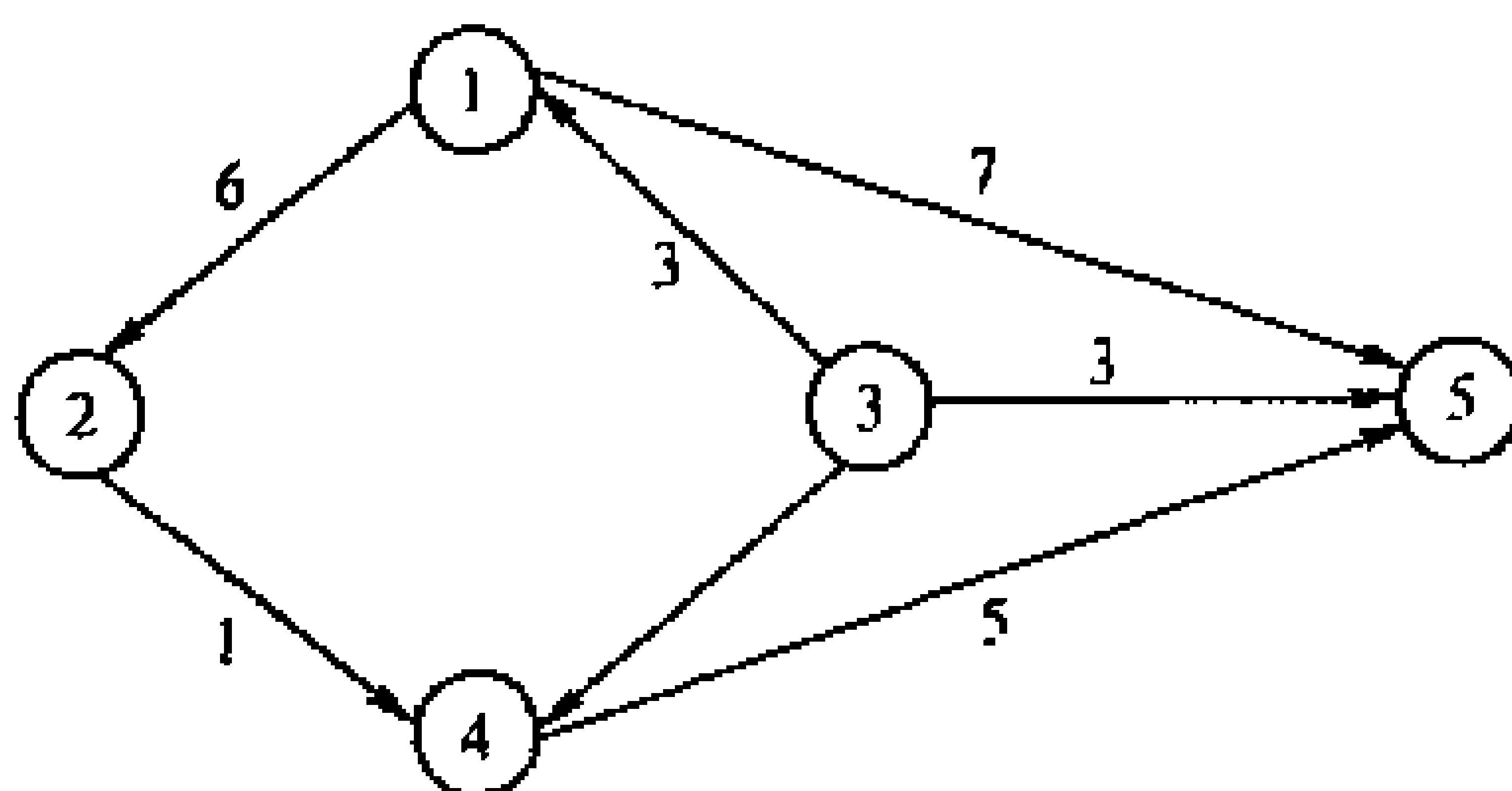


图 8.5

通过管道和暗沟(部分水还要经过点 4) 流向设置有污水净化站的点 5，经过净化后，流入河中。设各弧在单位时间内容许的最大排水量如图 8.5 所示，又知在大雨季节，点 1,2 和 3 在单位时间内的最大水量依次为：

$$W_1 = 3,\ W_2 = 6,\ W_3 = 9$$

在大雨季节，排水不畅，街道积水，造成损失。工程技术人员认为，问题不是排水管道少，而是管道年久失修，产生淤塞，一些排水管道不通畅所致。其理由是：按照排水管道的设计尺寸，由点1,3,4到5的单位时间内的最大排水量应分别为10,7,8，而不是大雨生节从点5分别测得的7,3和5。现在问：为了解决大雨季节排水不畅的问题，是否由点1,3,4分别到点5的管道都要翻修？如果都要翻的话，由于不能在下一个大雨季节到来以前全部都翻修好，问先检修哪一路管道最有利？假设检修这三条管道的困难程度和所需的费用都差不多。

让我们用最大流来分析这个问题。根据图8.5所设的条件，作出一个新的网络图。如图8.6，这个图与8.5的差别在于人为的增加了一个点0，它到点1,2和3的弧的容量分别等于 W_1，W_2 和 W_3。

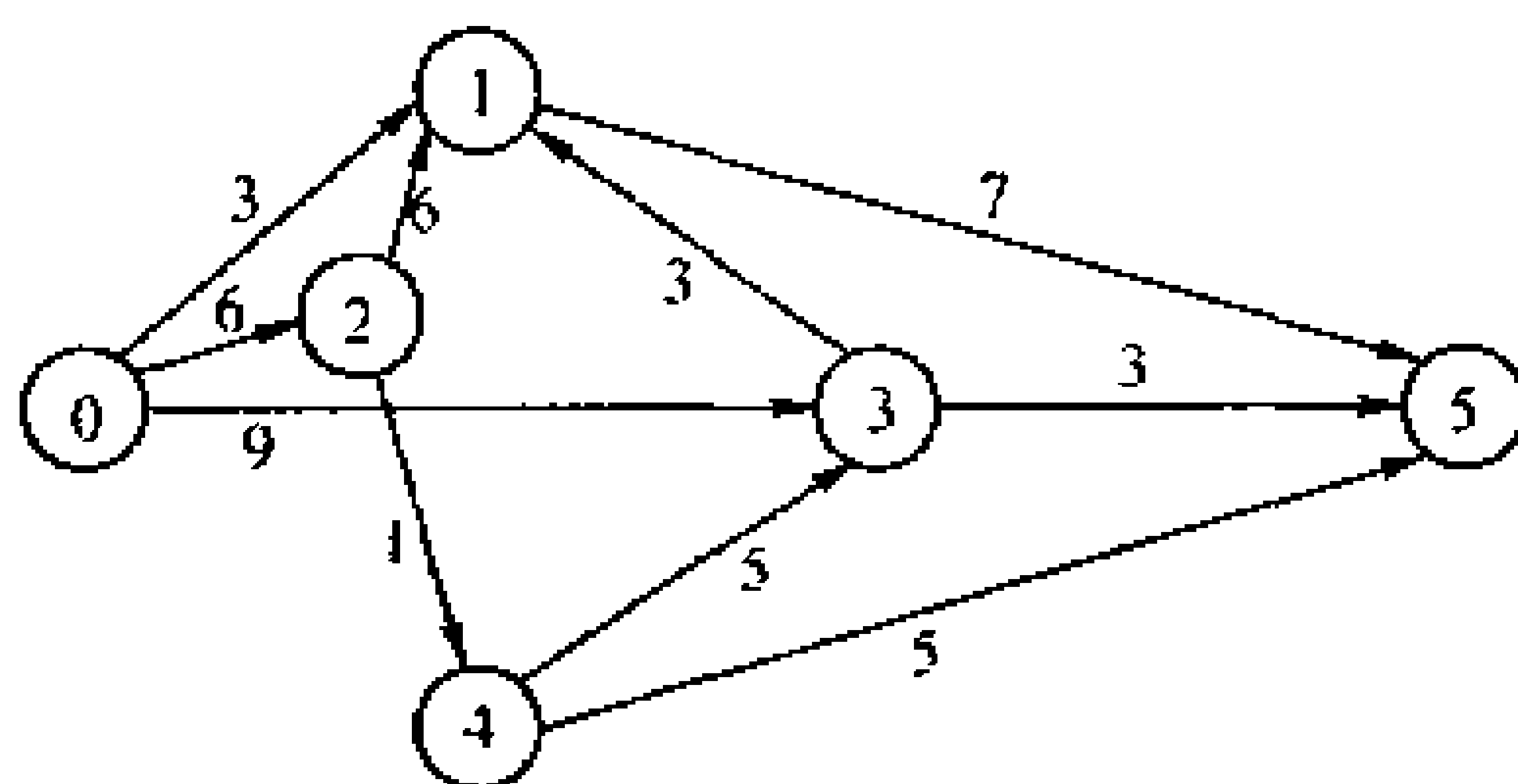


图8.6

这样，在单位时间内所设排水管道网的最大排水量就等于由点0到5的最大流的值（如图8.6所示。）

从图8.6可以看到，弧(1,5)，(3,5)和(4,5)构成一个最小截集，其容量为15，即可设排水管道网的最大流量为15，这个数比大雨季节的最大水量 3 + 6 + 9 = 18 小3个单位。

我们知道，要增加最大流量就必须增加最小截集中弧的容量，让我们首先把图 8.5 中弧(1,5) 上的容量限制去掉(即设 $C_{15} = +\infty$)来求新的网络(记为问题 P_{15})上的最大流量(设为 F_{15})。因此，有 $F_{15} = 18$

同时，设弧(3,5) 上的容量不限，而保留其余弧的容量限制，得最大流量为 $F_{35} = 17$

设弧(4,5) 上的容量不限，而保留其余弧的容量限制，得流量为 $F_{35} = 16$

由此可知，检修由点 1 到点 5 的管道，使最大流量的增加最多(我们把这段弧叫做最弱环节)，而且只要检修这一段管道就够了。

习 题 八

8.1 设 $N = (V, A, C)$ 是任一有发点 x，收点 y 的有向网络，P 是任意一条 $x - y$ 有向路，$(X, \overline{X})$ 是任一截集。证明 P 中至少有一条弧属于$(X, \overline{X})$。

8.2 证明：若有发点 x，收点 y 的有向网络 N 中不存在 $x - y$ 有向路，则最大流的值和最小截集的截量都是零。

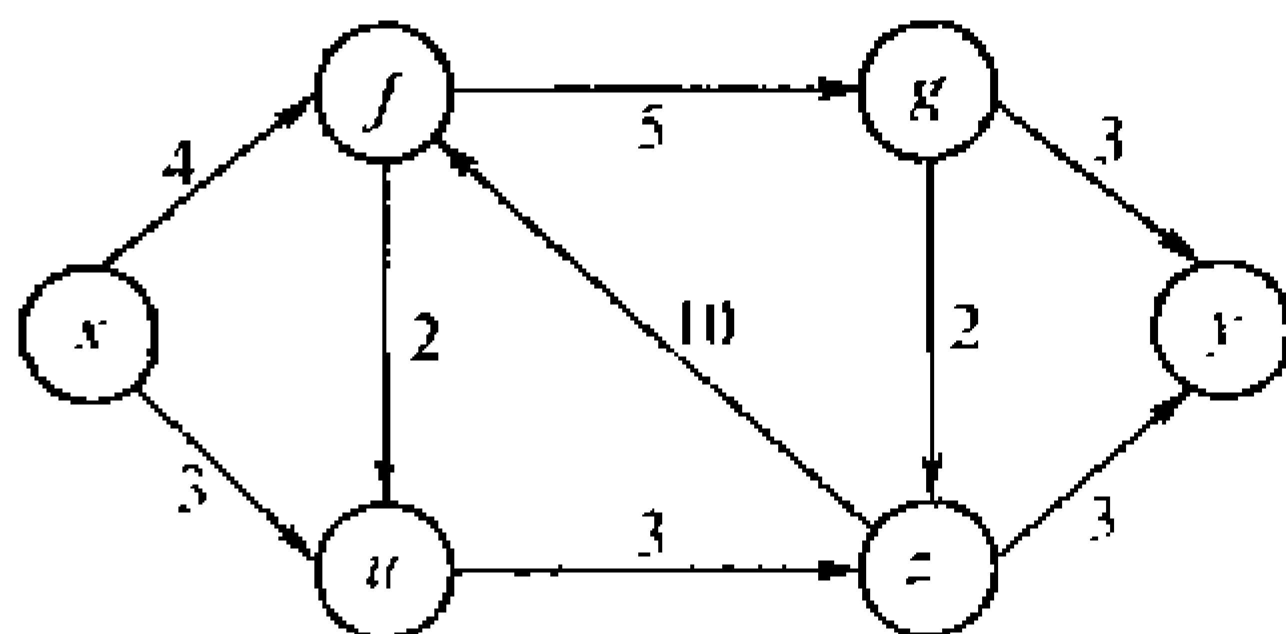
8.3 设$(S, \overline{S})$，$(T, \overline{T})$ 都是带收发点的网络 N 中的最小截集。证明：$(S \cup T, \overline{S \cup T})$ 和$(S \cap T, \overline{S \cap T})$ 也是 G 中的最小截集。

8.4 证明定理 8.1.7。

8.5 设 x, y 是有向图 D 中两个不相邻顶点。证明：D 中内部不相交的有向 $x - y$ 路的最大数目等于分离 x, y 的点的最小数目。

8.6 设 x, y 是无向图 D 中两个不相邻顶点。证明 G 中内部不相交的 $x - y$ 路的最大数目等于分离 x, y 的点的最小数目。

8.7　求如下网络中从点 x 到 y 的最大流。图中弧旁的数字表示容量。



习题 8.7

8.8　试用 Dinits 方法和 *MPM* 方法求 8.2.1 中网络的最大流。

8.9　设 N 是有发点 x 和收点 y 的网络。称流 f 是 N 上的一个可行流，若满足：

$$f(a) \geqslant c(a)$$

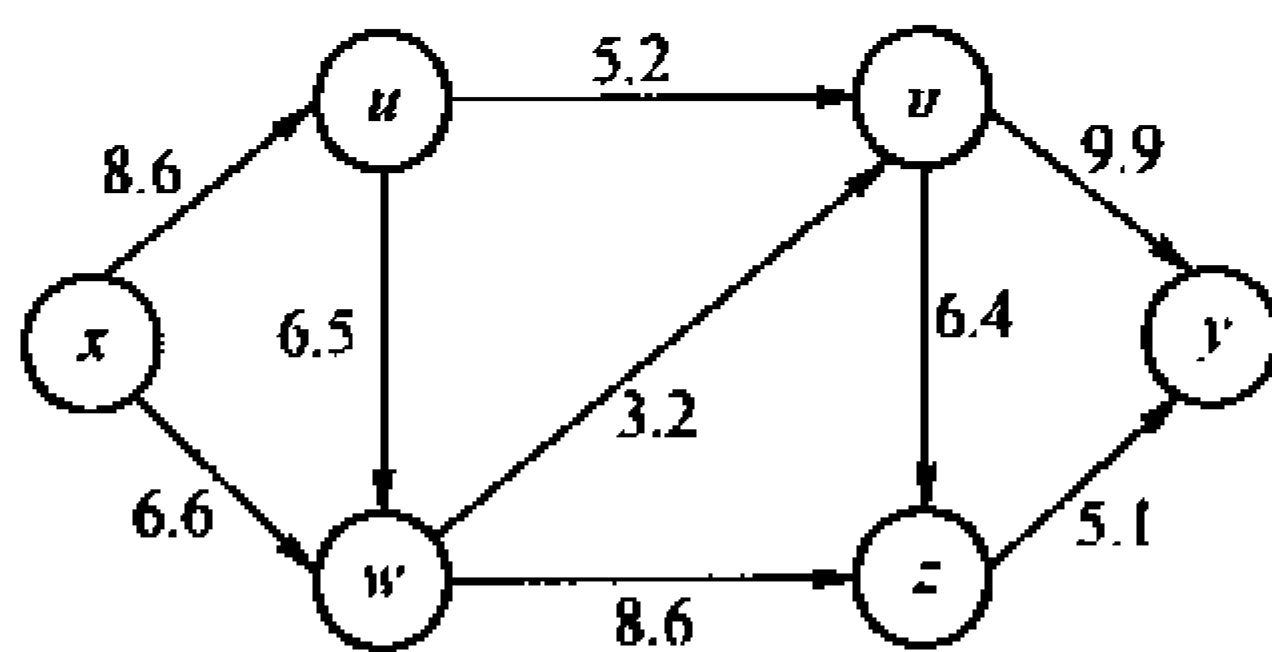
$$f(v,V)-f(V,v)=\begin{cases} v(f) & v=x \\ 0 & v\neq x,y \\ -v(f) & v=y \end{cases}$$

(1) 证明　N 有可行流当且仅当每一使 $c(a)>0$ 的弧 $a\in A$，或者存在回路包含 a，或者存在 $x-y$ 路包含 a。

(2) 叙述求使 $v(f)$ 取最小的可行流或判明不存在可行流的方法。

8.10　把求二部图上最大流的问题化为网络上的最大流问题，说明匈牙利方法中的增长路和最大流问题中的增广路之间的关系。

8.11　在下图所示的网络 N 中，用原始算法求一个从 x 到 y 的最小费用最大流，其中弧旁的第一数字表示单位流的费用，第二个数字表示容量。



习题 8.11

8.12 在上图所示的网络 N 中，用对偶算法求一个从 x 到 y 的最小费用最大流。

9 图与网络模型应用实例

图论方法是建立离散数学模型的重要方法。本章通过三个数模竞赛的实例介绍图论方法的应用。

9.1 纽约市街道清扫规划

一、问题提出

纽约市卫生事业的年预算费用大约为 2 亿美元，其中 1000 万美元用于清扫街道。市政府希望能建立一个数学模型，对清扫路线进行规划，使整个清扫工作的费用最低。

显然街区可以用图来表示，由于单行街道的存在，通常还是有向图。图9.1就是一个简单的街区图，中路为单行主干线，车辆必须按箭头方向通过。用图来表示后，问题似乎十分简单，只需把街道分成若干片，使每片都能在一个清扫周期内打扫完毕即可。但清扫工作是市政管理的一部分，它会受多方面制约。

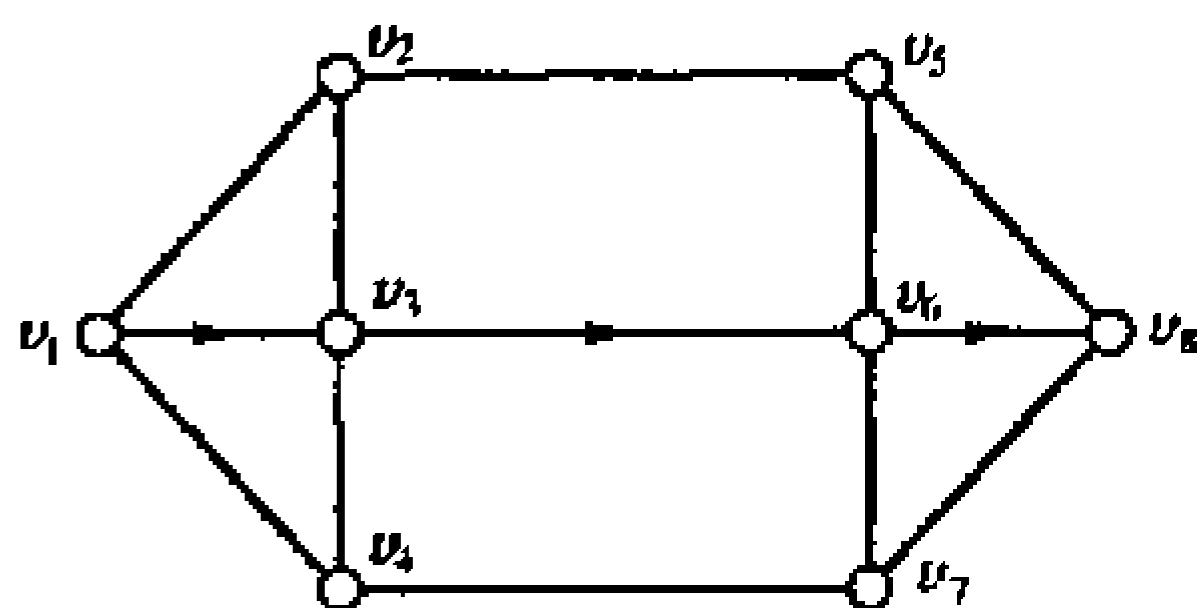


图 9.1

① 清扫必须和交通规划相一致。例如，在车辆繁忙的时段内一些主要街道是不允许清扫的。

② 清扫还必须和停车规划一致，即清扫街道时路边必须没有停车。一些小城市可以要求市民服从和清扫相一致的停车规划，但在纽约这样的方案是行不通的。

③ 城市一般都分成几个行政区，清扫范围也许还不允许越出本区范围。

由于这些限制条件的存在，清扫问题开始变得复杂了。但顶点在问题中起着十分重要的作用，因为下一步清扫哪一条街道可以看成是在顶点(街角)处决定的。

二、问题分析

整个清扫工作可以这样进行：首先根据交通规则和停车规则列出一段时间内可以清扫的街道来；然后找出一个能覆盖这些街道的圈；最后将这个圈合理地分成若干段，由清扫工人按规定清扫。这里的"合理"包含着双重含意，既要在限定时间内扫完，又要是较经济的。

这样，清扫问题被分割成若干个子问题，即在一段规定时间内清扫某些指定街道的问题。在确定某一时段应清扫的街道后，首先要寻找出一个最小覆盖圈或近似最小覆盖。一般来说，能包含所有边的圈通过某些边可能需要两次或者更多次。如果最小覆盖圈是欧拉圈，即该圈经过所有顶点走过每条边恰好一次。这当然是最短圈，关于欧拉圈的判断，有如下定理：

定理 9.1.1 有向图 $D=(V,A)$ 具有欧拉圈的充分必要条件是：D 是连通的，且对于每一顶点，$v\in V$，$d^-(v)=d^+(v)$。

这一定理的成立是十分明显的，因为当且仅当对每一顶点进入边数等于离开边数时，才能绕行一圈而回到原处。

如果考察的子图中不存在欧拉圈，则在清扫中一定经过这样的街道，它已经清扫过，但清扫车必须再次通过它。当然，当清扫车通过一条不需清扫的街道时可以提起扫把，以两倍于清扫的速度通过它(这段时间称为提升时间)。可以看出，问题的关键在那些入度和出度不等的顶点处，在这些顶点对应的街角处，工人一定会遇到提升扫把驶向另一街角重新开始清扫的情况。由于要清扫的街道是预先指定好的，因而问题的实质就是找出一个圈，使浪费掉的

提升时间的总和最少。

记 $d(x)$ 为顶点 x 的出度与入度之差。若 $d(x) < 0$，则称 x 为负结点，若 $d(x) > 0$，则称 x 为正结点。对负结点，存在着过剩的进入边，对正结点，存在着过剩的发出边，过剩的条数均为 $|d(x)|$。

为了构造出一个覆盖图，我们必须添加一些新的边（也可以是重复边），使得添加后的新图中每一顶点 x 均满足 $d(x) = 0$。需要特别说明的是，由于添加边是不必清扫的，它们可以不在此子图中，只要在城市所有街道对应的大图中存在即可。

定义 9.1.1 设 G 是一个每边都附有一个长度的有向图，H 是包含 G 的（大）图，其边也附有长度。若 A 是 H 中的边的子集且满足：

(1) 将 A 添入 G 中作成新图 G'，对 G' 的每一顶点 x，有 $d(x) = 0$。

(2) 在满足(1)的集合中 A 具有最小的总长度，则称 A 为 G 关于 H 的最小添加集。

根据前面的分析，读者容易证明下面的定理成立。

定理 9.1.2 G 关于 H 的最小添加集必可分成由 G 的负顶点到正顶点的通路，若 $d(x) = -k$（或 $+k$），则有 k 条这样的通路由 x 处发出（或进入）。

图 9.2 给出了一个具体例子，顶点旁括号内的数字为该顶点处的 $d(x)$ 值，虚线边所成的集合为 A，其中有些边取自整个城市的街区图 H，显然 A 中的边可以分成由负顶点到正顶点的通路。

现在，问题归结为正负顶点间的配对，即根据 H 的边找出各负正顶点间的最短路，求图中任意两顶点间的最短路径的有效算法可以参见前面的最短路径问题，现假定已求出了任意一对负、正顶点间的最短距离，也就是说已有一个矩阵 $D = (d_{ij})$，其中 d_{ij} 为负顶点 x_i 到正顶点 x_j 的最短距离。在 D 的最右边添加一列，元素

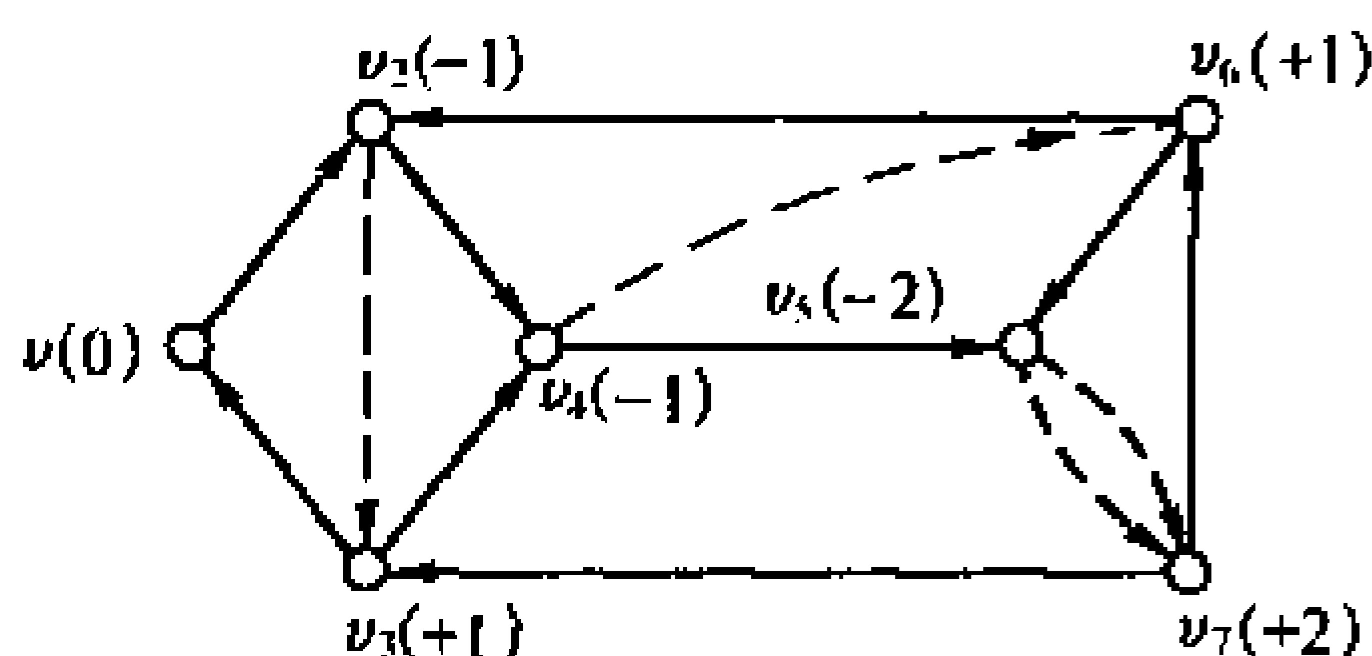


图 9.2

为 $b_i = |d(x_i)|$，即 x_i 应发出的边数，再在 D 的最下面添加一行，其元素为 $c_j = d(x_j)$，即 x_j 应收的边数，于是求最小添加集 A 已化为一个标准的供需平衡的"运输问题"，可以利用运输问题表上作业法求解，最优解将表明哪些负、正顶点间的最短路将被采用，以构成最小添加集。例如，设图 G 有三个负顶点 x_1, x_2, x_3 和三个正顶点 y_1, y_2, y_3，并设 $d(x_1) = -2, d(x_2) = d(x_3) = -1$，$d(y_1) = d(y_2) = 1, d(y_3) = 2$，假如我们已求出每对负正顶点间的最短距离，得出矩阵：

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

相应的运输问题为

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \text{需求量} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & \text{供应量} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

右下角的 4 既是总供应量又是总需求量。求解得到该运输问题的解为：$x_1 \to y_1, x_1 \to y_3, x_2 \to y_2, x_2 \to y_3$，将最短路上的边各取一

次就得到了最小添加集。

在求出由 G 扩充成的最小覆盖圈 G' 后，还需为清扫工人指出一条较好的实际运行线路，不同运行方式在工作时的方便程度可以相差很大。清扫车有时要扫街道的左边，有时要扫右边，有时要提升扫把以便快速通过不清扫的街道；在拐角处，有时要左转弯，有时要右转弯甚至 U 形转弯，事先规划好是十分有益的。纽约市是这样处理该问题的，他们首先引入一个权因子，以反映街角处可能遇到的各种情况的麻烦程度，综合清扫工人的意见定出权因子的值（见表 9.1）。

表 9.1

街角决策	权因子
直　走	0
大转弯	4
小转弯	1
U 形转弯	8
转换扫把	10
升降扫把	5

进而对每一街角 v_k 找出一个进出边之间的一对搭配，使得权因子总和最小（即操作最方便），这种搭配关系惟一地确定了实际运行路线。

这样，对于每一进（出）边多于一条的顶点 v_k，得出了一个权因子组成的矩阵 $W^{(k)}=(w_{ij})$，其行对应进边，其列对应出边，而 w_{ij} 则为由 i 边进入由 j 边离开时司机需采取的措施所对应的权因子。例如，对图 9.3 表示的三叉路口街角 v_k 可得：

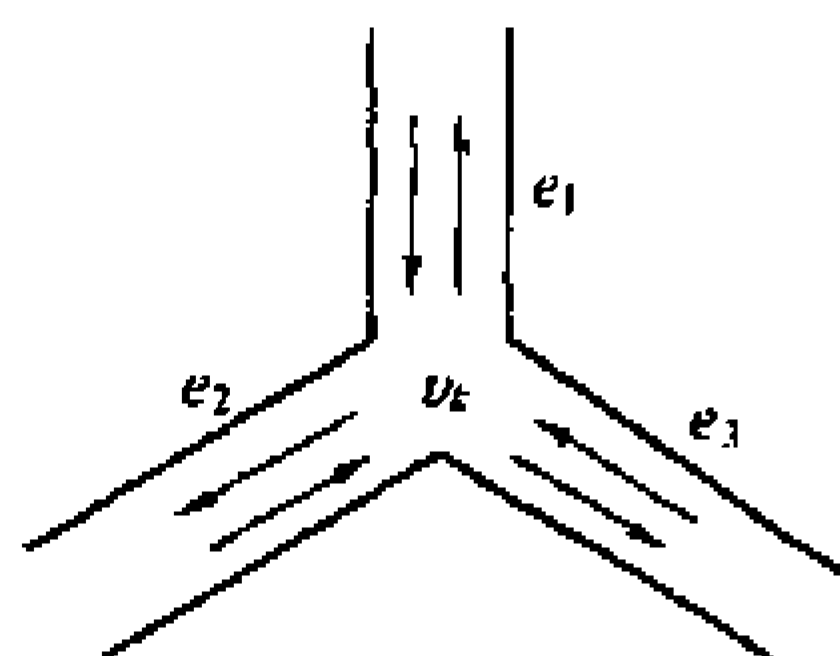


图 9.3

$$W^{(k)} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

显然,这些问题都是简单的指派问题,用匈牙利方法很容易求出解来。图 9.3 中的最佳搭配是一目了然的,即 $e_1 \to e_2, e_2 \to e_3, e_3 \to e_1$。

有时问题还可能更复杂些,例如图 G 可能分成几片而互不相通,此时还应当先将它们连成一个总长度最小的大圈。

三、实际问题计算

最后我们通过一个实例分析,来实现清扫问题的求解。

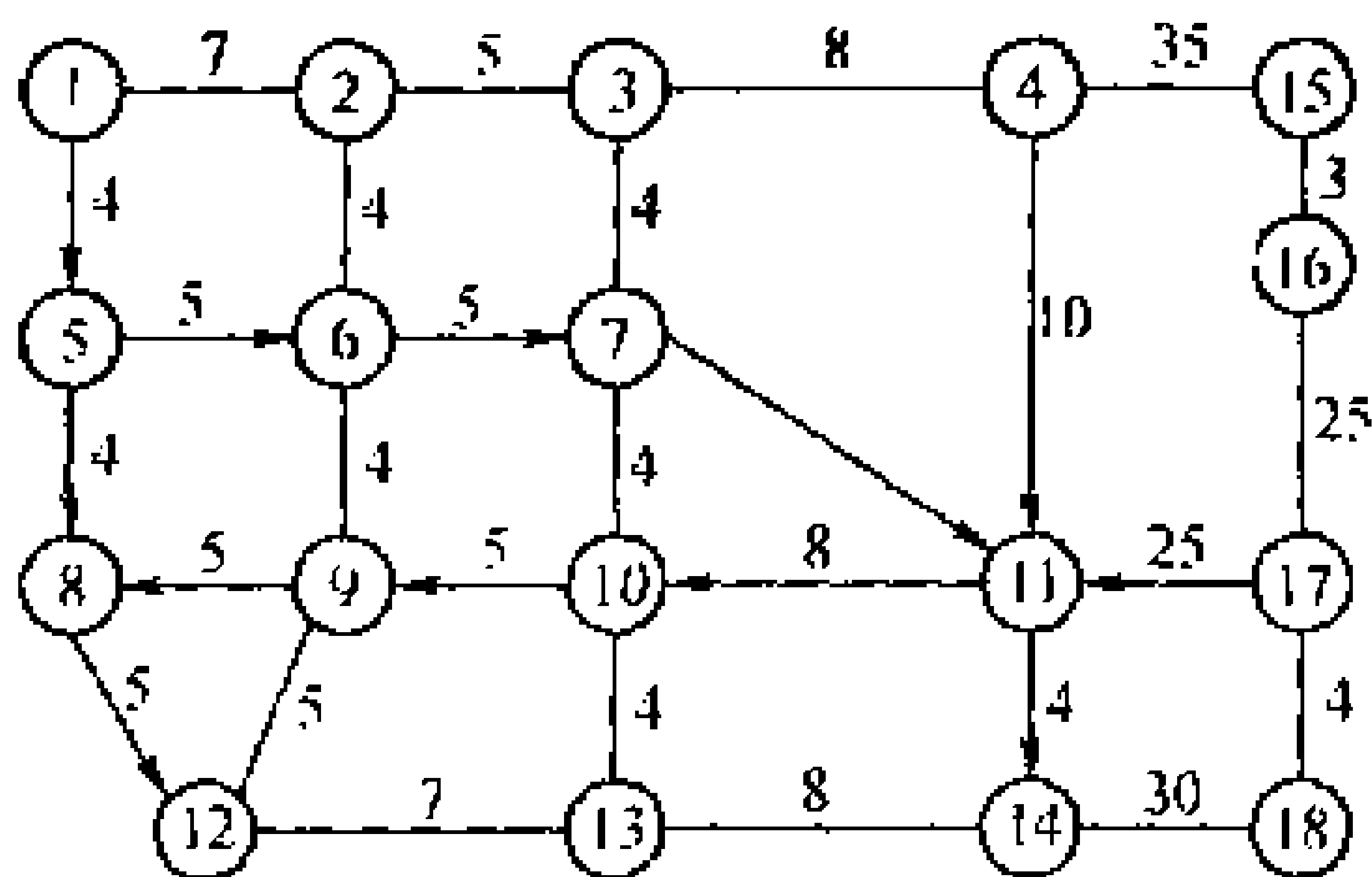


图 9.4

图 9.4 是一个街区图,其中的箭线为单行线路,边上的数字是清扫该街道所需要的时间(提升时间减半)。图 9.5 中的箭线表示上午 8:00—9:00 禁止停车的街边(图 G),现要求充分利用这一小时这一时间清扫完图 9.5 中的街边,试给出一个较好的实施方案。

第 1 步:找出图 9.5 中的负顶点和正顶点,并对这些顶点求出 $d(x)$(已标在图中)。负顶点为 3、7、12、14、16、18,正顶点为 1、4、5、13、15、17,每一顶点的"供应量"或"需求量"均为 1。

第 2 步:求出每对负、正顶点之间的距离,为方便起见,以清扫时间表示。根据给出的两个图,求得反映负正结点间距离的

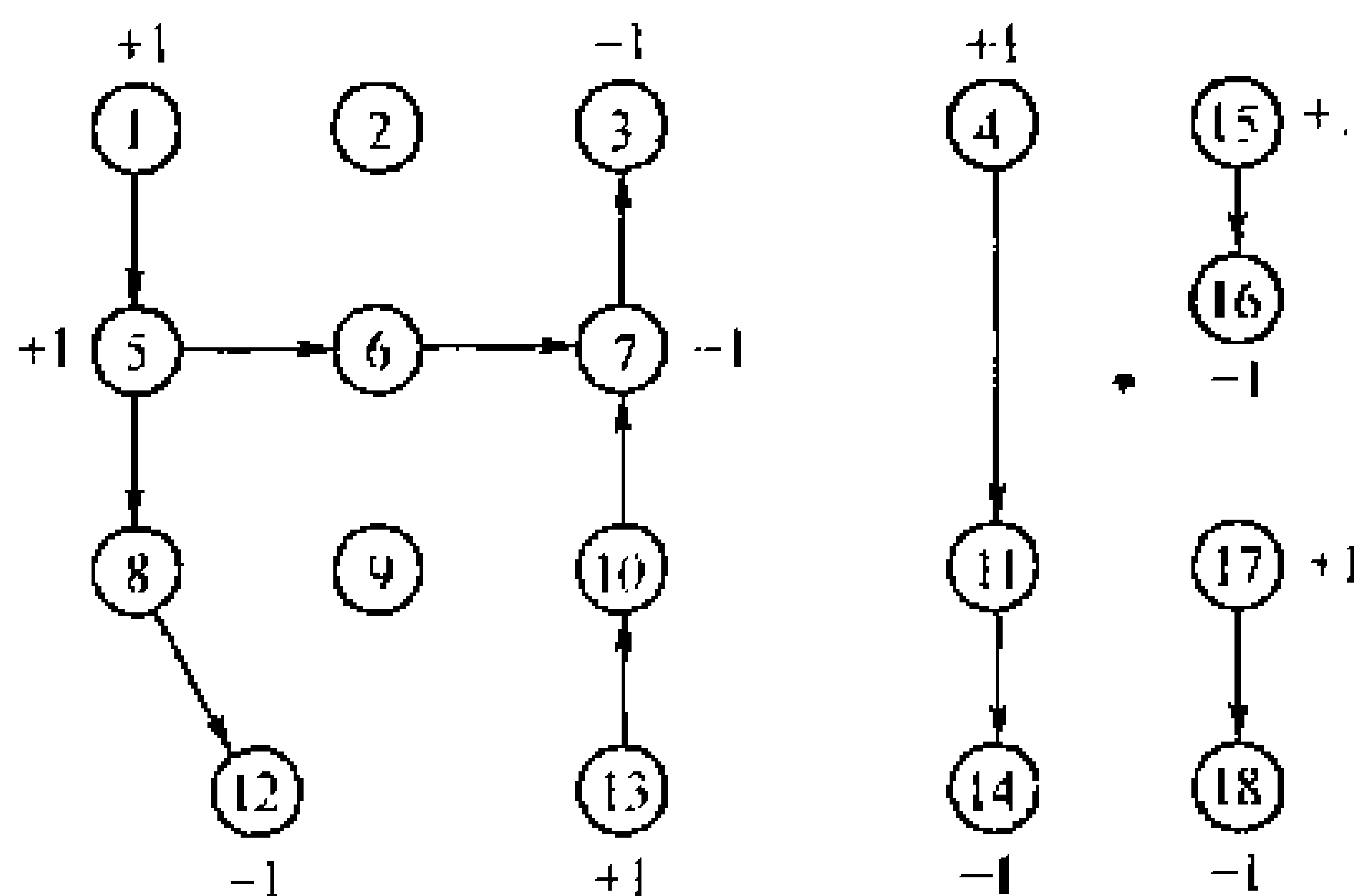


图 9.5

矩阵 D:

	1	4	5	13
3	12	8	16	25
7	16	12	20	22
12	20	26	24	7
14	32	28	36	8

这里没有包括负顶点 16、18 和正顶点 15、17，因为十分明显，16 应与 15 配对，18 应与 17 配对。

求解与 D 相应的运输问题（由于需求和供应均为 1，问题已退化为指派问题），得出应如下配对：3 → 4，7 → 1，12 → 5，14 → 13。添人相应的最短路，得到扩充图 G'（见图 9.6），增添路总长 63 分，折合成清扫时间为 $31\frac{1}{2}$ 分，用虚箭线表示添加边。

这里，由于进出边配对问题较为简单，不必再对顶点求解指派问题。

图 9.6 中包含三个圈，它们过每条边（包括添加边）正好一次。记左边的大圈为 G_1，右边上、下两圈为 G_2 和 G_3。

第 3 步：找出三个圈 G_1、G_2、G_3 间的最短连线。G_1、G_2 最接近

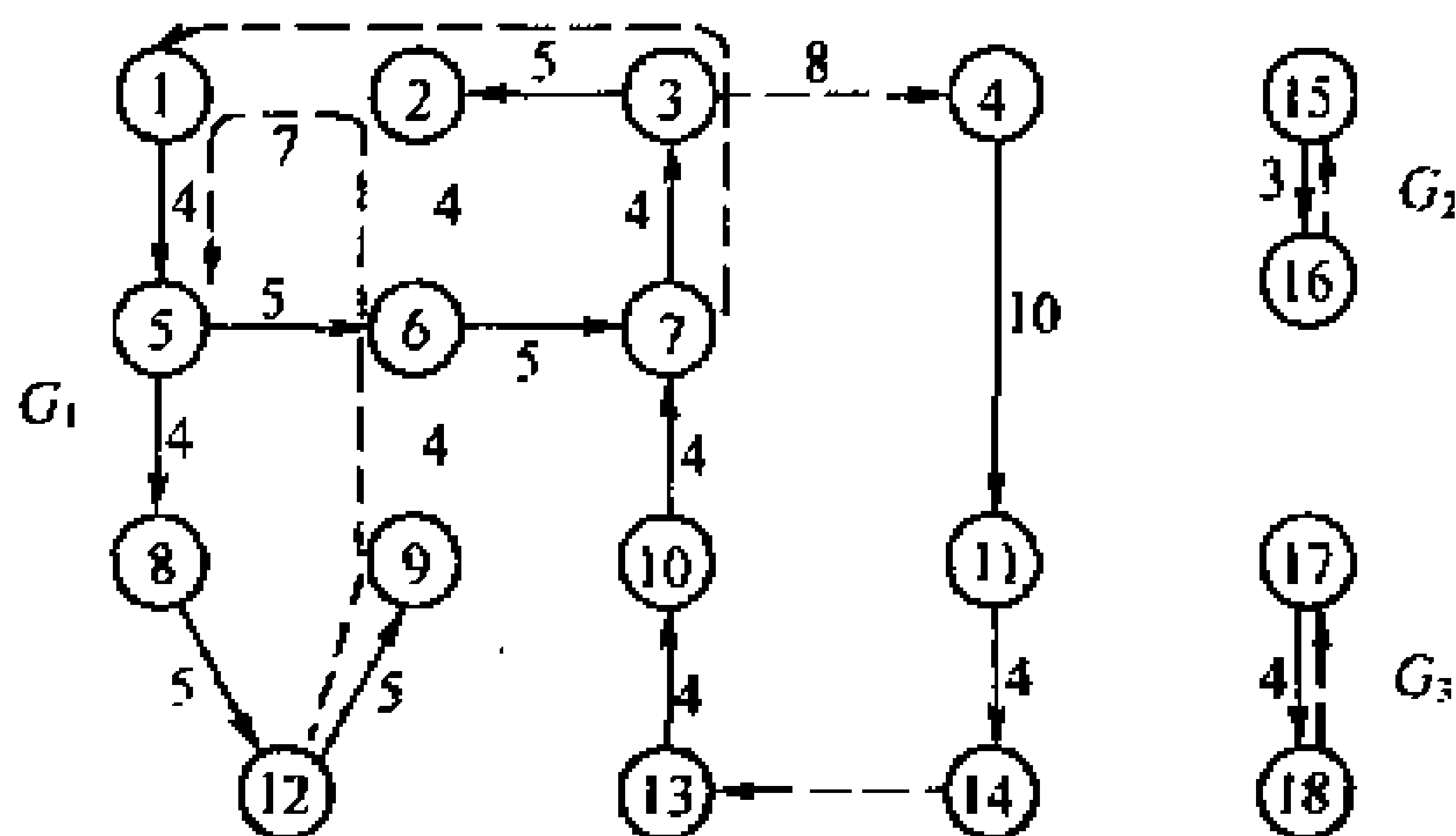


图 9.6

的两个顶点为 4 和 15，距离为 35；G_1、G_3 最接近的顶点是 11 和 17，距离为 25。用最近顶点间的最短路将三个小圈连接成一个大圈，见图 9.7。走完整圈需要 $137\frac{1}{2}$ 分，其中 56 分是清扫时间，$81\frac{1}{2}$ 分为提升时间。

第 4 步：实际清扫路线分配，由于全程需 $137\frac{1}{2}$ 分，因而不可能简单地剖分成两段 60 分的子路。当然，可以有多种方式可分成三段子路，但这样做并不是最经济的。

注意到由 16 → 17 → 11 有一段总长达 50 分的提升时间，考虑是否可以利用这一点，即设法将这段路安排在分段的开头或结尾，以便在 8:00 以前或 9:00 以后通过它，要想分成两段（节省一辆车），这是惟一可想的办法。但是对图 9.7 这样的圈，这种办法是行不通的（稍加计算即可知道）。

现改用 18 → 14 连接 G_1 和 G_3，从表面上看 18 → 14 的路程大于 17 → 11 的路程，但此时得到的新圈（图 9.8）。可以分为两段：

T_1：1 → 5 → 8 → 12 → 9 → 6 → 2 → 1 → 5 → 6 → 7 → 3 → 4 → 11 → 14。

T_2：15 → 16 → 17 → 18 → 14 → 13 → 10 → 7。

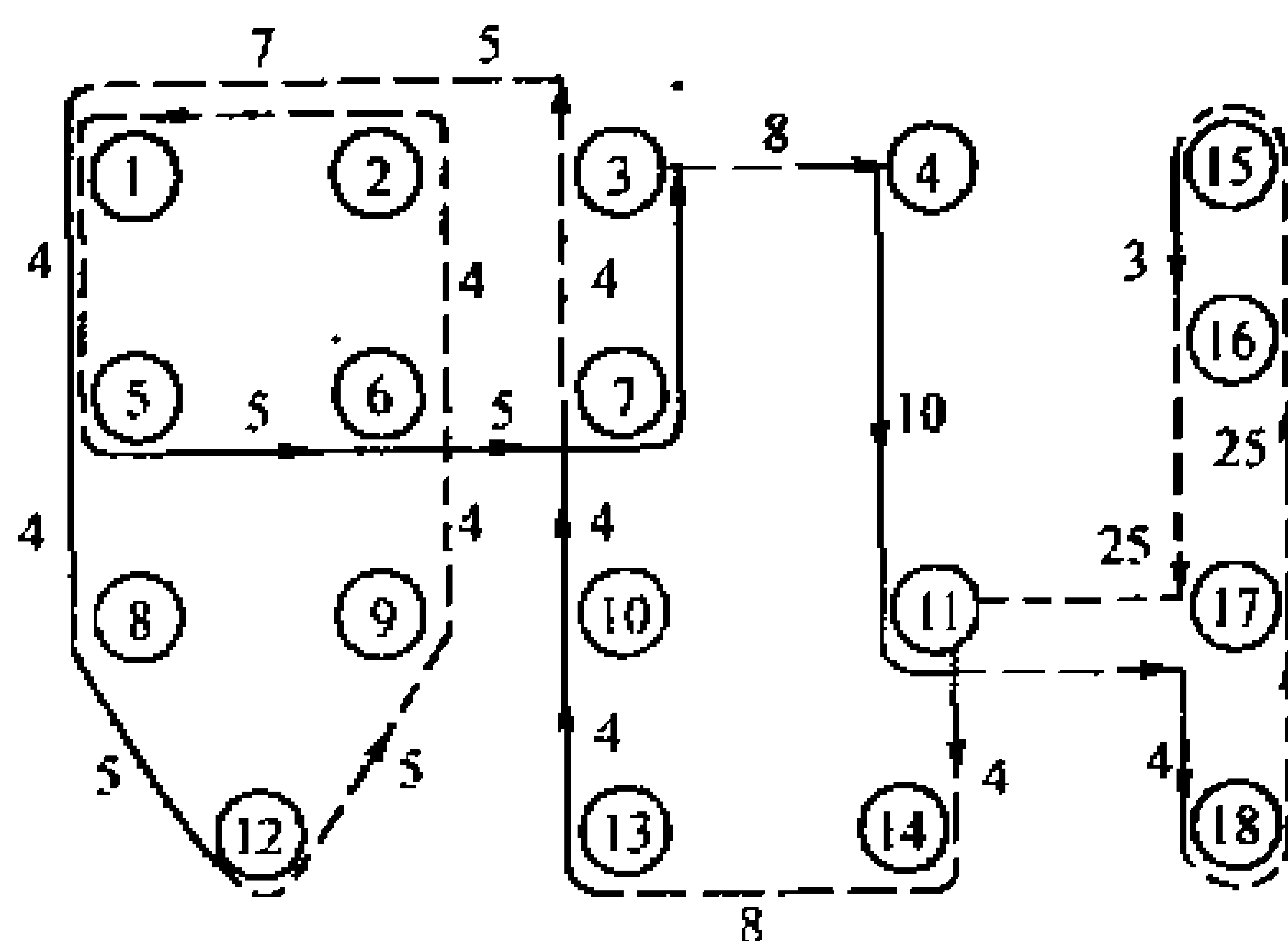


图 9.7

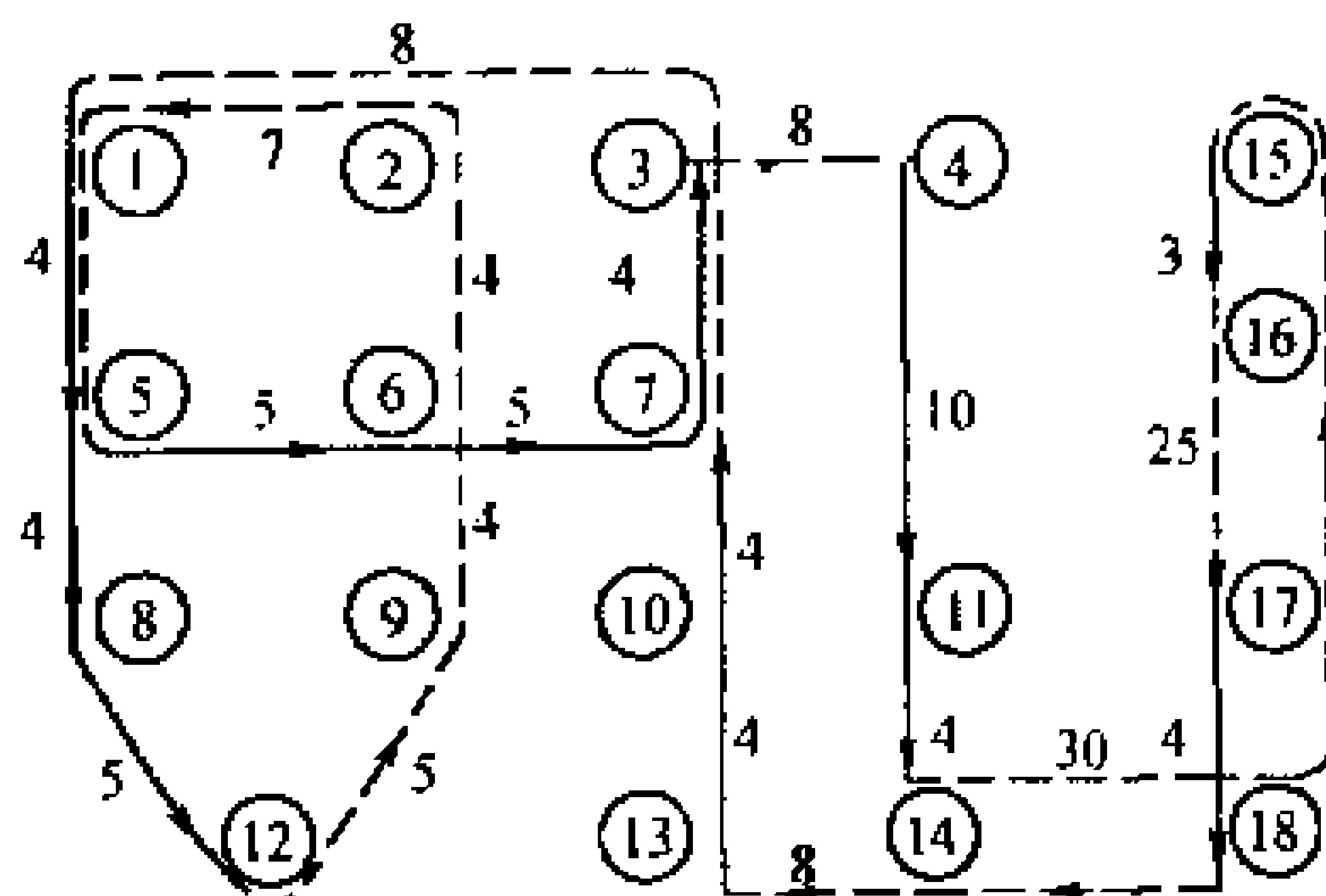


图 9.8

其中 T_1 需要清扫时间 57 分(其中 41 分是清扫时间,16 分为提升时间),T_2 需要清扫时间 $46\frac{1}{2}$ 分(其中 15 分是清扫,31.5 分为提升时间)。若将 $1\to5$ 安排在第二次通过时清扫,则 T_1 占用的禁止停车时间又可缩短两分钟,当然,此时应于 8:00 以前赶到 5 处,开始清扫。

现在经过反复筹划,只需派出两辆清扫车即可在8:00—9:00内打扫完指定街道。另外,若不连接 G_1 和 G_3 而连接 G_1 和 G_2,则也可

以得到包含两段可行子路的另一个大圈,读者可以自行完成它。

街道清扫问题,实际上是有向图中的中国邮路问题,本问题的求解、结合了最短路的计算方法,平衡运输问题(或指派问题)的解法、以及选择具体路线时所用的最小权优化方法。

9.2 灾情巡视路线问题(CMCM - 98B 题)

一、问题提出

图 9.9 为某县的乡(镇)、村公路网示意图,公路边的数字为该路段的公里数。

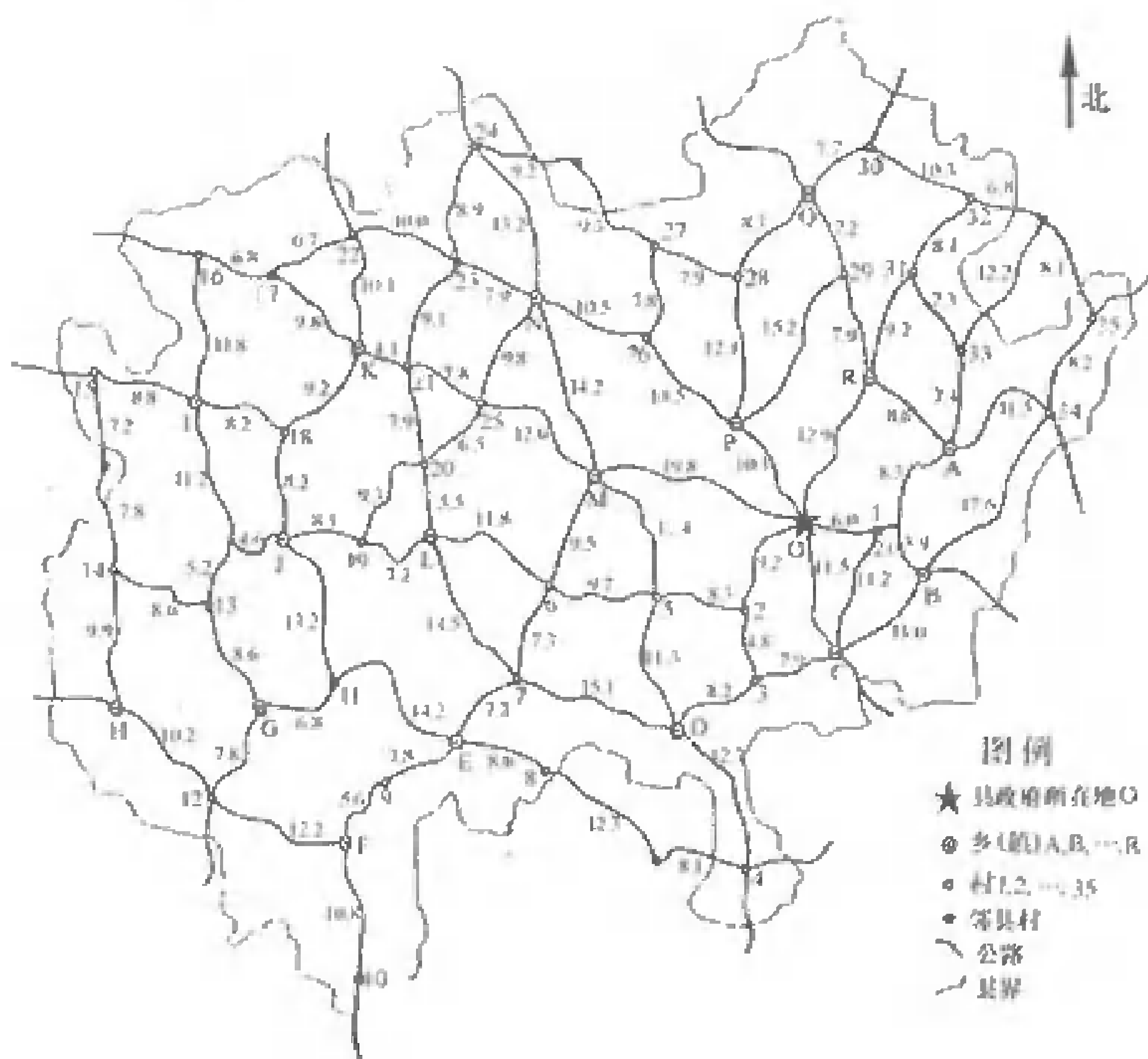


图 9.9

今年夏天该县遭受水灾，为考察灾情、组织自救，县领导决定，带领有关部门负责人到全县各乡(镇)、村巡视。巡视路线指从县政府所在地出发，走遍各乡(镇)、村，又回到县政府所在地的路线。

1. 若分三组(路)巡视，试设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线。

2. 假定巡视人员在各乡(镇)停留时间 $T = 2$ 小时，在各村停留时间 $t = 1$ 小时，汽车行驶速度 $V = 35$ 公里/小时。要在 24 小时内完成巡视，至少应分几组；给出这种分组下你认为最佳的巡视路线。

3. 在上述关于 T，t 和 V 的假定下，如果巡视人员足够多，完成巡视的最短时间是多少；给出在这种最短时间完成巡视的要求下，你认为最佳的巡视路线。

4. 若巡视组数已定(比如三组)，要求尽快完成巡视，讨论 T，t 和 V 改变对最佳巡视路线的影响。

二、问题分析

如果巡视人员只分一组，巡视路线是指巡视人员从县政府 O 出发，沿乡村公路遍历各乡镇、村，最后回到县政府，把该问题题抽象为图论的赋权连通图问题，即有一赋权无向连通图 $G(V,E)$，$O \in V$，两村之间公路的长度，即为该无向图的边权 $w(e)$，寻找一条最佳的路线，即在图 $G(V,E)$ 中，找到一条包含 O 的回路，它须经过所有的顶点 E 一次，使总路程(总时间)最小。这是一个旅行售货员(TSP)问题。

如果巡视人员分成若干组，每组考察一部分区域，且所有乡村都考察到，如果能把这些乡村分块，即图 $G(V,E)$ 中把图分成若干个连通的子图 G，每个子图 G_i 中寻找一条包含 O 的回路 L_i，则对每一子图 G_i 而言，化为旅行售货员问题。

完成巡视的时间应是各组巡视时间中最长的时间，故为使巡视效率高，应尽量使各组巡视时间接近，反映在图 G 分块时应尽

量均衡。

对问题进行分析和求解时，引入下列记号：

$G(V,E)$：赋权连通图；G_i：$G(V,E)$ 的第 i 个子图；L_i：子图 G_i 中的最佳回路；$w(e)$：边 e 的边权；$w(v)$：点 v 的点权；l_i：L_i 的各边权之和；c_i：L_i 的各点权之和；T：巡视中在每个乡镇停留时间；t：巡视中的每个村的停留时间；$\overline{V}$：汽车行驶速度。

把乡村公路示意图抽象为一赋权连通图 $G(V,E)$，在赋权图 G 中，$v_i \in V(G)$ 对应示意图中的乡、村所地，v_0 表示县政府所在地，$e_j \in E(G)$ 对应示意图中的公路。边权 $w(e_j)$ 对应示意图中的公路长度，点权 $w(v_i) = \begin{cases} T \times \overline{V}, & v_i \text{ 代表乡镇} \\ t \times \overline{V}, & v_i \text{ 代表村} \end{cases}$，其中 $\overline{V}$ 表示车速。

数学模型：当 k 固定时，求图 G 中回路 $L_1, L_2, \cdots, L_k$，且满足：

$$\min\{\max_{1 \leqslant i \leqslant k}(L_i)\} \quad \text{（目标为各组巡视最大距离最短）}$$

或

$$\min\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant k}\left[\sum_{e \in E(L_i)} w(e) + \sum_{V \in V(L_i)} w(v)\right]\right\}$$

（目标为巡视时间最短）

s.t.

$$v_0 \in V(L_i) \qquad i = 1,2,\cdots,k$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} V(L_i) = V(G)$$

三、模型的求解

问题1　现要分三组巡视，则需把图 G 分成三个子图 $G_i(i = 1,2,3)$，在每个子图 G_i 中寻找最佳回路 $L_i(i = 1,2,3)$。

因为最小生成树能包含图 G 中所有顶点 E，而且最小树的边权是相邻两顶点之间的距离，它描述了顶点之间的相近程度，故可考虑利用最小生成树初步分块。

根据最小生成树求解的Kruskal算法,可以找到图的最小生成树如图9.10。

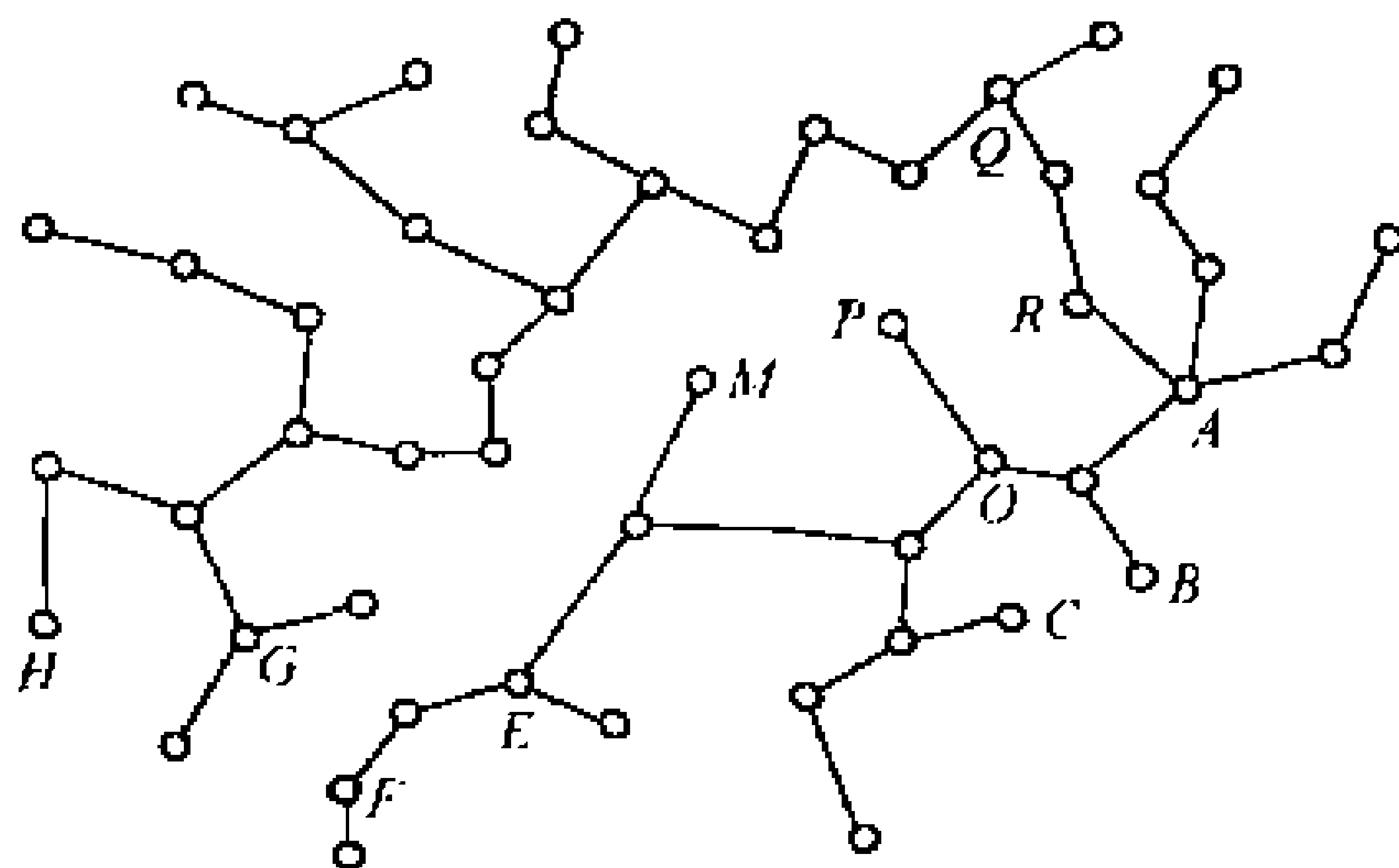


图9.10

现要对已得到的最小生成树 T 分解,以获得三个子图 G_i.使得分解结果尽量均衡。由于在最小生成树上,边权接近,可略认为均衡即各子图包含的顶点数接近,故各子图包含的顶点尽量接近 $[(35+17)/3]=17$ 个。故有以下分解原则:

最小生成树分解原则:

(1) 分解点为 O 点或尽可能接近 O 点;

(2) 分解所得的三个子图 G_i 所包含的顶点数尽可能接近17个;

(3) 尽量使分解所得的子图 G_i 为连通图;

(4) 尽量使子图 G_i 与点 O 的最短路上的点在该子图内,尽量使各子图的点在子图内部形成环路。

根据以上分解原则,得到分解结果如图9.11所示。

从而根据最小生成树的分解方法把图 $G(V,E)$ 划分为三个子图 G_i, $i=1,2,3$,分别在 G_i 中寻找最佳巡视路线。现给出几个寻找最优回路的优化规则:

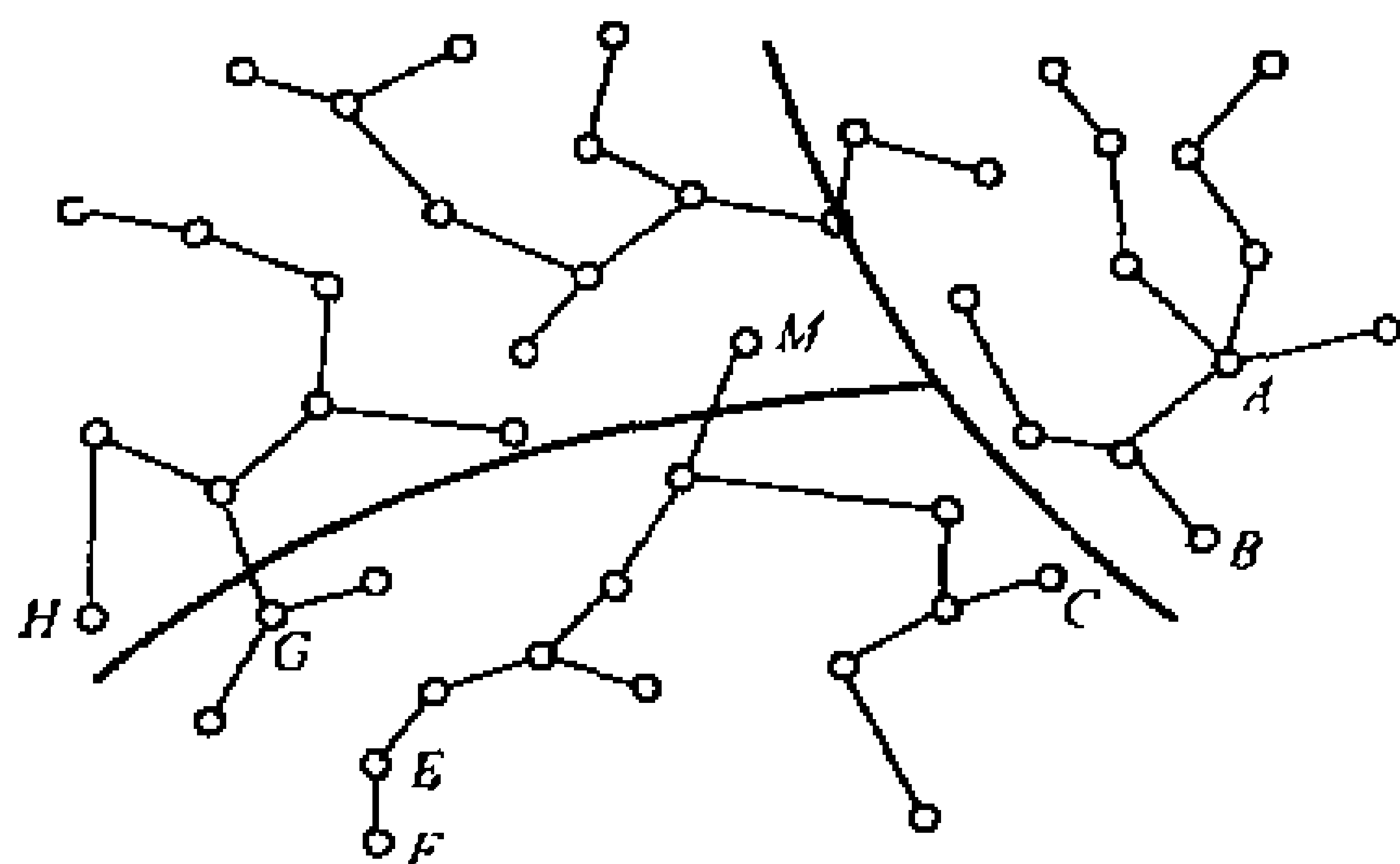


图 9.11

1) 扩环策略

如果在图 G 中的路径 C_i，有孤立的枝存在，如图 9.12 所示代表 1,2,3 三个顶点，若 $w_{1,2} + w_{1,3} > w_{2,3}$，则应考虑扩环，扩环策略还可扩展到多个顶点的情况：

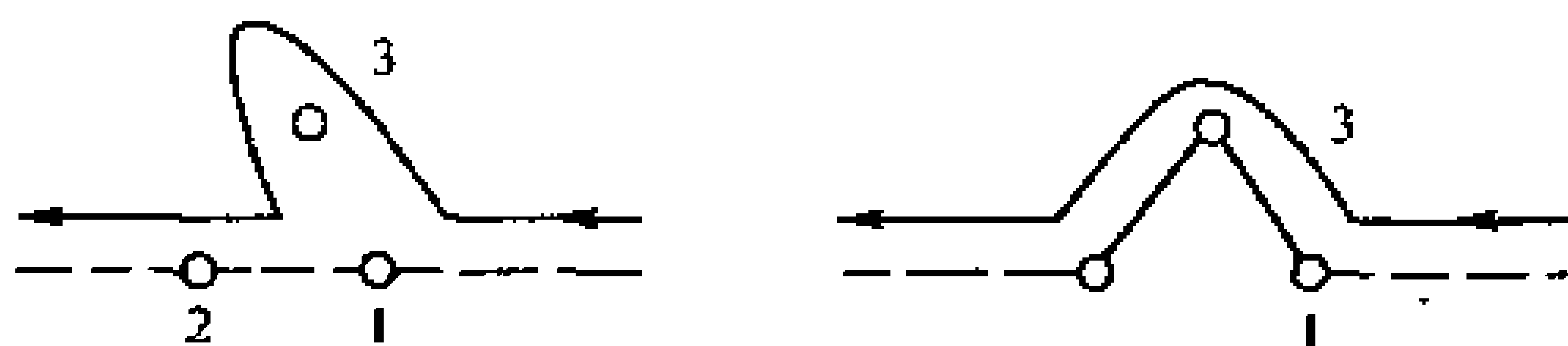


图 9.12

如图 9.13 所示：扩环后相比扩环前其权和变化为：

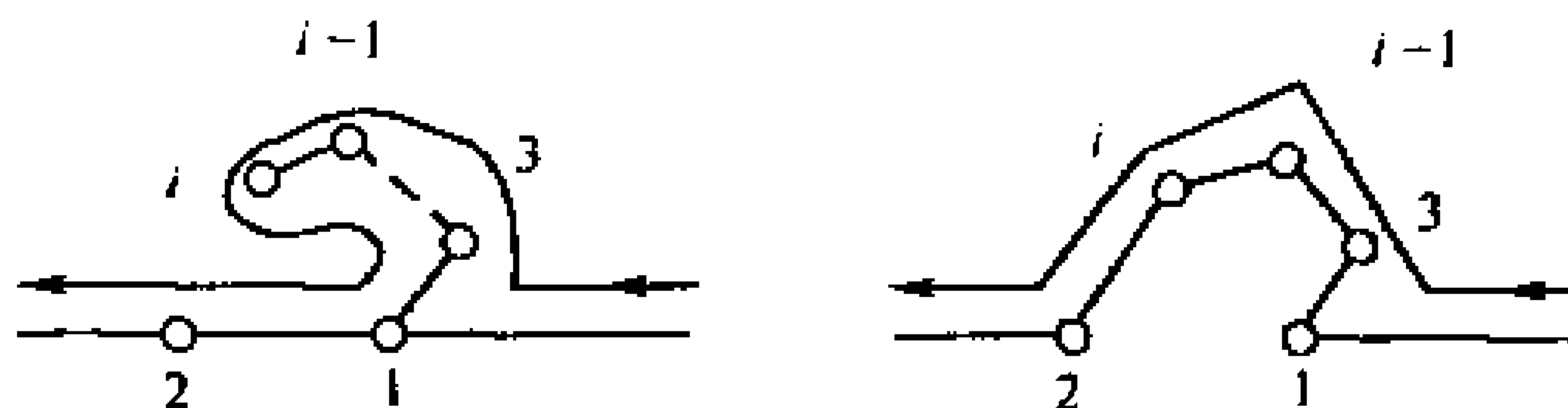


图 9.13

$$\Delta = -\left\{w_{1,2} + 2w_{1,3} + \sum_{k=4}^{i} w_{k-1,k}\right\} + \left\{w_{1,3} + \sum_{k=4}^{i} w_{k-1,k} + w_{1,2}\right\}$$

若 $\Delta < 0$,则应扩环,当 $w_{1,2} < w_{1,3} + \cdots + w_{i,2}$ 时,扩环后总路程更少,可进扩环调整。

2) 增环策略

若环路上某顶点处长出两条枝,且存在可使两枝成环的边,可考虑增环。增环前后其权和变化为:

$$\Delta = w_{i,i+1} - \left(\sum_{k=2}^{i} w_{k-1,k} + w_{j,2}\right)$$

若 $\Delta < 0$,则应增环。当 $w_{i,i+1} < w_{2,3} + \cdots + w_{j,2}$ 时,增环后总路程更少,可进行增环调整。

我们对图 9.14 进行分析,发现扩环策略与增环策略条件完全满足,故这两种策略完全适用。

3) 换枝策略

若环路上某顶点长出一条枝,而该枝末梢同环路中另一顶点距离接近,可考虑换枝。如图 9.15 所示,若

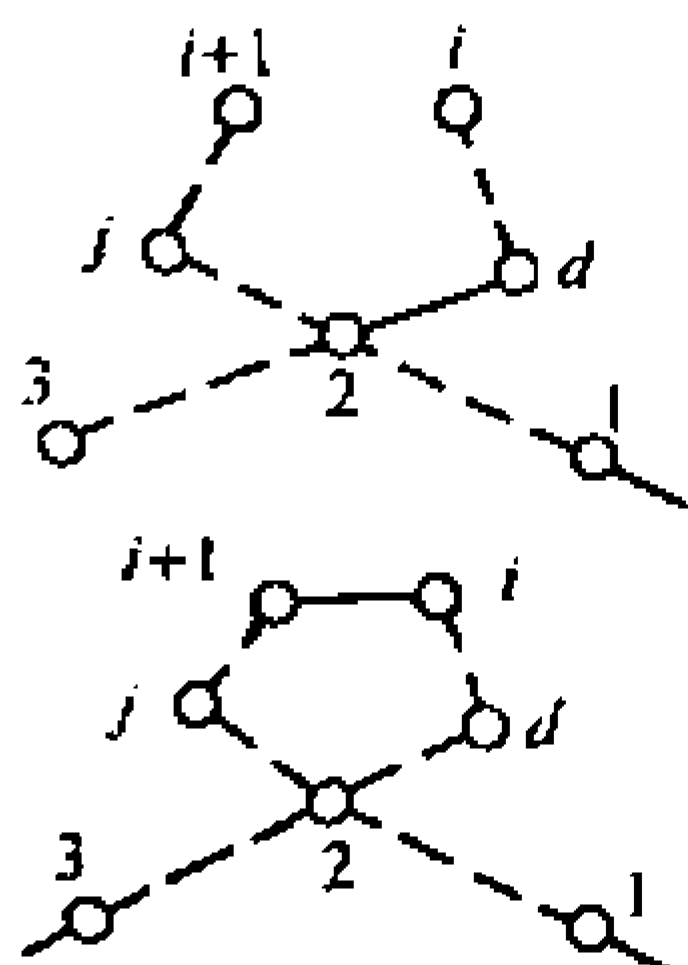


图 9.14

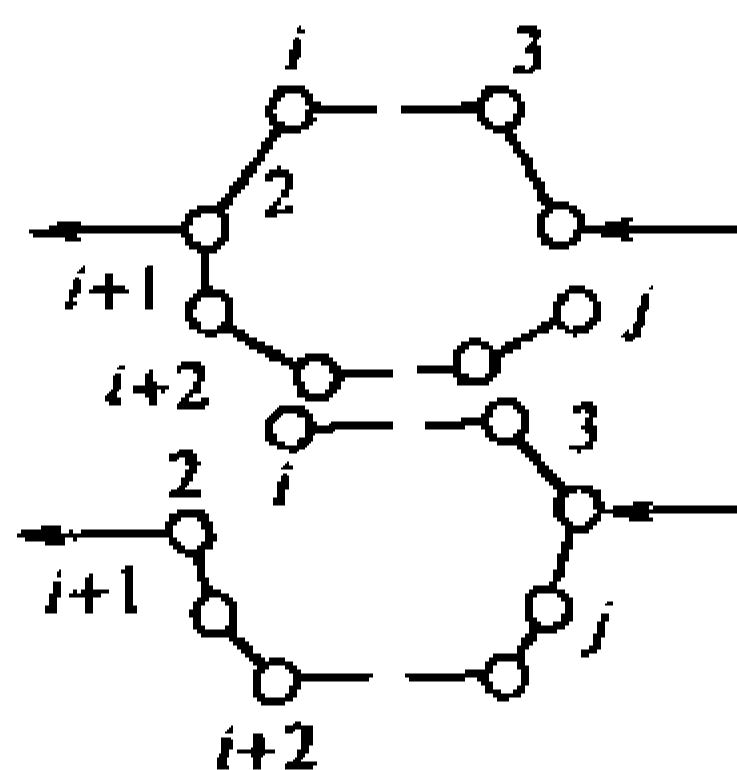


图 9.15

$w_{1,3} + \cdots + w_{i,2} + 2(w_{2,i+1} + \cdots + w_{j-1,j}) > w_{1,j} + \cdots +$

$w_{i+1,2}+2(w_{1,3}+\cdots+w_{i-1,i})$ 则应考虑换枝。换枝的结果是使被重复的路减少。

根据以上的优化策略及分块结果，在 $G_i, i=1,2,3$ 中分别寻找一条从 O 出发，遍历 V 并回到 O 的最短路线。

在图 $G(V,E)$ 中，求三条从 O 出发并回到 O 的路 L_1, L_2, L_3，满足 $V=\bigcup_{i=1}^{3} V_i$，$V_i(i=1,2,3)$ 为 L_i 中经过点的集合，使得 $\sum L_i$ 最小，且 L_i 与 L_j 相差不大。

可以按下列步骤进行，求出 L_1, L_2, L_3

第 1 步：作出 G 与 O 之间的最短路；

第 2 步：以 O 与 G 连通的路径及原图 G 的最优树在 G_i 中保留的边为基础，进行增环扩环调整，使最后尽可能形成一个环路。

12，G，11 归入 G_3，因为它们可与 F，9，E 形成环路；M 归入 G_2 是因为 M 在 G_2 与 O 的最短路上，现对 G_2 进行调整：首先，根据增环法添上 $e_{2,16}$，根据对换法，添上边 $e_{14,15}$，去掉 $e_{J,18}$；根据扩环法，添加边 $e_{22,K}$，去边 $e_{17,K}$，再进行扩环，加边 $e_{21,23}$，去边 $e_{21,25}$；加边 $e_{23,N}$，去边 $e_{24,N}$，得到图 9.16。同样，根据这些法则对 G_1G_3 调整，分别可得到图 9.17 和图 9.18。

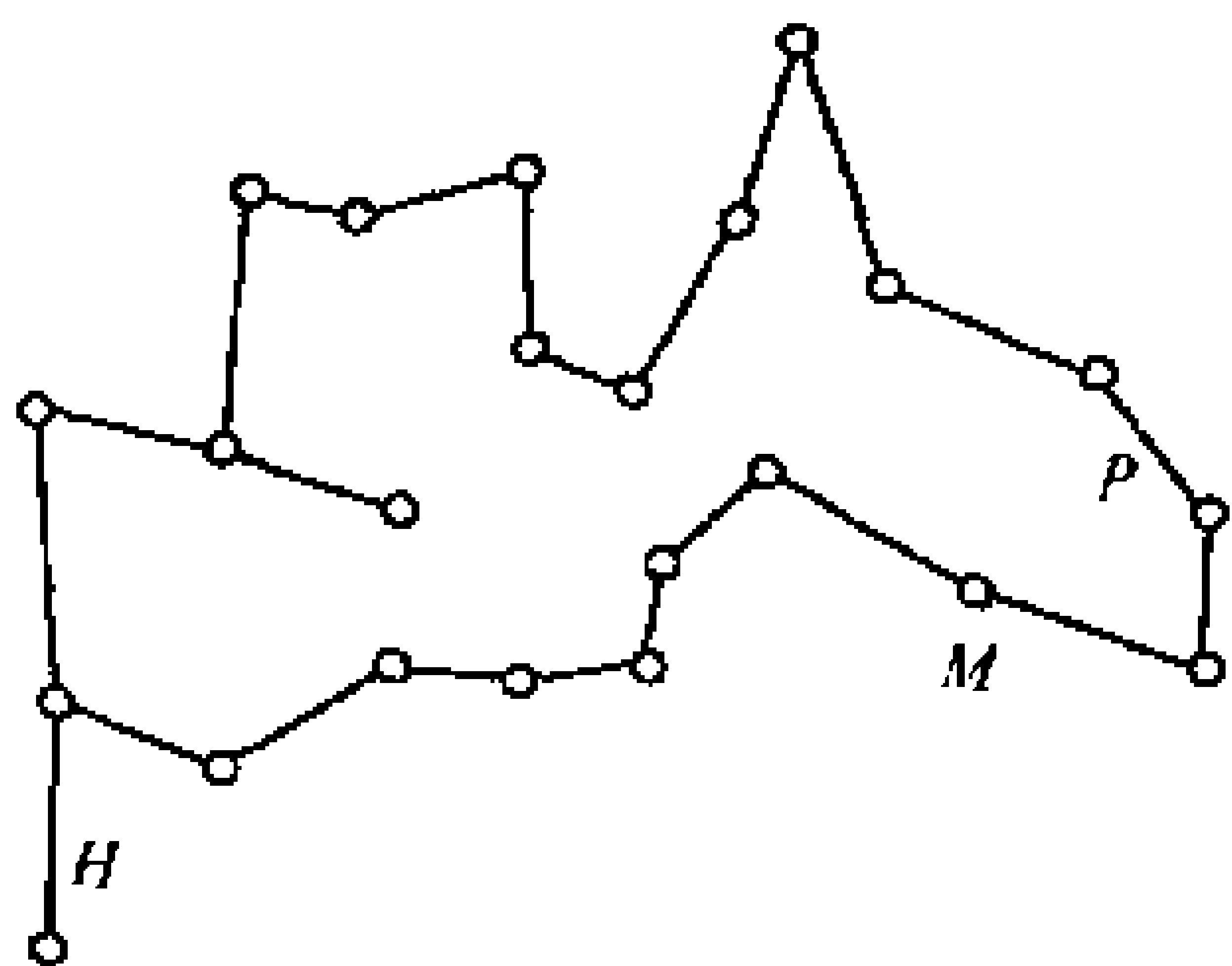


图 9.16

再由图计算得 $l_1=159.3, l_2=206.8, l_3=219.5$(KM)，总路程长 585.6km。

问题 2 （限时巡视的最佳路线）

若分成 n 组巡视人员，其各自所走的路径 L_i，回路 L_i 中边权 $w(e_i)$，点权 $w(v_i)$，则有 $l_i = \sum_{e \in E(L_i)} w(e_i)$，点权和 $c_i = \sum_{e \in E(L_i)} w(v_i) = (2a_i + b_i) \times 35$，其中 a_i 为乡相对应的点的数目，b_i 为与村相对应的数目，巡视至少应分的组数 n：$n = \min\left\{ n \mid \frac{L_i}{35} + 2a_i + b_i < 24 \right\} \quad (i = 1, \cdots, n)$。

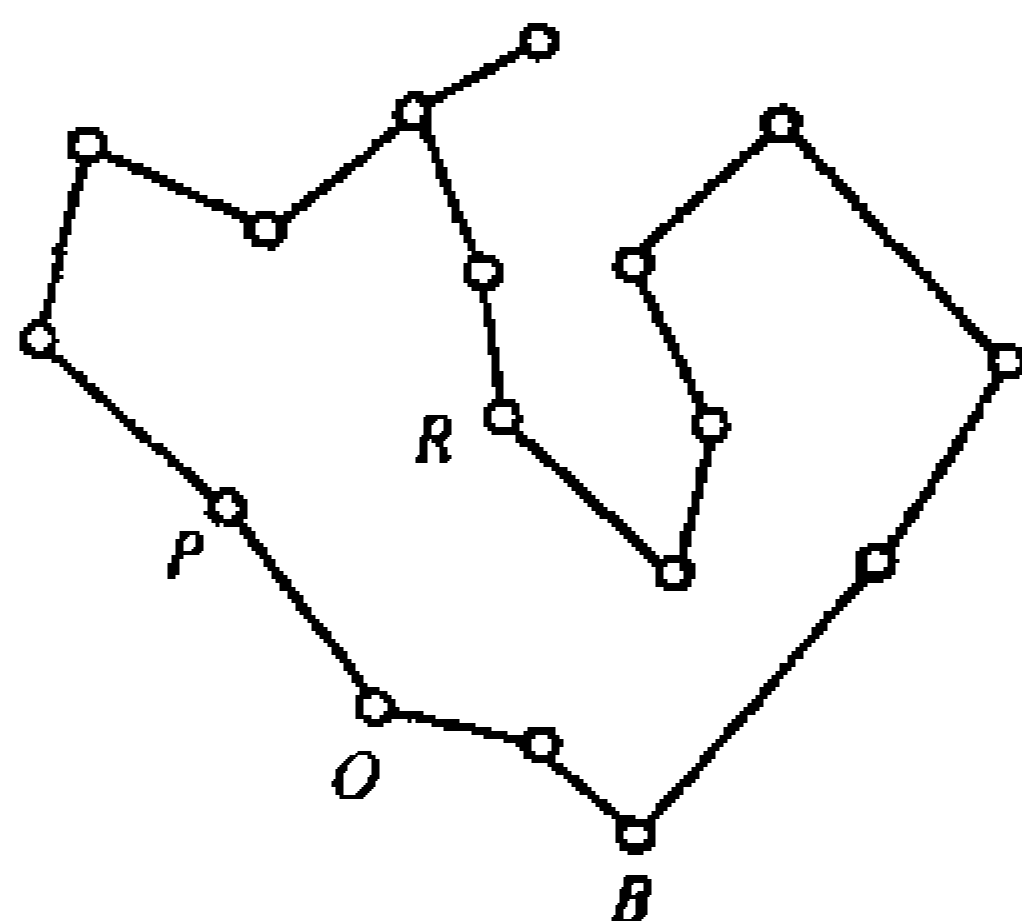


图 9.17

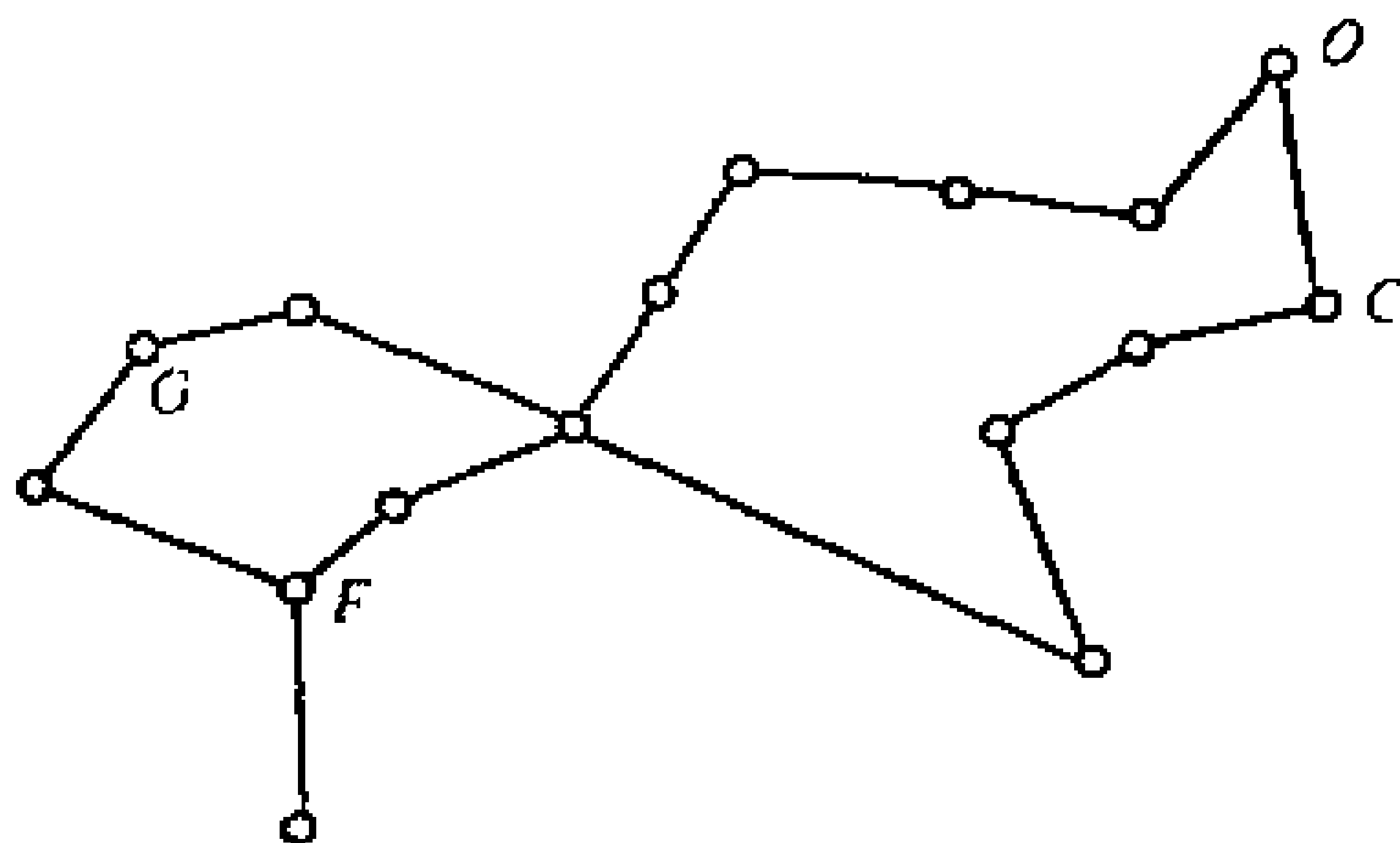


图 9.18

可以证明 $n > 3$(略)。

考虑 $n = 4$，同分三组的情况类似，用最优树分解方法把图 G 分成子图 $G_i(i = 1,2,3,4)$，子图中点权之和 $2a_i + b_i$ 尽量相同，总的点权之和为 $17 \times 2 + 35 = 69$，故平均每个子图中点权和为 $[69/4] = 17$. 故参照分三组时的最小树分解原则，分成 4 组时最小树分解原则为：

(1) 使各子图中点权和尽量接近 17；

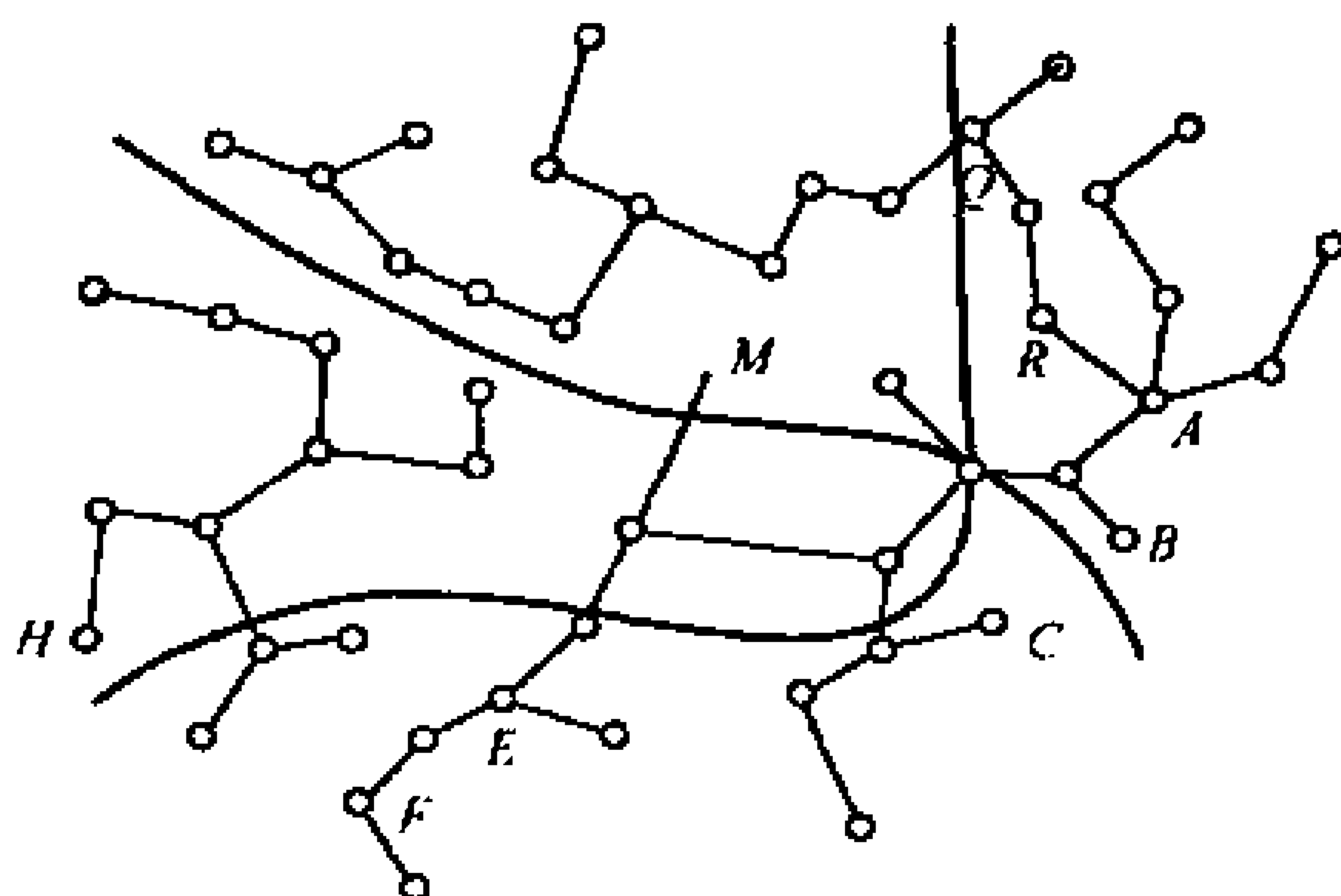


图 9.19

(2) 分解后的各子图尽量为连通图;

(3) 分解点为 O 或尽量接近 O;

(4) 生成的子图容易形成圈或接近圈。为使尽量均衡,大致划分为如图 9.19 所示。

通过增环、扩环、换枝等策略,对各子图内部调整而寻找最佳巡视回路,其结果如图 9.20 所示:

经计算得到如下结果:

表 9.2

组数	路程 (km)	巡视时间 (h)	巡　视　路　线
1	140.1	22.0	$O,C,B,1,A,34,35,33,31,32,30,29,R,O$
2	154.3	21.4	$O,P,28,27,26,N,23,22,17,16,K,21,25,M,O$
3	185	22.3	$O,M,25,21,K,18,I,15,14,H,14,13,J,19,20,L,6,5,2,O$
4	182	21.1	$O,2,5,6,E,11,G,12,F,10,9,E,8,4,D,3,C,O$

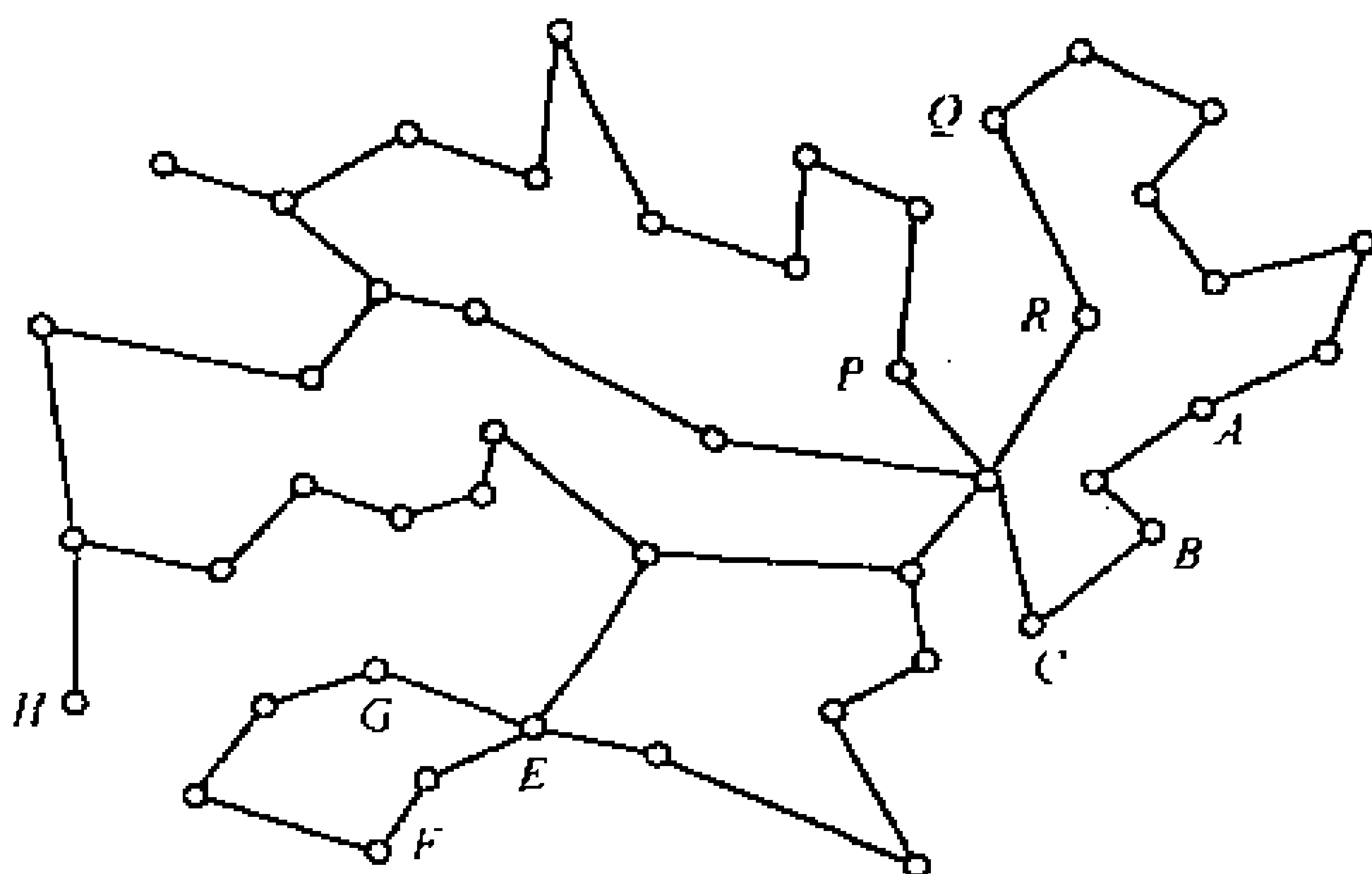


图 9.20

完成巡视的最小时间为 $t_{\min} = 22.3$ 小时，其中路线重合部分的点，即 K,21,25,M 为二组巡视。6,5,1 由三组巡视。

问题 3　巡视人员足够多，并设汽车也足够多，甚至每个村、镇都可分配一组巡视员，这些组的完成时间中最长的即为完成巡视的时间下限 $t_{\min}$，从最短生成树上可以看出，H 离 O 距离 $l_{O,H}$ 最长，且 H 的权最大 = 2，故巡视 H 的那组所花的时间为完成整个巡视的时间下限，$t_{min} = \dfrac{2l_{O,H}}{\overline{V}} + w_H = 6.43$，因此，需解决的问题是

$$\min n$$

$$\text{s.t.}\ \frac{2l_i}{35} + 2a_i + b_i \leqslant t_{\min} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

采用如下的算法近似求解：

第 1 步：令 $i = 0$，

第 2 步：选最短路树形图中未被标号的点中离点 O 最近的点，设为 M，M 与 O 的距离为 l_m，设第 i 个巡视点集 $V_i = \{M\}$，计算

V 最多还可增加的点的权之和 $l_m = t_{\min} - \frac{2l_m}{V} - w_m$。

第 3 步:尽可能使并入 V_i 的点的权之和为 $[l'_m]$,同时满足存在从 O 出发,经历 V_i 中所有点并回到 O 点的路 L_i,使 $\frac{l_i}{V} + T_{ai} + tb_i \leqslant tb_i \leqslant t_{\min}$,$l_i$ 为 L_i 的长度,a_i,b_i 分别为中权为 T,t 的点的个数。若同时存在几种并入方式,选取并入的点到 O 距离之和最大的那一种。

第 4 步:在图中把中含有的点标上号,若还有点未标号,令 $i = i+1$ 转第 2 步,否则,停止。通过这种算法,得到应分为 22 组,结果见表 9.3。

表 9.3

分　组	巡　视　路　线	花费时间 (h)	路程 (km)
{H}	O,2,3,8,7,E,11,Q,12,H,12,Q,11,E,7,8,3,2,O	6.43	155
{14,13}	O,2,5,6,L,19,J,13,14,13,J,19,L,6,5,2,O	6.15	145.4
{15,16}	O,26,N,23,22,16,I,15,I,18,K,21,25,M,O	6.37	153
{12,11}	O,2,5,6,7,E,9,F,12,G,11,E,7,6,5,2,O	5.93	137.6
{10,8}	O,2,5,6,7,E,9,F,10,F,9,E,8,E,7,6,5,2,O	6.21	147.4
{G}	O,2,5,6,7,E,11,G,11,E,7,6,5,2,O	5.58	125.4
{I}	O,M,25,21,K,18,I,18,K,21,25,M,O	5.49	122.2
{F,9}	O,2,5,6,7,E,9,F,9,E,7,6,5,2,O	6.17	111.2

分　组	巡　视　路　线	花费时间 (h)	路程 (km)
{J,18}	O,2,5,6,L,19,J,18,K,21,25,M,O	6.29	115.4
{17,22,20}	O,P,26,N,23,22,17,K,21,20,25,M,O	6.31	115.8
{19,K}	O,M,25,21,K,21,20,19,L,6,5,2,O	6.18	111.2
{24,23,21}	O,P,26,N,24,23,21,25,M,O	5.79	97.9
{E,7,6}	O,2,5,6,7,E,7,6,5,2,O	6.38	83.4
{L,5,25}	O,M,25,20,L,6,5,2,O	6.36	82.8
{30,Q,32}	O,R,31,32,30,Q,29,R,O	6.17	76.2
{35,34,33,31}	O,1,A,34,35,33,31,R,O	6.42	84.7
{4,D,3}	O,2,3,D,4,D,3,C,1,A,1,O	5.99	69.8
{N,27,28}	O,P,26,N,26,27,28,P,O	6.27	79.5
{29,P,R}	O,R,29,P,O	6.32	46.1
{31,2,C}	O,R,31,R,O,C,3,2,O	6.22	77.6
{26,M}	O,M,,N,26,P,O	4.86	65.1
{B,A}	O,1,B,A,1,O	5.15	40.4

问题4　设某种情况下，即 $\overline{V},T,t$ 取某一组值时，在满足 $\max t_i$ 取最小值的条件下的点集为 V_i 对应路为 L_i，其长度为 l_i，$i = 1,2,\cdots,n$。令 $t_i = \frac{L_i}{\overline{V}} + Ta_i + tb_i$，此时应满足 t_i,t_j 相差不大，否则，可将 t_i 中最大的点集去掉一个点，并将其加到 t_i 中最小的点集中去。

当 $\overline{V}$ 改变 $\Delta\overline{V}$ 时，t_i 的改变量为 $\Delta t_i = \frac{(\overline{V}-\overline{V}')}{\overline{V}\overline{V}'}$.

由于 l_i 的不同，Δt_i 也不同，当 $\overline{V}$ 变化很大时，可能使 t_i 相差很大，从而需要重新调整巡视路线。现以 $n = 3, V = 35, T = 2, t$

= 1 讨论变动对路线的影响。

首先，从 1 中所得的三条巡视路线及对应巡视点集开始，将 t_i 最大的点集中调整一个到 t_i 最小的点集中去，直到 $\max t_i$ 不再减小为止，我们得到三条路线，对应长度分别为 194、205.3、206.8，各巡视点集中权为 1、2 的点的个数分别为 $a_1 = 6, b_1 = 11, a_2 = 5, b_2 = 13, a_3 = 6, b_3 = 11$。

当 T 增加时，对应时间分别为 $t_1 = 6\Delta T + 28.5$，$t_2 = 5\Delta T + 28.9$，$t_3 = 6\Delta T + 28.9$，当 $\Delta T > 3.4$ 时，可将 V_3 中的点 H 调入 V_2 中，此时对应的时间为 $t'_1 = 6\Delta T + 28.5, t'_2 = 5\Delta T + 31.5, t'_3 = 6\Delta T + 26.3$ 均比 $\max\{t_1, t_2, t_3\} = t_3$ 小，故应改变巡视路线。

四、模型的评价及改进

1. 该问题实际上是一个多旅行售货员(MTSP)问题，是已被论证的 NPC 问题，至今仍无有效的算法。求最优 Hamilton 回路是该问题的常见的计算机近似算法，它不能保证得到最优解，只能得到较优解。

本书提出的策略改进方法也不能保证求得最优解，但接近最优解，并且所提出的策略能大幅度减少计算量，以至于根据手算便能得到较为满意的结果。

2. 本文利用最优树分解方法对图分块，但未能给出一个准确的原则定量地给出总路程最短同均衡性最好的制约关系。

(本节主要根据成都电子科技大学的罗卢杨、龙继东和唐小军的论文改写)

9.3 计算机网络的最短传输时间(AMCM－94B 题)

一、问题提出

某公司各部门间每天需用网络进行信息传递。网络用图表示时，计算机表示顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_m$，边 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 表示两台计算

机之间需要传输的文件。$T(e_x)$ 为文件 e_x 的传输时间，$C(V_y)$ 为计算机 V_y 可以同时传输的最大文件数目，针对下面三种情况，该公司希望设计一种最佳的传输方案，使网络总的传输时间（即所有文件传输全部完成的时间）最短。

情形 A　公司有 28 个部门，每个部门配备一台计算机（分别用图 9.21 中顶点表示）。每天需传输 27 个文件（分别用图 9.21 中边表示）。在该网络中，对所有 x，y 满足 $T(e_x)=1$ 和 $C(V_y)=1$。

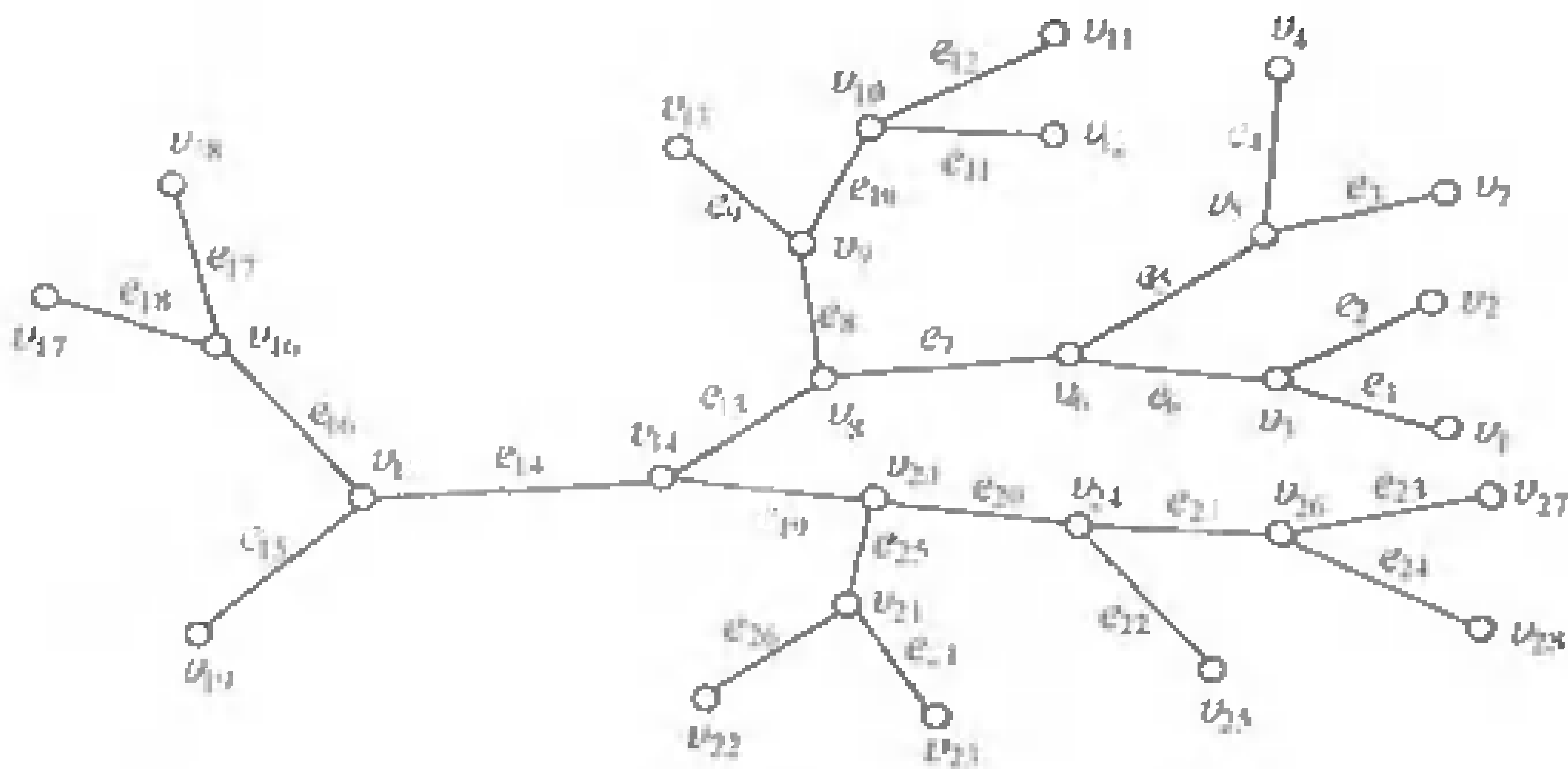


图 9.21

情形 B　假设网络结构未变，但各部门间所传递的文件类型和大小各不相同，传输文件如表 9.4 所示，每台计算机传输容量 $C(V_y)$ 仍为 1。

表 9.4　情形 B 的文件传输时间

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$T(e_x)$	3.0	4.1	4.0	7.0	1.0	8.0	3.2	2.4	5.0	8.0	1.0	4.4	9.0	3.2
x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
$T(e_x)$	2.1	8.0	3.6	4.5	7.0	7.0	9.0	4.2	4.4	5.0	7.0	9.0	1.2	

情形 C　公司正考虑扩展，一方面，每天有更多的文件需要传输，另一方面，公司的计算机系统也正在升级，有些部门配备更高

级的计算机(可以同时与几个部门传输文件)见图9.22、表9.5、表9.6。

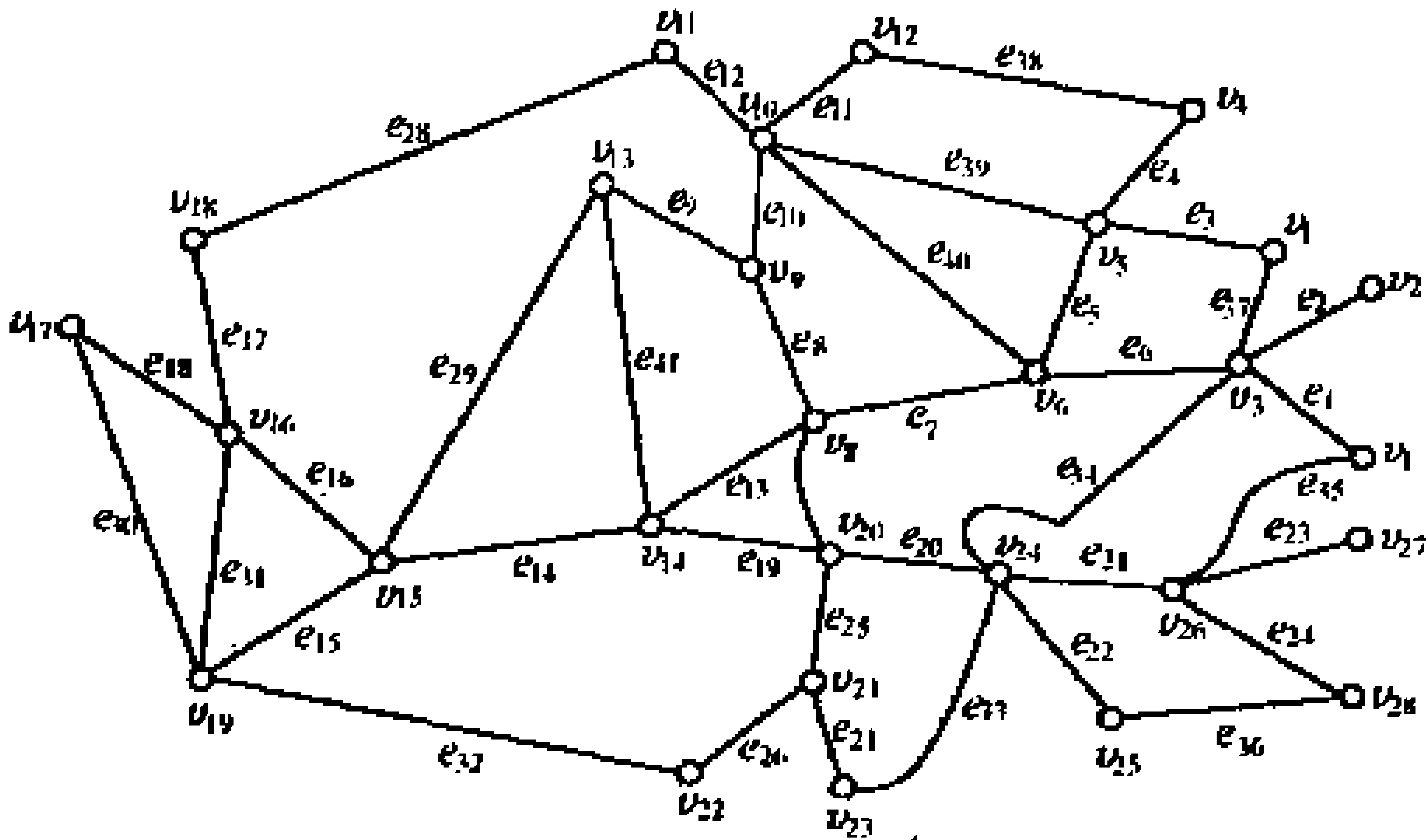


图 9.22

二、问题分析

首先,根据表9.5、表9.6,我们假定:

① 在A、B两种情形中,所有计算性能完全相同,情形C时有的计算机同其它计算机相比能传输更多文件;

② 每个文件的传输以一个连续的整体进行,文件传输无优先权,即文件一旦开始,不得中断直到所有文件传输完毕;

表9.5 情形C的文件转输时间

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$T(e_x)$	3.0	4.1	4.0	7.0	1.0	8.0	3.2	2.4	5.0	8.0	1.0	4.4	9.0	3.2
x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$T(e_x)$	2.1	8.0	3.6	4.5	7.0	7.0	9.0	4.2	4.4	5.0	7.0	9.0	1.2	6.0
x	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$T(e_x)$	1.1	5.2	4.1	4.0	7.0	2.4	9.0	3.7	6.3	6.6	5.1	7.1	3.0	6.1

表 9.6　情形 C 的计算机传输容量

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$C(V_y)$	2	2	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1	2
y	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$C(V_y)$	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1

③ 通讯网络稳定、可靠，任何文件不得重复或重新传输；

④ 所有计算机不给自身传输文件；

⑤ 传输的切换时间可以忽略，即一台计算机传输不同文件的时间间隙很小；

⑥ 文件传输没有既定顺序，即所有文件具有同等重要性。

同时对符号约定如下：

$T(e_x)$—— 文件 e_x 的传输时间。

$T_b(e_x)$，$T_e(e_x)$—— 文件 e_x 开始和结束传输的时刻；

Δ—— 图的度数。

$C(V_g)$—— 计算机的传输容量，即可同时传输文件的数目。

$d(V_g)$—— 计算机 V_y 的负载，为 V_y 完成所有传输需要的最短时间，即当 $C(V_y)=1$ 时，$d(V_y)=\sum_{e_x}T(e_x)$，e_x 为需从 V_y 上传输的文件；而 $C(V_y)=n(n>1)$ 时，将计算机需要传输的文件分为 n 组，使传输时间总和最长的一组时间尽可能短，$d(B_y)$ 即为该组所有文件的总传输时间。

χ'—— 边染色所需的最小色数。

情形 A　在此情况下存在着不同的传输方式，但无论哪一种传输方式，一对正传输某种文件的计算机都不能从事另外文件的传输，因此，可以通过选择网络中的所有边以得到某种匹配，特别地，每一个时间单位分开考虑时，将会得到无重边的多种匹配，或者等价地考虑边染色数，边的不同匹配等价于当相邻两边（共一个顶点）染上不同颜色时每一边的染色。

在上述情况下最小传输时间的计算分别为产生整个图的最少匹配数和最少边染色数。

情形B、C 显然，计算机最短传输时间不小于最大负载数。在情形B与C时，不能直接利用图论理论立即产生出有效的算法，例如，情形C就不是二分图，因此，有必要选择一种贪婪算法（Creedy algorithm）以产生出一种近似最优解。

三、问题求解

情形A 根据前面的分析，情形A中文件的传输相当于二分图的边染色过程，利用Bondy定理，$\Delta = \chi'$，因此，情形A之网络最短传输时间为3。

下面给出一种适用于一般二分图的有效文件传输算法。

第1步：将网络看作树状二分图，$G = (X, Y, E)$，找出次数最大的那些顶点，设 $X' \subseteq X$，$Y' \subseteq Y$ 且 $X' \cup Y'$ 为 G 中所有最大次数顶点的集合。

注：存在匹配 M 为 X' 与 Y' 的覆盖集，若该匹配之构造显然，则转第4步。

第2步：构造 X' 的覆盖集 M_1，设 $g(X')$ 为在 M_1 中 X' 被连接的顶点集合，对于 X 的每个子集 S，可类似定义 $g(S)$。

(i) 若 X' 在唯一顶点，为平凡情形。

(ii) 对 X 中所有满足 $|S| < |g(S)|$ 的子集 S，取 $x_0 \in X'$，并将 x_0 与 $g(x_0)$ 的某顶点 y_0 相连接，此时 $X' \setminus x_0$ 与 $g(X') \setminus y_0$ 可以被匹配，因此，以 $X' \setminus x_0$ 与 $Y' \setminus y_0$ 代替 X' 与 Y'，返回第②步。

(iii) 对于满足 $|S'| = |g(S)|$ 的子集，则 S 与 $g(S)$，$X' \mid S$ 与 $Y' \mid g(S)$ 均能被匹配。由于 S 与 $X' \setminus S$ 顶点数均少于 X' 的顶点数，故可用 X' 作为第②步中 S 与 $X' \setminus S$。

第3步：类似地，用 Y' 匹配 $g(Y')$，利用第2步算法，称该匹配为 M_2。

注：$M_1 \cup M_2$ 的某些子集匹配 X 与 Y 的顶点集也覆盖 X' 与 Y'，若该过程不是显然的，则转第 4 步。

第 4 步：设 Y'' 为在 M_1 中被匹配的顶点集合，对于顶点 $y \in Y'' \setminus Y'$，设 P_y 为以 y 为起始点的通路，

$$P = \bigcup_{y \in Y'' \setminus Y'} P_y$$

构造对称差

$$M = (M_1 \setminus P) \cup (P \setminus M_1)$$

特别地，若 M_1 与 M_2 顶点不连通时，则 $M = M_1 \cup M_2$。

注：$M_1 \cup M_2$ 是顶点次数至多为 2 的子图。

利用上面的算法，可以很快找到多种最短传输时间方案，下面给出一种(见表 9.7)。

表 9.7　情形 A 时的文件传输计算

时　间	被传输的文件
0	17,14,25,22,24,7,3,1,10
1	18,15,19,26,21,8,11,5,2
2	16,13,27,20,23,9,6,4,12

情形 B 与 C　通过模型分析我们看到，情形 B、C 与情形 A 是不相同的，首先，情形 B、C 边上的权值不再是 1，另外，情形 C 不是二分图，下面给出两种适合情形 B、C 的贪婪算法。

算法 1

第 1 步：计算出图中每个顶点的负载并选取最大负载的顶点以及相应边，负载最大者优先传输(见表 9.8 和表 9.9)。

表 9.8　情形 B 各顶点的负载

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$d(V_x)$	3.0	4.1	15.1	7.0	12.0	12.2	4.0	14.6	15.4	13.4	4.4	1.0	5.0	19.2
x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$d(V_x)$	13.3	16.1	4.5	3.6	2.1	21.0	17.2	9.0	1.2	20.2	4.2	18.4	4.4	5.0

表 9.9　情形 C 各顶点的负载

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$d(V_x)$	9.0	4.1	23.8	13.6	17.1	19.3	10.3	20.7	8	9.5	10.4	7.6	9.1	12
x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$d(V_x)$	14.4	11.6	9.7	9.6	15.4	27.1	17.2	9.0	8.2	29.6	7.9	14.0	4.4	8.1

表 9.10　情形 B 时的一种最佳传输方案

起始时间	开始传输的文件									
0.0	e_1	e_5	e_8	e_{11}	e_{15}	e_{17}	e_{19}	e_{22}	e_{23}	e_{27}
1.0		e_1		e_{12}						
1.2										e_{26}
2.4			e_7e_9							
3.0	e_2									
3.6						e_{18}				
4.4									e_{24}	
5.0		e_1								
7.0							e_{14}	e_{20}		
7.1	e_6									
7.4				e_{10}						
10.2							e_{13}	e_{16}		
14.0								e_{21}	e_{25}	

第 2 步:对于每个顶点而言,将所有未被传输的文件按传输时间递增顺序排列,时间较短者优先传输以减少等待时间。

第 3 步:整个文件传输中,按照负载大小顺序传输,直到所有文件传输完时停止,以保证达到局部最优。

按照算法 1,我们可以找到多种信息传输最佳方案,例如:

表 9.10 中最佳传输时间为 23。

表 9.11 的最佳传输时间为 29.6。

表 9.11　情形 C 时一种最佳传输方案

起始时间	传输的文件
0.0	e_5　e_{11}　e_{15}　e_{17}　e_{23}　e_{27}　e_{34}　e_{36}　e_{41}　e_{42}
1.0	e_3　e_{12}　e_{38}
1.2	e_{26}
2.1	e_{30}
2.4	e_{33}　e_1
3.0	e_{14}　e_9
4.4	e_{24}
5.4	e_{28}　e_{39}　e_2
6.1	e_7
6.2	e_{19}　e_{16}
9.3	e_8
9.4	e_{21}
9.5	e_{37}
10.2	e_{32}
10.5	e_4　e_{40}
13.2	e_{13}　e_{25}
14.2	e_{29}　e_{31}
17.6	e_6　e_8
18.3	e_{18}
18.4	e_{22}　e_{35}
22.6	e_{20}

算法 2(改进的背包法)

对每台计算机 V_i,其背包数定义为 $c = C(V_i)$,每个 V_i 需执行网络传输的一个子集。

第 1 步:假定 V_i 需执行 k 次传输,传输次序 $e_{(1)},\cdots,e_{(k)}$ 使得 $T_{e_{(1)}} \leqslant T_{e_{(2)}} \leqslant \cdots \leqslant T_{e_{(k)}}$。

第 2 步:若 $k \leqslant C(V_i)$,每个背包中放置一个传输,这样,$T_{e(k)}$ 即为计算机完成传输的最短时间。

第3步：若 $k > C(V_i)$，$T_{e(k))}$ 放在第一个背包，$T_{(e(k-1))}$ 放入第二个背包，一直下去，到所有背包均有一个文件为止，将下一次需最长时间的文件 $T_{(e(k-c-1))}$ 放入包含最少传输时间的背包中，并将 $T_{e(k-c)} + T_{(e_{(k-c-1)})}$ 仍记为 $T_{(e(k-c))}$。再下一次则将 $T_{(e(k-c))}$ 放入含最少传输时间的背包中，例如 $T_{(e(k-i))}(i \leqslant c)$，且 $T_{(e(k-i))} := T_{(e(k-i))} + T_{(e(k-c-2))}$，继续此过程直到所有传输均放入背包中，背包中含最大传输时间的 $T_{(e(k-i))}$，$1 \leqslant i \leqslant c$ 恰为计算机完成传输的最短传输时间，见表9.12和表9.13。

表9.12　情形B时一种最佳传输方案

起始时间	传输的文件							
0.0	e_4	e_6	e_{10}	e_{13}	e_{16}	e_{20}	e_{24}	e_{26}
5.0	e_{23}							
7.0	e_3	e_{22}						
8.0	e_2	e_9	e_{12}	e_{15}	e_{18}			
9.0	e_7	e_{19}	e_{27}					
11.2	e_{21}							
12.1	e_1							
12.2	e_5							
12.4	e_{11}							
12.5	e_7							
13.0	e_8							
16.0	e_{14}	e_{25}						

表 9.13　情形 C 时的一种最佳传输方案

起始时间	传输的文件
0.0	e_4　e_6　e_{10}　e_{11}　e_{12}　e_{13}　e_{15}　e_{17}　e_{18}　e_{20}　e_{24}　e_{26}　e_{35}　e_{41}
2.1	e_{32}
3.0	e_9　e_{11}
4.4	e_{28}
5.0	e_{23}　e_{36}
6.1	e_{31}
7.0	e_3　e_{19}　e_{33}　e_{38}
8.0	e_1　e_{40}
9.0	e_8
10.2	e_{30}
11.0	e_{37}　e_{39}
14.0	e_{21}　e_{27}　e_{42}
14.2	e_{29}
15.1	e_5
17.3	e_2
20.1	e_7　e_{25}
23.0	e_{34}
25.4	e_{22}

四、问题的进一步讨论

1. 最优性分析

在情形 B 与 C 时图之度数 Δ 可理解为每一台计算机所需独立传输时间之最大者，重数 m 表示传输之最短时间，利用 Vizing 定理可得

$$\Delta \leqslant x' \leqslant \Delta + m$$

即 Δ 与 $\Delta + m$ 分别为传输时间 e 的下界与上界。

现在说明情形 B 时的最短传输时间 23。考察图 9.23 所示的顶点 8,14,20,24,26,21 和 22 构成的子图。v_{20} 的三条边均含 7 个时

间单位，而每条边的相邻边均含 9 个时间单位。计算机 v_{20} 有 3 个文件传输，每个文件传输耗时 7 个时间单位，由于容量为 1，故 21 是计算机所需时间下界。显然图 9.23 关于 v_{20} 为对称子图，故可考虑先传输 e_{25} 并同时传输 e_{21}（或 e_{13}），如此时只传输 e_{21}（或 e_{13}），则下一步安排为：7 个时间单位后传输 e_{19} 与 e_{26}（或 e_{20} 与 e_{26}），而 14 个时间单位后传输 e_{20} 与 e_{13}（或 e_{19} 与 e_{13}），共需 23 个时间单位。如果第一步同时传输 e_{13}，e_{21} 与 e_{25}，则 9 个时间单位后传输 e_{19}（或 e_{20}），16 个时间单位后输 e_{20}（或 e_{19}），e_{26} 可以时间段[7,14]之间任何时刻传输，也需 23 个时间单位。不难证明，从对称性意义上看，上述传输方案花费 23 个时间单位包含了所有最短传输时间方案，任何其它传输方案耗时都将超过 23，即传输时间下界为 23。

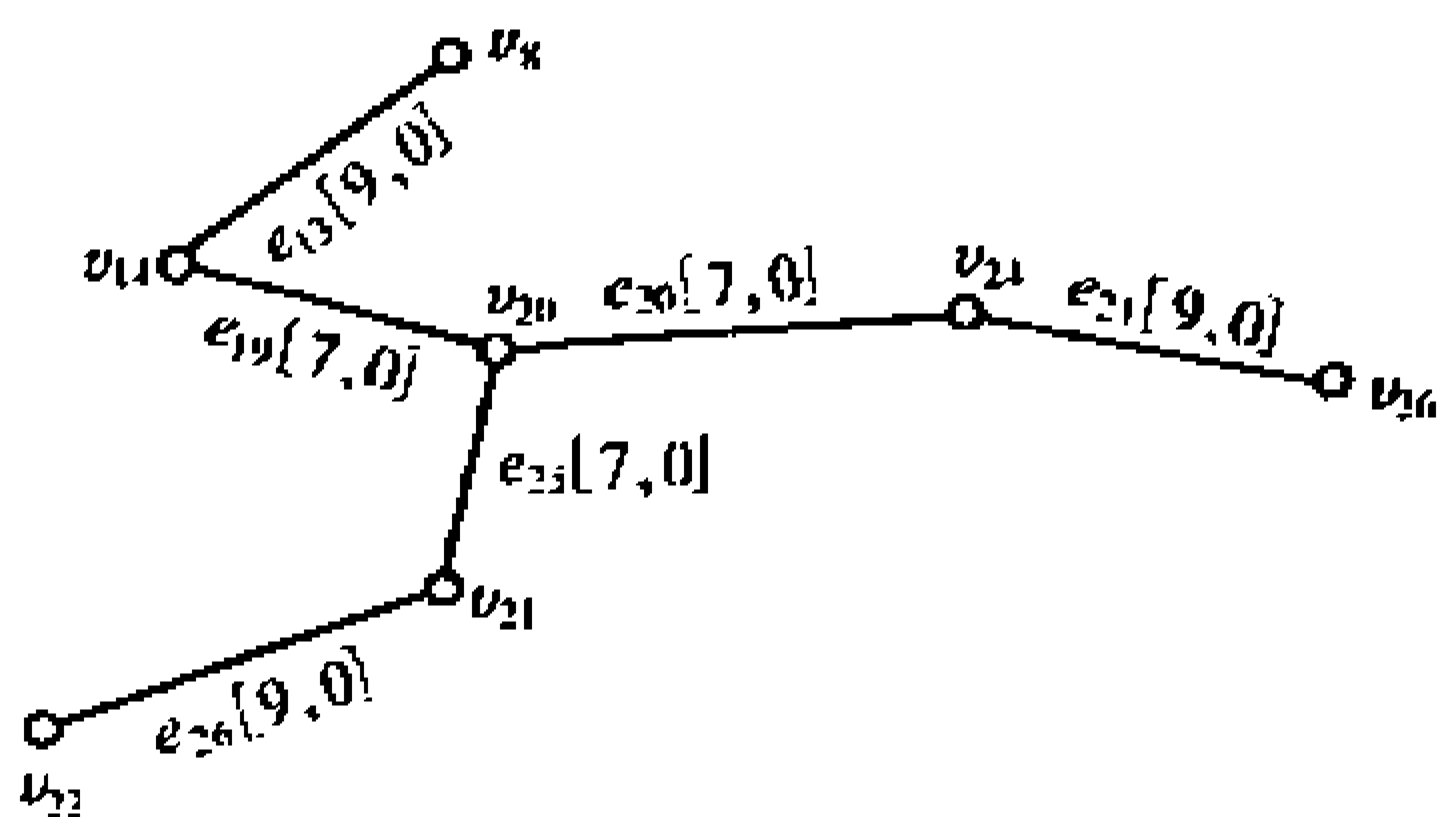


图 9.23

现在来说明情形 C 时的最短传输时间为 29.6。

考虑包含 v_{24} 及其边的子图，含边与传输时间 $T(e_x)$ 值的子图如图 9.24 所示。

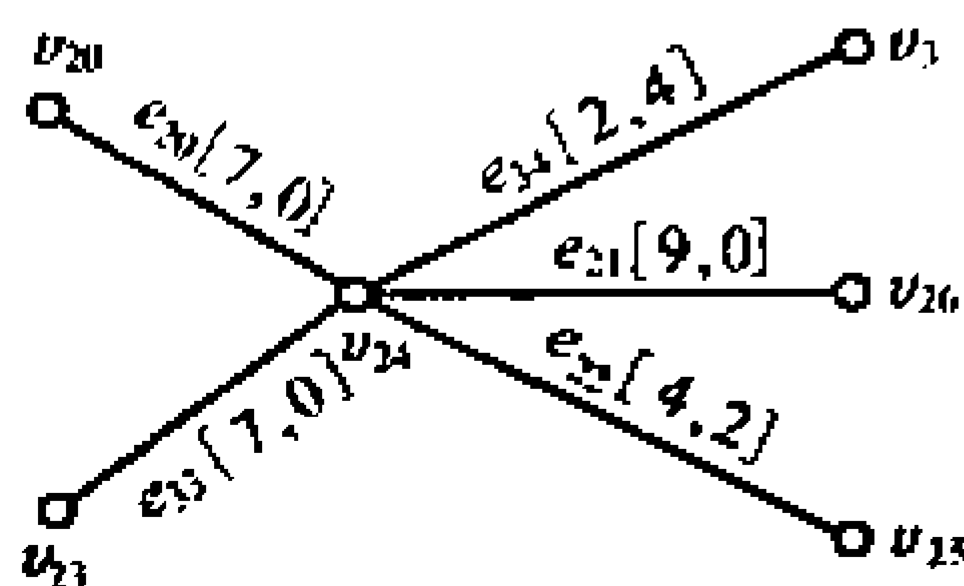


图 9.24

上述 v_{24} 的传输容量为 1，故 v_{24} 需传输的最短时间为 $7.0+4.2+9.0+2.4+7.0=29.6$。

2. 计算机重新配置

由于计算机性能的差异导致计算机容量的可能差别，例如情形 C。此时，人们自然想到用性能优良的计长机负担更多的传输任

务，为此，我们需要对计算机所在位置进行适当调整。如情形C时，v_2 与 v_{24}，v_9 与 v_{20}，v_1 与 v_3 以及 v_8 与 v_{22} 进行对调，则最少传输时间可减少到19.3，与原来的29.6相比，减少了35%，另外一种调整方案是先算出每台机器的负载 $\sum_{e_x} T(e_x)$，然后选出负载最大的8台计算机所在的位置，传输容量为3的计算机调整到负载最大的位置(v_{24})，其余7台容量为2的计算机则配置到另外7个负载较大的位置，此时的最佳传输方案如表9.14。

表9.14　情形C调整后的一种最佳传输方案

起始时间	传输的文件												
0.0	e_1	e_4	e_7	e_{10}	e_{12}	e_{15}	e_{18}	e_{21}	e_{24}	e_{25}	e_{37}	e_{41}	e_{42}
2.1	e_{16}	e_{23}	e_{32}	e_{33}									
3.0	e_{34}												
3.2	e_{13}												
4.4	e_{28}	e_{40}											
5.0	e_{35}	e_{36}											
5.4	e_6												
6.1	e_{20}	e_{31}											
6.3	e_2												
7.0	e_3	e_{19}	e_{26}	e_{38}									
8.0	e_9												
9.0	e_{22}												
10.2	e_{30}												
10.4	e_{17}												
11.0	e_{39}												
12.2	e_{14}												
13.0	e_8												
13.6	e_{11}												
15.4	e_{29}												
16.0	e_{27}												
16.1	e_5												

表9.15中的传输时间为17.2,与前一调整方案相比所需传输时间减少2.1个时间单位,与未调整时相比减少传输时间41.9%。

模型检验

在实际情况中,文件传输时间经常产生波动,而当计算机传输发生延迟时,后面的传输一般会产生影响。如果传输方法不稳定,有可能导致整个系统的混乱。为了测试本模型提供算法的稳定性,我们假定文件传输的波动服从均匀分布,分别随机取100组最大扰动值为0.1,0.3,0.5(时间单位),对情形C作检验发现模型具有相当好的稳定性,具体数据见表9.15。

表9.15　100组随机扰动的平均传输地间

	最大扰动值		
	0.1	0.3	0.5
算法1	29.6	29.7	29.8
算法2	29.6	29.6	29.7

(本节主要根据国防科技大学王刚、任敏、刘永祥的论文改写)

参 考 文 献

1 宋增民．图论与网络最优化．南京:东南大学出版社,1990

2 卜月华．图论及其应用．南京:东南大学出版社,2000

3 田丰,马仲蕃．图与网络流理论．北京:科学出版社,1987

4 Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph theory with applications, The Maclmillan Press Ltd, 1976; 中译本:J. A. 邦迪, U.S.R. 默蒂著,图论及其应用,科学出版社,1984

5 Harary, F., Graph Theory, Addison – Wesley, Reading, Mass, 1969; 中译本:F.哈拉里著,图论,上海科技出版社,1980

6 Papadimitriou, C. H. and Steiglitz, R., Combinatorial optimization: algorithms and complexity, Printice Hall Inc. 1982; 中译本:组合最优化:算法和复杂性,清华大学出版社,1988

7 Lawler, E. L., Combinatorial optimization: networks and matroids, Holt Rienhart and Winston, 1986

8 Bela Bollobas. Modern Graph Theory. Springer, New York, 1998

9 Biggs N. Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, 1974

10 张克民,林国宁,张忠辅．图论及其应用习题解答,清华大学出版社,1989

yingyong

